

## Forme bilineari e quadratiche (quinta lezione)

Si considerino

1. uno spazio vettoriale  $V_n(\mathbb{R})$ ;
2.  $f : V_n \times V_n \rightarrow K$  forma bilineare simmetrica;
3.  $q$  la forma quadratica associata.

Proviamo che:

Data una matrice di Gram di  $q$  (o di  $f$ ) :  $G$ , allora, oltre al rango di  $G$ , anche il numero degli autovalori positivi e il numero degli autovalori negativi di  $G$  dipendono solo dalla forma e sono indipendenti dal riferimento scelto.

Si procede per assurdo.

Supposto che esistano due riferimenti canonici per  $q$ ,  $R=(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$  ed  $R'=(\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$ , tali che :  
fissato  $\underline{v} \in V_n$ ,

in termini di componenti rispetto a  $R$  si ha:  $q(\underline{v}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_t^2$  e quindi la segnatura è  $(s, t-s)$ ;

invece in termini di componenti rispetto a  $R'$  si ha:  $q(\underline{v}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 - x_{m+1}^2 - \dots - x_t^2$  e quindi la segnatura è  $(m, t-m)$ .

Si suppone  $m \neq s$  e in particolare (senza ledere la generalità della dimostrazione)  $s > m$ .

Siano  $W = L(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_s)$  e  $T = L(\underline{e}'_{m+1}, \dots, \underline{e}'_n)$ , pertanto  $\dim W = s$  e  $\dim T = n - m$ .

Si ha:  $\underline{v} \in W \Leftrightarrow \underline{v} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_s \underline{e}_s \Leftrightarrow C_R(\underline{v}) = (x_1, \dots, x_s, 0, \dots, 0)$ , dove le ultime  $n-s$  componenti sono nulle.

Analogamente,  $\underline{v}' \in T \Leftrightarrow \underline{v}' = y_{m+1} \underline{e}'_{m+1} + \dots + y_n \underline{e}'_n \Leftrightarrow C_{R'}(\underline{v}') = (0, \dots, 0, y_{m+1}, \dots, y_n)$ , dove le prime  $m$  componenti sono nulle.

Ricordando la relazione di Grassman :  $\dim(W \cap T) = \dim W + \dim T - \dim(W+T)$ , si ha:

$\dim(W+T) \leq n$  poiché  $W+T$  è sottospazio di  $V_n$  ( e questo equivale a dire che :

$-\dim(W+T) \geq -n$  ) :  $\dim(W \cap T) \geq \dim W + \dim T - n = s + (n-m) - n = s - m$ .

Poichè è stato supposto che  $s > m \Rightarrow s - m > 0$ , ma ciò significa che :

$W \cap T \neq \{0\} \Rightarrow \exists \underline{v} \in W \cap T : \underline{v} \neq \underline{0}$ . Calcoliamo ora  $q$  proprio in questo vettore  $\underline{v}$ .

In termini di componenti rispetto a  $R$ , si avrà :  $q(\underline{v}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 > 0$  ;

mentre, in termini di componenti rispetto a  $R'$ , si avrà :  $q(\underline{v}) = -y_{m+1}^2 - \dots - y_t^2 < 0$ .

Ma questo è un assurdo; pertanto  $m = s$ , ovvero la segnatura è indipendente dal riferimento scelto.

Osservazione:

1. Assegnata una forma  $f: V_n \times V_n \rightarrow K$  simmetrica, la forma quadratica associata  $q: V_n \rightarrow K$  è tale che  $q(\underline{v}) = f(\underline{v}, \underline{v})$  e quindi  $q$  si esprime in funzione di  $f$ .

Tuttavia si può anche procedere in modo tale da ricavare  $f$  in funzione di  $q$ .

Infatti, considerati  $\underline{v}, \underline{w} \in V_n$  si osserva che, usando la bilinearità di  $f$ ,

$$q(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}, \underline{v}) + f(\underline{v}, \underline{w}) + f(\underline{w}, \underline{v}) + f(\underline{w}, \underline{w}) = q(\underline{v}) + 2f(\underline{v}, \underline{w}) + q(\underline{w})$$

$$\text{Da cui si ricava che } f(\underline{v}, \underline{w}) = (q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w})) / 2.$$

Tale forma è simmetrica, infatti :

$$f(\underline{v}, \underline{w}) = (q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w})) / 2 = (q(\underline{w} + \underline{v}) - q(\underline{w}) - q(\underline{v})) / 2 = f(\underline{w}, \underline{v}).$$

2. Assegnare una forma bilineare o una forma quadratica equivale ad assegnare una matrice quadrata. Infatti assegnata una matrice  $A$ , si possono considerare la forma quadratica  $X^t A X$ , oppure la forma bilineare  $X^t A Y$ .

In particolare una forma quadratica potrebbe anche essere associata ad una matrice non simmetrica.

Infatti, si consideri il seguente

ESEMPIO:

In  $\mathbf{R}^2$  sia  $q$  la forma quadratica così definita:  $q((x_1, x_2)) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2$ .

