

Forme bilineari (terza lezione)

Applicazioni e matrici ortogonali

Si considerino due spazi vettoriali euclidei sul campo reale $V(\mathbb{R})$ e $V'(\mathbb{R})$ con i prodotti scalari s ed s' definiti positivi : $(V(\mathbb{R}), s)$ e $(V'(\mathbb{R}), s')$.

DEFINIZIONE:

Un'applicazione $f: V \rightarrow V'$ è detta ortogonale $\Leftrightarrow \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, $s(\underline{v}, \underline{w}) = s'(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$ (ovvero f conserva il prodotto scalare).

Si dimostra quanto segue.

Se f è ortogonale $\Rightarrow f$ è lineare e iniettiva .

Infatti :

1. f è lineare (ovvero f conserva le operazioni dello spazio vettoriale) :

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V , \forall h \in \mathbb{R} , f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w}) \text{ e } f(h\underline{v}) = hf(\underline{v})$$

In particolare, per la seconda delle due uguaglianze si ha:

$$f(h\underline{v}) = hf(\underline{v}) \Leftrightarrow f(h\underline{v}) - hf(\underline{v}) = 0 .$$

Poichè s' è definito positivo, basterà provare che:

$$s'(f(h\underline{v}) - hf(\underline{v}), f(h\underline{v}) - hf(\underline{v})) = 0 . \text{ Ora poiché } s' \text{ è bilineare}$$

$$s'(f(h\underline{v}) - hf(\underline{v}), f(h\underline{v}) - hf(\underline{v})) =$$

$$= s'(f(h\underline{v}), f(h\underline{v})) - s'(f(h\underline{v}), hf(\underline{v})) - s'(hf(\underline{v}), f(h\underline{v})) + s'(hf(\underline{v}), hf(\underline{v})) .$$

$$\text{Poiché } f \text{ è ortogonale, } s'(f(h\underline{v}), f(h\underline{v})) - s'(f(h\underline{v}), hf(\underline{v})) - s'(hf(\underline{v}), f(h\underline{v})) + s'(hf(\underline{v}), hf(\underline{v})) =$$

$$= s(h\underline{v}, h\underline{v}) - h s'(f(h\underline{v}), f(\underline{v})) - h s'(f(\underline{v}), f(h\underline{v})) + h^2 s'(f(\underline{v}), f(\underline{v})) =$$

$$= s(h\underline{v}, h\underline{v}) - h s(h\underline{v}, \underline{v}) - h s(\underline{v}, h\underline{v}) + h^2 s(\underline{v}, \underline{v}) =$$

$$= h^2 s(\underline{v}, \underline{v}) - h^2 s(\underline{v}, \underline{v}) - h^2 s(\underline{v}, \underline{v}) + h^2 s(\underline{v}, \underline{v}) = 0 .$$

Analogamente si procede per la prima uguaglianza, provando che

$$s'(f(\underline{v} + \underline{w}) - (f(\underline{v}) + f(\underline{w})), f(\underline{v} + \underline{w}) - (f(\underline{v}) + f(\underline{w}))) = 0$$

(Quanto detto sopra dipende dal fatto che un vettore è uguale al vettore nullo $\Leftrightarrow$ il prodotto scalare del vettore per se stesso è uguale a 0).

2. f è iniettiva:

già sappiamo che f è lineare. Proviamo ora che: f è iniettiva. Vogliamo che:

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V : \underline{v} \neq \underline{w} \Rightarrow f(\underline{v}) \neq f(\underline{w}) \Leftrightarrow f(\underline{v}) - f(\underline{w}) \neq 0 , \text{ infatti:}$$

Considerato $s'(f(\underline{v}) - f(\underline{w}), f(\underline{v}) - f(\underline{w}))$, poiché f è lineare:

$$s'(f(\underline{v}) - f(\underline{w}), f(\underline{v}) - f(\underline{w})) = s'(f(\underline{v} - \underline{w}), f(\underline{v} - \underline{w})) . \text{ Poiché } f \text{ è ortogonale:}$$

