

FORME BILINEARI (Quarta lezione)

Come è già stato visto nella lezione precedente,

dati uno spazio vettoriale di dimensione finita $V_n(K)$, una forma bilineare $f: V_n \times V_n \rightarrow K$ e un riferimento $R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, la matrice di Gram di f in R è la matrice $G = (f(\underline{e}_i, \underline{e}_j))$.

Inoltre, se $R' = (\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$ è un riferimento distinto da R e P è la matrice di passaggio da R' a R , la matrice di Gram di f in R' è $G' = P^t G P$, dove $P \in GL(n, K)$.

Pertanto G e G' sono congruenti.

È stato anche osservato che data $G = (f(\underline{e}_i, \underline{e}_j))$, in termini di componenti rispetto a R si ha che :

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V : C_R(\underline{v}) = X \text{ e } C_R(\underline{w}) = Y \Rightarrow f(\underline{v}, \underline{w}) = X^t G Y.$$

Avendo inoltre dimostrato che matrici congruenti hanno lo stesso rango, si è arrivati a definire il rango di f come $r(G)$. Questo è il primo invariante della forma nel senso che è indipendente dal riferimento scelto.

Infine, data una forma bilineare simmetrica f in $V_n(\mathbb{R})$, è stata data la definizione di forma quadratica associata a f :

$$q: \underline{v} \in V_n \rightarrow f(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}.$$

Riduzione a forma canonica e secondo invariante della forma

Si considerino una forma bilineare simmetrica $f: V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$ e un generico riferimento

$R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$; la matrice di Gram di f in R è la matrice G .

In particolare, poiché f è simmetrica, la matrice G sarà simmetrica reale.

È già noto che una matrice simmetrica reale è ortogonalmente diagonalizzabile,

ovvero, $\exists D$ matrice diagonale, P matrice ortogonale : $D = P^{-1} G P = P^t G P$

(\Leftrightarrow l'endomorfismo $F_G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists$ un riferimento ortonormale R' formato da autovettori di G , e quindi $M_{R'}(F_G)$ è una matrice diagonale, e P è la matrice di passaggio da questo riferimento R' ad R_{nat}).

NOTA:

Si ricorda che:

1. Una matrice $A \in K_{n,n}$ si dice ortogonalmente diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale e la similitudine è realizzata mediante una matrice ortogonale.

2. Un'applicazione f si dice diagonalizzabile se esiste un riferimento R tale che $M_R(f)$ è diagonale, mentre si dice che f è ortogonalmente diagonalizzabile se esiste un riferimento R ortonormale tale che $M_R(f)$ è diagonale; in entrambi i casi R è formato da autovettori.
3. se G è ortogonalmente diagonalizzabile, una matrice ortogonale che la diagonalizza è la matrice P di passaggio da un riferimento ortonormale R' di \mathbb{R}^n formato da autovettori di G al riferimento naturale R (quindi le colonne di R sono gli autovettori di F_G che formano un riferimento ortonormale di \mathbb{R}^n).

Detto ora R' il riferimento di V_n tale che P è matrice di passaggio da R' a R ,

la matrice di Gram di f in R' è la matrice $G' = P^t G P$ ($= P^{-1} G P$ essendo P una matrice ortogonale), ma $P^{-1} G P = D$, per cui $G' = D$, dove:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_t & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

e l'insieme $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t : t \leq n\}$ è lo spettro degli autovalori di G .

Presi allora $\underline{v}, \underline{w} \in V : C_{R'}(\underline{v}) = X$ e $C_{R'}(\underline{w}) = Y$, in R' la forma f avrà espressione:

$$f(\underline{v}, \underline{w}) = X^t D Y = x_1 \lambda_1 y_1 + \dots + x_t \lambda_t y_t = \lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_t x_t y_t.$$

La forma quadratica associata sarà: $q(\underline{v}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_t x_t^2$.

Tale forma può essere detta forma canonica relativa, perché dipendente dal riferimento R da cui si è partiti.

OSSERVAZIONE:

Considerato il riferimento $\overline{R} \neq R$, la matrice di Gram di f in \overline{R} è la matrice \overline{G} congruente a G .

Pertanto $r(\overline{G}) = r(G)$; tuttavia G e \overline{G} non hanno gli stessi autovalori.

Quindi, detto $\{\mu_1, \dots, \mu_s\}$ lo spettro degli autovalori di \overline{G} , si ottiene

$$f(\underline{v}, \underline{w}) = x_1 \mu_1 y_1 + \dots + x_t \mu_s y_t.$$

Considerati:

- $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$: insieme degli autovalori positivi di G

- $\{\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_t\}$: insieme degli autovalori negativi di G

si può costruire la matrice diagonale J ponendo:

$1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_s}$ come elementi della diagonale principale di J delle prime s righe e colonne ;

$1/\sqrt{-\lambda_{s+1}}, \dots, 1/\sqrt{-\lambda_t}$ come elementi della diagonale principale di J delle successive t-s righe e colonne ;

1 come elementi della diagonale principale di J delle ultime n-t righe e colonne.

$$J = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1/\sqrt{\lambda_s} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1/\sqrt{-\lambda_{s+1}} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1/\sqrt{-\lambda_t} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

J è invertibile e inoltre $J^t = J$.