∃! forma bilineare simmetrica  $f$  da cui  $q$  proviene ed è

$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 + 5/2 x_1y_2 + 5/2 x_2y_1 + x_2y_2$ , la cui matrice di Gram in  $\mathbf{R}_{\text{nat}}$  è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ che è simmetrica.}$$

Tuttavia la stessa forma  $q$  potrebbe provenire da infinite forme bilineari non simmetriche e quindi essere associata ad infinite matrici. Ad esempio :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dalle quali si ha :}$$

$$X^t B Y = g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 + 5x_2y_1 + x_2y_2;$$

$$X^t C Y = h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + 4x_2y_1 + x_2y_2$$

che come forma quadratica associata hanno ancora la  $f$ .

Per questo motivo una forma quadratica associata si intende sempre come associata ad una forma bilineare simmetrica.

# Quadriche nello spazio

## Spazio affine

Si consideri lo spazio reale (ordinario) di dimensione 3 .

In tale spazio si considerino gli insiemi:  $S = \{ \text{punti} \}$  ,  $\mathcal{L} = \{ \text{rette} \}$  ,  $\mathcal{P} = \{ \text{piani} \}$  .

Allora la terna  $(S, \mathcal{L}, \mathcal{P})$  è lo spazio geometrico, essendo  $S$  un insieme non vuoto e  $\mathcal{L}, \mathcal{P}$  famiglie di parti di  $S$  .

Lo spazio ordinario gode delle seguenti sei proprietà , che permettono di caratterizzarlo come spazio affine di dimensione 3 :

1. Per due punti distinti passa una sola retta

ovvero

$$\forall A, B \in S : A \neq B , \exists ! r \in \mathcal{L} : A, B \in r$$

2. Per tre punti distinti non allineati passa un unico piano

ovvero

$$\forall A, B, C \in S : A, B, C \text{ non giacciono sulla stessa retta}, \exists ! \pi \in \mathcal{P} : A, B, C \in \pi .$$

3.  $\forall \pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P} , \pi_1 \cap \pi_2 = \begin{cases} \Phi \\ \text{retta} \\ \pi_1 = \pi_2 \end{cases}$  (è sufficiente che  $\pi_1$  e  $\pi_2$  abbiano tre punti in comune)

cioè , nello spazio ordinario due piani non si incontrano mai in un solo punto e inoltre si dà la seguente definizione:

$$\pi_1, \pi_2 \text{ si dicono paralleli} : \pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \pi_1 = \pi_2 \text{ oppure } \pi_1 \cap \pi_2 = \Phi$$

4.  $\forall r \in \mathcal{L}, \forall \pi \in \mathcal{P} , r \cap \pi = \begin{cases} \text{retta } r \text{ ( è sufficiente che } r \text{ e } \pi \text{ abbiano due punti in comune)} \\ \Phi \\ \text{un solo punto} \end{cases}$

Da tale proprietà segue che:

Se  $P, Q \in \pi$  , allora la retta  $r$  per  $P$  e per  $Q$  , che per la prima proprietà è unica, è contenuta nel piano  $\pi$  .

OSSERVAZIONE:

Da queste prime quattro proprietà si deduce che

$\forall P \in S, \forall r \in \mathcal{L}: P \notin r$ , allora  $\exists! \pi \in \mathcal{P}: P, r \in \pi$ .

5.  $\forall r \in \mathcal{L} \text{ e } \forall P \in S: P \notin r, \exists! s \in \mathcal{L}: P \in s \text{ e } r//s$

È bene ricordare che:

$\forall r, s \in \mathcal{L}, r//s \Leftrightarrow r=s$  oppure  $\exists \pi \in \mathcal{P}: r, s \subseteq \pi \text{ e } r \cap s = \emptyset$ .

6.  $\forall \pi \in \mathcal{P}, \forall P \in S: P \notin \pi, \exists! \pi' \in \mathcal{P}: P \in \pi' \text{ e } \pi//\pi'$ .

NOTA:

Le proprietà 3 e 4 riguardano l'intersezione di due piani tra loro e di una retta con un piano, mentre le proprietà 5 e 6 riguardano il parallelismo tra rette e tra piani

OSSERVAZIONE:

Il parallelismo tra piani e tra rette è una relazione di equivalenza.

Quando valgono le sei proprietà suddette, lo spazio geometrico viene chiamato spazio affine di dimensione 3 e poiché nello spazio ordinario esse valgono, si può affermare che lo spazio ordinario reale è uno spazio affine tridimensionale.

In particolare, una conseguenza delle sei proprietà è che ogni piano di tale spazio è un piano affine; infatti:

1.  $\exists!$  retta per due punti distinti
2. ogni piano contiene tre punti non allineati
3. data una retta  $r$  e un punto  $P$  non appartenente a  $r$  esiste un'unica parallela a  $r$  per  $P$  (complanare a  $r$ ).

Lo spazio affine reale si può indicare con  $\mathcal{A}(3, \mathbf{R})$ .

Tale spazio affine può essere complessificato e ampliato per arrivare allo spazio proiettivo di dimensione 3 sul campo complesso.

## Spazio affine complessificato

Per complessificare lo spazio affine è necessario introdurre i punti, le rette ed i piani immaginari.