$s'(f(\underline{v} - \underline{w}), f(\underline{v} - \underline{w})) = s(\underline{v} - \underline{w}, \underline{v} - \underline{w}) > 0$ essendo s definito positivo e in particolare

$s(\underline{v} - \underline{w}, \underline{v} - \underline{w}) \neq 0$ poiché $\underline{v} - \underline{w} \neq 0$

Poiché anche s' è definito positivo $\Rightarrow f(\underline{v}) - f(\underline{w}) \neq 0 \Rightarrow f$ è iniettiva

□

Inoltre nel caso particolare degli endomorfismi :

Sia $\dim V = n$, si consideri $(V_n(\mathbb{R}), s)$ spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare s .

Inoltre sia $f: V_n \rightarrow V_n$ un'applicazione ortogonale.

Allora f è lineare e iniettiva (per quanto appena visto), ma poiché si sta considerando un'applicazione di uno spazio vettoriale in sé, f è anche suriettiva.

Infatti:

$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n = \dim V_n$ (:dominio);

poiché f è iniettiva $\Rightarrow \dim \ker f = 0 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = n \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = V_n$ (:codominio).

Pertanto f è un automorfismo detto automorfismo ortogonale e si può definire l'insieme

$\operatorname{Aut}^\perp(V_n) = \{f: V_n \rightarrow V_n : f \text{ è un automorfismo ortogonale}\}.$

Considerando tale insieme rispetto alla composizione di applicazioni, si dimostra che

$(\operatorname{Aut}^\perp(V_n), \circ)$ è un gruppo.

Infatti :

$\circ$ è un'operazione interna a $\operatorname{Aut}^\perp(V_n)$, perché :

$\forall f, g \in \operatorname{Aut}^\perp(V_n), g \circ f$ è ortogonale : $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V_n, s((g \circ f)(\underline{v}), (g \circ f)(\underline{w})) = s(g(f(\underline{v})), g(f(\underline{w})))$.

Poiché g è ortogonale, $s(g(f(\underline{v})), g(f(\underline{w}))) = s(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$.

Poiché f è ortogonale, $s(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = s(\underline{v}, \underline{w})$

$\Rightarrow g \circ f$ è ortogonale.

Inoltre,

1. $\operatorname{Aut}^\perp(V_n)$ non è vuoto poiché l'applicazione identica vi appartiene;
2. $\circ$ è associativa ;
3. id_{V_n} è l'elemento neutro ;
4. $\exists$ l'inversa $f^{-1} \forall f \in \operatorname{Aut}^\perp(V_n)$ poiché sono automorfismi e quindi sono biettivi, ma in particolare anche $f^{-1} \in \operatorname{Aut}^\perp(V_n)$, infatti:

presi $\underline{v}'$ e $\underline{w}' \in V_n$, si considera $s(f^{-1}(\underline{v}'), f^{-1}(\underline{w}'))$. Detti $\underline{v} = f^{-1}(\underline{v}')$ e $\underline{w} = f^{-1}(\underline{w}')$

$\Rightarrow f(\underline{v}) = \underline{v}'$ e $f(\underline{w}) = \underline{w}'$.

Da ciò si ha: $s(f^{-1}(\underline{v}'), f^{-1}(\underline{w}')) = s(\underline{v}, \underline{w})$.

Poiché f è ortogonale, $s(\underline{v}, \underline{w}) = s(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = s(\underline{v}', \underline{w}') \Rightarrow f^{-1}$ è ortogonale.

□

È stato visto che, dato uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo, tutte le applicazioni lineari di questo spazio vettoriale corrispondono a spazi di matrici.

Le matrici che corrispondono al gruppo $(\text{Aut}^\perp(V_n), \circ)$ sono le matrici ortogonali ; si dimostra infatti che :

$$(\text{Aut}^\perp(V_n), \circ) \cong (O(n, \mathbb{R}), \times) .$$

Per dimostrare ciò, bisogna premettere che:

Dato $(V_n(\mathbb{R}), s)$, $f: V_n \rightarrow V_n$ è ortogonale $\Leftrightarrow \forall$ riferimento $R=(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ ortonormale $(\perp_u)$, la matrice $A = M_R(f) \in O(n, \mathbb{R})$.