Si può quindi considerare J come matrice di passaggio da un riferimento R'' al riferimento R' .

R'' sarà il riferimento : $R'' = (\underline{e}''_1, \dots, \underline{e}''_n)$ dove:

$$\underline{e}''_1 = 1/\sqrt{\lambda_1} \cdot \underline{e}'_1$$

$$\underline{e}''_2 = 1/\sqrt{\lambda_2} \cdot \underline{e}'_2$$

.....

$$\underline{e}''_s = 1/\sqrt{\lambda_s} \cdot \underline{e}'_s$$

.....

$$\underline{e}''_t = 1/\sqrt{-\lambda_t} \cdot \underline{e}'_t$$

$$\underline{e}''_{t+1} = \underline{e}'_{t+1}$$

.....

$$\underline{e}''_n = \underline{e}'_n$$

(Si noti che R'' non è un riferimento ortonormale in generale).

In termini di componenti rispetto a R'' , si ha:

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V_n : C_{R''}(\underline{v}) = X \text{ e } C_{R''}(\underline{w}) = Y, \text{ si ha: } f(\underline{v}, \underline{w}) = X^t (M_{R''}(f)) Y$$

dove $M_{R''}(f)$ è congruente a D (=G') mediante la matrice J $\Rightarrow M_{R''}(f) = J^t D J$.

Pertanto :

$$f(\underline{v}, \underline{w}) = X^t (M_{R''}(f)) Y = X^t (J^t D J) Y$$

ma, per come è stata scelta J, si ha:

$$J^t D J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Da ciò:

$$f(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{X}^t (J^t D J) \underline{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_s y_s - x_{s+1} y_{s+1} - \dots - x_t y_t$$

$$q(\underline{v}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_t^2 .$$

Tali forme si dicono FORMA CANONICA rispettivamente della forma bilineare f e della forma quadratica q e non dipendono dal riferimento di partenza scelto.

Si è già detto nell'osservazione precedente che cambiando riferimento iniziale $\overline{R} \neq R$, cambiano gli autovalori delle matrici di Gram di f in R e in \overline{R} , ma non il loro numero, poiché il rango delle due matrici non cambia.

Inoltre, si vedrà con il teorema di inerzia di Sylvester che non cambiano il numero s degli autovalori positivi e il numero t-s degli autovalori negativi.

Allora si definiscono s e t-s come Indici di inerzia (o di Sylvester) della forma f (e della forma q) e la coppia (s,t-s) si dice segnatura della forma f (e della forma q) ed è il secondo invariante della forma.

OSSERVAZIONE:

Una forma bilineare simmetrica f è definita positiva se la sua segnatura è del tipo (n,0), ovvero se non ci sono autovalori negativi nè uguali a zero.

ESEMPI:

Sia assegnata in \mathbb{R}^3 la forma bilineare simmetrica $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3 x_2 y_2 + 3 x_1 y_3 + 3 x_3 y_1$

1. Determiniamo rango e segnatura di f:

Fissato il riferimento di \mathbb{R}^3 : $R = R_{nat}$, la matrice di Gram di f in R si ottiene da:

$$f((1,0,0), (1,0,0)) = 0$$

$$f((1,0,0), (0,1,0)) = f((0,1,0), (1,0,0)) = 0$$

$$f((1,0,0), (0,0,1)) = f((0,0,1), (1,0,0)) = 3$$

$$f((0,1,0), (0,1,0)) = 3$$

$$f((0,1,0), (0,0,1)) = f((1,0,0), (0,1,0)) = 3$$

$$f((0,0,1), (0,0,1)) = 0$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Osserviamo che G si può ricavare direttamente dai coefficienti della forma:

g_{ij} = coefficiente del termine $x_i x_j$).

Si ha: $r(f) = r(G) = 3$

Gli autovalori di G si ottengono calcolando:

$$|G - t I| = 0 \Leftrightarrow (3 - t)(t^2 - 9) = 0 \Rightarrow \text{lo spettro di } G \text{ è } \{3, -3\}$$

$$m_a(3) = 2 \text{ e } m_a(-3) = 1$$

Poiché è già noto che f è diagonalizzabile, $m_g(3) = m_a(3)$ e $m_g(-3) = m_a(-3)$,

pertanto la segnatura di f è : (2,1) .

2. Determiniamo ora un riferimento canonico e la forma canonica di f :

si cerca un riferimento R' di \mathbb{R}^3 ortonormale e formato da autovettori di G:

$$V(3) = \{(x,y,x)\} \text{ con } x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow V(3) = \{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0,1,0)\};$$

$$V(-3) = \{(x,0,-x)\} \text{ con } x \in \mathbb{R} \Rightarrow V(-3) = \{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\}.$$

Allora $R' = ((1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0,1,0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}))$ e

la matrice di f in R' è

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

mentre una matrice ortogonale che diagonalizza G è

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

In R' la forma f si scrive : $f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{X}^t D \underline{Y} = 3 x_1 y_1 + 3 x_2 y_2 - 3 x_3 y_3$

La forma canonica di f è:

$$f(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

Per trovare il riferimento canonico R'' bisogna scrivere la matrice J di passaggio tra R'' e

R' :

$$J = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Allora $R'' = (1/\sqrt{3} (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), 1/\sqrt{3} (0,1,0), 1/\sqrt{3} (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}))$