Siano  $R=(O, R_v=(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z))$  ed  $R'=(O', R'_v=(\underline{e}'_x, \underline{e}'_y, \underline{e}'_z))$  due riferimenti e siano  $X' = PX + C$  le formule di passaggio da  $R$  a  $R'$ , dove  $P$  è la matrice di passaggio da  $R_v$  a  $R'_v$  (costruita mettendo come colonne le componenti in  $R'$  dei vettori di  $R$ ) e  $C$  è la matrice colonna formata da  $C_R(O)$ .

Nell'insieme  $I$  delle coppie  $((\alpha, \beta, \gamma), R)$  con  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 - \mathbb{R}^3$  introduciamo la seguente relazione:

$$((\alpha, \beta, \gamma), R) \equiv ((\alpha', \beta', \gamma'), R') \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + C.$$

Tale relazione è di equivalenza: diremo allora che coppie equivalenti individuano lo stesso punto immaginario  $A$  e il punto immaginario  $A$  considerato è identificato dalla classe di equivalenza  $[((\alpha, \beta, \gamma), R)] \equiv$ .

In tal modo, in ogni riferimento  $R'$  si possono determinare le coordinate di  $A$ , che sono date dalla terna  $(\alpha', \beta', \gamma')$  che precede  $R'$  nella coppia  $((\alpha', \beta', \gamma'), R')$ .

Indicato con  $I = \{\text{punti immaginari}\}$ ,  $S^* = S \cup I$  si dice spazio complessificato ed è formato sia dai punti reali e che dai punti immaginari, che si diranno in generale punti complessi.

### OSSERVAZIONE:

In tale spazio complessificato si possono introdurre i vettori complessi, che sono individuati da una coppia di punti complessi; si dice che due coppie distinte di punti complessi individuano lo stesso vettore complesso se la differenza delle coordinate omonime degli estremi è uguale, cioè se i due vettori individuati hanno le stesse componenti.

Inoltre si possono introdurre rette e piani complessi che potranno essere sia reali che immaginari.

Tale argomento non verrà trattato per esteso.

NOTA: Un riferimento si dice reale se l'origine è un punto reale e i vettori del riferimento vettoriale sono vettori reali e quindi anche gli assi coordinati sono rette reali.

Fissato un riferimento reale  $R=(O, R_v=(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z))$ , si possono dare le seguenti definizioni:

1. Un piano  $\pi$  si dice reale se si può rappresentare con un'equazione a coefficienti reali, altrimenti il piano si dice immaginario.  
es:  $\pi : ix + iy + iz = 0$  è reale perché si può anche scrivere  $\pi: x + y + z = 0$
2. Una retta  $r$  si dice reale se è intersezione di due piani reali e quindi se si può rappresentare con un sistema di equazioni a coefficienti reali.

## Coniugio

È già noto che in  $\mathbb{C}$  la relazione di coniugio è un automorfismo ed è l'applicazione così definita:

$$c: a+ib \in \mathbb{C} \rightarrow \overline{a+ib} = a - ib \in \mathbb{C}.$$

Si ha subito che, dato  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z$  è reale  $\Leftrightarrow z = \overline{z}$ .

Si può quindi considerare l'applicazione:  $P(\alpha, \beta, \gamma) \in S^* \rightarrow \overline{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}) \in S^*$ , ovvero

l'applicazione che ad ogni punto complesso associa il suo complesso coniugato.

Allora si ha subito che:

$P$  è reale  $\Leftrightarrow P$  coincide con il suo complesso coniugato.

OSSERVAZIONE:

Un piano reale contiene infiniti punti reali e infiniti punti immaginari.

ESEMPIO:

$\pi: x + y - z = 0$  è reale e contiene, oltre agli  $\infty$  punti reali, anche  $\infty$  punti immaginari, ad esempio

$$P(i, 0, i), P'(i, -i, 0) \in \pi$$

Inoltre,

Dato un piano  $\pi: ax + by + cz + d = 0$ , si dice complesso coniugato di  $\pi$  il piano formato dai punti complessi coniugati dei punti di  $\pi$ . Si vede che il piano complesso coniugato è  $\overline{\pi}$  rappresentato

dall'equazione:  $\overline{a}x + \overline{b}y + \overline{c}z + \overline{d} = 0$ .

Si ha che  $\pi$  è reale  $\Leftrightarrow \pi = \overline{\pi}$

Se  $\pi$  non è reale,  $\pi \cap \overline{\pi} = \begin{cases} \Phi \\ \text{retta reale } r \end{cases}$

Infatti, se l'intersezione è una retta  $r$ , allora  $r \subseteq \overline{\pi} \Rightarrow r \subseteq \pi$ , ma anche  $r \subseteq \overline{\pi} \Rightarrow \overline{r} \subseteq \overline{\overline{\pi}} = \pi$ .

Pertanto anche  $\overline{r} \subseteq \pi \cap \overline{\pi} = r$  e quindi  $r = \overline{r}$ .

Questo comporta che un piano immaginario può contenere infiniti punti reali allineati.