Infatti,

Siano $f: V_n \rightarrow V_n$ ortogonale, $R \perp_u$ ed $A = M_R(f)$.

(È bene ricordare che la matrice associata ad un'applicazione $A \in K_{n,n}$ si costruisce per colonne e che le colonne di una matrice ortogonale formano un sistema ortonormale di $\mathbb{R}^n$).

$$\text{Allora } A \text{ è } \perp \Leftrightarrow \text{le colonne di } A \text{ sono una base ortonormale di } \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \underline{a}^i \cdot \underline{a}^j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Nel caso considerato si ha:

$$A = \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{matrix} \underline{a}^i & \underline{a}^j \\ \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix} \text{ Ma è } \underline{a}^i = C_R(f(\underline{e}_i)) \text{ e } \underline{a}^j = C_R(f(\underline{e}_j)) ,$$

$$\text{perciò, } \underline{a}^i \cdot \underline{a}^j = C_R(f(\underline{e}_i)) \cdot C_R(f(\underline{e}_j))$$

$$\text{Poiché } R \text{ è ortonormale, } C_R(f(\underline{e}_i)) \cdot C_R(f(\underline{e}_j)) = s(f(\underline{e}_i), f(\underline{e}_j)) .$$

$$\text{Poiché } f \text{ è ortogonale } s(f(\underline{e}_i), f(\underline{e}_j)) = s(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$$

$$\text{Ma poiché } R \text{ è ortonormale } \Rightarrow s(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \Leftrightarrow A \text{ è } \perp .$$

Viceversa,

considerata l'applicazione $f: V_n \rightarrow V_n$, supponiamo che $\exists$ un riferimento $R \perp_u : M_R(f) = A \in O(n, \mathbb{R})$.

Allora si prova che f è ortogonale.

Infatti:

$$f \perp \Leftrightarrow f \text{ conserva il prodotto scalare (ovvero la forma bilineare simmetrica } s)$$

$$\Leftrightarrow \forall \underline{v}, \underline{w} \in V_n , s(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = s(\underline{v}, \underline{w}).$$

Per dimostrare tale uguaglianza, si considerino prima di tutto le componenti in R di $\underline{v}$ e di $\underline{w}$:

$C_R(\underline{v})=X$ e $C_R(\underline{w})=Y$, da cui si ricava anche che $C_R(f(\underline{v}))=AX$ e $C_R(f(\underline{w}))=AY$.

Quindi, poiché R è ortonormale, $s(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (AX)^t (AY) = X^t (A^t A) Y$.

Poiché A è ortogonale, $X^t (A^t A) Y = X^t I_n Y = X^t Y$.

Poiché R è ortonormale, $X^t Y = s(\underline{v}, \underline{w})$.

Dunque, f è ortogonale.

Si può ora dimostrare che $(\text{Aut}^+(V_n), \circ) \cong (O(n, \mathbb{R}), \times)$.

Infatti,

Fissato un riferimento ortonormale R , si consideri l'applicazione Ψ_R così definita:

$\Psi_R : f \in \text{Aut}^+(V_n) \rightarrow M_R(f) = A \in O(n, \mathbb{R})$.

Tale applicazione è ben posta e si ha che:

1. Ψ_R conserva l'operazione. Infatti, come è già stato visto,

$$M_R(f \circ g) = M_R(f) \cdot M_R(g);$$

2. Ψ_R è biettiva.

Infatti,

si vede che $\forall A \in O(n, \mathbb{R}), \exists! f \in \text{Aut}^+(V_n) : \Psi_R(f) = M_R(f) = A$.

È noto che, fissata una qualunque matrice quadrata, esiste un unico endomorfismo tale che la matrice considerata è proprio quella associata a tale endomorfismo.

Tuttavia, poiché A è ortogonale, anche f è ortogonale $\Rightarrow f$ è biettiva.

Pertanto Ψ_R è un isomorfismo.

Forme quadratiche

Si consideri lo spazio vettoriale $V(K)$.

Come è già stato visto, una forma bilineare $f : V \times V \rightarrow K$ è lineare rispetto ai due argomenti e può essere simmetrica o alternante.

Considerata ora una forma bilineare simmetrica f ,

si dice forma quadratica associata a f la forma $q: V \rightarrow K$ così definita: $q(\underline{v}) = f(\underline{v}, \underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V$.

Nel caso in cui la $\dim V = n$, si può fissare un riferimento R e ogni forma bilineare si può esprimere in termini di componenti mediante la matrice di Gram della forma in R . Infatti:

In $V_n(K)$, sia $f: V_n \times V_n \rightarrow K$ una forma bilineare.

Fissato il riferimento $R=(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, si può considerare la matrice di Gram di f in R : $G=(f(\underline{e}_i, \underline{e}_j))$.

In particolare, come è già stato visto per il prodotto scalare in generale, si ha che:

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V_n \text{ tali che } C_R(\underline{v}) = X \text{ e } C_R(\underline{w}) = Y \Rightarrow f(\underline{v}, \underline{w}) = X^t G Y.$$

Inoltre, è già noto che G è simmetrica $\Leftrightarrow f$ è simmetrica.

In particolare, nel caso in cui f è simmetrica, la forma quadratica associata sarà : $q(\underline{v}) = X^t G X$:

polinomio omogeneo di secondo grado nelle incognite X .

ESEMPIO:

In $\mathbb{R}^2$, considerata la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, si può scrivere la forma bilineare f .

Considerati i vettori $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, la f si ottiene da:

$$X^t A Y = 2x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 3x_2 y_2.$$

Quindi si ricava anche la forma quadratica associata $q = X^t A X$: $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2$.

OSSERVAZIONE:

Le forme bilineari sono sempre espressioni omogenee di secondo grado in X e Y tali che gli elementi della diagonale principale della matrice associata sono i coefficienti dei termini $x_i y_i$ $\forall i=1, \dots, n$.

Le forme quadratiche, invece, sono espressioni omogenee di secondo grado in X tali che gli elementi della diagonale principale della matrice associata sono i coefficienti dei termini quadratici.

Matrici congruenti

Si vogliono trovare degli invarianti per la forma (ovvero delle proprietà della forma che non variano al variare del riferimento) e scrivere le forme bilineari simmetriche con un'espressione canonica.

Pertanto bisogna innanzitutto vedere come varia la matrice di Gram associata ad una forma bilineare simmetrica al variare del riferimento.

Si considerino $V_n(K)$, e una forma bilineare $f: V_n \times V_n \rightarrow K$.

Fissati i due riferimenti $R=(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, $R'=(\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$, si studia la relazione tra la matrice di Gram di f in R e la matrice di Gram di f in R' : $G=M_R(f)$ e $G'=M_{R'}(f)$.

Sia P la matrice di passaggio da R' a R , ovvero la matrice le cui colonne sono le componenti dei vettori di R' in $R \Leftrightarrow$ le formule di trasformazione delle componenti da R' a R sono $X=PX'$, dove $X=C_R(\underline{v})$ e $X'=C_{R'}(\underline{v})$, avendo considerato il vettore $\underline{v} \in V$.

Si considerino quindi i vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ di componenti rispettivamente X e Y in R e X' e Y' in R' ; allora $f(\underline{v}, \underline{w}) = X^t G Y$.

In termini di componenti in R' , sfruttando la proprietà associativa, si ha:

$$f(\underline{v}, \underline{w}) = X^t G Y = (P X')^t G (P Y') = X'^t (P^t G P) Y' = X'^t G' Y' \Rightarrow \text{la matrice di Gram di } f \text{ in } R' \text{ è : } G' = P^t G P.$$

(Ricordiamo che data un'applicazione lineare f , un riferimento R e la matrice associata A , cambiando riferimento la matrice associata ad f si muta in una matrice simile a quella di partenza: $A' = P^{-1} A P$ dove P è la matrice di passaggio da R' a R).

Si può quindi dare la seguente DEFINIZIONE:

In generale,

$$\forall A, A' \in K_{n,n}, A \text{ e } A' \text{ sono congruenti} \Leftrightarrow \exists P \in GL(n, K) : A' = P^t A P.$$

Potremo allora dire che le matrici di Gram di una stessa forma bilineare in due diversi riferimenti sono congruenti.

Si prova che la congruenza è una relazione di equivalenza; infatti:

1. è riflessiva : $A = (I_n)^t A I_n$;
2. è simmetrica : $A' = P^t A P \Leftrightarrow A = (P^t)^{-1} A' P^{-1} = (P^{-1})^t A' P^{-1} = B^t A' B$, avendo posto $B = P^{-1} \in GL(n, K)$
3. è transitiva : $A' = P_1^t A P_1$ e $A'' = P_2^t A' P_2 \Rightarrow$

$$A'' = P_2^t (P_1^t A P_1) P_2 = (P_2^t P_1^t) A (P_1 P_2) = (P_1 P_2)^t A (P_1 P_2)$$

Proviamo ora che:

Se $A \in K_{n,n}$ e $B \in GL(n, K)$, allora $r(A) = r(AB) = r(BA)$.

Infatti:

$$r(A) = r(AB) :$$

data A si può considerare $F_A : X \in K^n \rightarrow AX \in K^n$;

data B si può considerare $F_B : X \in K^n \rightarrow BX \in K^n$;

poiché B è invertibile, F_B è invertibile e quindi è un automorfismo.

Allora, considerata AB , $F_{AB} = F_A \circ F_B : X \in K^n \rightarrow A(BX) = (AB)X \in K^n$.

$$\begin{aligned} \text{Quindi, } r(AB) &= \dim \text{Im } F_{AB} = \dim(F_{AB}(K^n)) = \dim((F_A \circ F_B)(K^n)) = \dim(F_A(F_B(K^n))) = \\ &= \dim(F_A(K^n)) = \dim(\text{Im}(F_A)) = r(A) \end{aligned}$$

È bene sottolineare che nella dimostrazione si è tenuto presente che,

poiché F_B è un automorfismo, $F_B(K^n) = K^n$.

Analogamente, $r(A) = r(BA)$:

data A si può considerare $F_A : X \in K^n \rightarrow AX \in K^n$;

data B si può considerare $F_B : X \in K^n \rightarrow BX \in K^n$;

poiché B è invertibile, F_B è invertibile e quindi è un automorfismo.

Allora, considerata BA, $F_{BA} = F_B \circ F_A : X \in K^n \rightarrow B(AX) = (BA)X \in K^n$.

Quindi, $r(BA) = \dim \operatorname{Im} F_{BA} = \dim(F_{BA}(K^n)) = \dim((F_B \circ F_A)(K^n)) = \dim(F_B(F_A(K^n))) =$
 $= \dim(F_A(K^n)) = \dim(\operatorname{Im}(F_A)) = r(A)$

È bene sottolineare che nella dimostrazione si è tenuto presente che, se la dimensione del sottospazio $F_A(K^n)$ è uguale a t , applicando F_B che è un automorfismo, si ottiene un sottospazio di dimensione t , ovvero $\dim(F_B(F_A(K^n))) = t = \dim(F_A(K^n))$.

NOTA:

Matrici simili, essendo legate alla stessa applicazione, hanno per rango la dimensione dello stesso spazio immagine e perciò hanno lo stesso rango.

Come conseguenza di quanto dimostrato, si ha che anche matrici congruenti hanno lo stesso rango, e quindi:

Il rango della matrice di Gram di una forma bilineare non varia se varia il riferimento; tale rango viene chiamato rango della forma e viene detto primo invariante della forma.

In sintesi, due matrici congruenti hanno lo stesso rango, per cui il rango di una matrice di Gram di una forma bilineare non dipende dal riferimento: il rango della forma bilineare verrà definito come rango di una sua matrice di Gram e non dipenderà dal riferimento perché tutte le matrici di Gram della forma bilineare nei vari riferimenti sono congruenti tra loro.