

## CAMBI DI RIFERIMENTO IN $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ (OTTAVA LEZIONE)

È già stato osservato che  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  viene costruito complessificando lo spazio proiettivo reale, analogamente a come era stato fatto per lo spazio affine, aggiungendo punti, rette e piani.

Fissato un riferimento  $R$ , si avrà sempre che:

1. Se  $\pi$  è un piano immaginario,  $\pi$  è distinto dal suo coniugato  $\overline{\pi}$  e, poiché siamo in uno spazio proiettivo,  $\pi \cap \overline{\pi}$  è una retta reale, propria o impropria. Ne segue che:  
Se  $\pi$  è un piano immaginario,  $\pi$  conterrà sempre una retta reale, ovvero esistono sempre infiniti punti reali su  $\pi$ , che potrebbero essere sia propri che impropri.
2. Una retta  $r$  non ha sempre punti reali, in quanto:  
se  $r$  è immaginaria e la sua coniugata è  $\overline{r}$ , allora  $r \cap \overline{r} = \begin{cases} \text{se } r \text{ e } \overline{r} \text{ sono complanari: } P \text{ (proprio} \\ \text{o improprio)} \\ \text{oppure} \\ \text{se } r \text{ e } \overline{r} \text{ sono sghembe: } \emptyset \end{cases}$
3. La coordinazione associata a  $R$  è  $C_R : P \in \hat{S} \rightarrow [(x_1, x_2, x_3, x_4)] \sim \in \frac{\mathbb{C}^4 - \{0\}}{\sim}$

Ricordando che in  $\mathbb{C}^4$  l'insieme dei vettori  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  proporzionali tra loro è un sottospazio vettoriale di dimensione 1, possiamo dire che:

I punti di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  si trovano in corrispondenza biunivoca con i sottospazi vettoriali di  $\mathbb{C}^4$  di dimensione 1;

Le rette di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  si trovano in corrispondenza biunivoca con i sottospazi vettoriali di  $\mathbb{C}^4$  di dimensione 2;

I piani di  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  si trovano in corrispondenza biunivoca con i sottospazi vettoriali di  $\mathbb{C}^4$  di dimensione 3.

Si può da ciò definire uno spazio proiettivo di una generica dimensione:

lo spazio proiettivo numerico di dimensione  $n$  su campo  $K$  sarà:  $\mathbb{P}_n(K) = \frac{\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}}{\sim}$ .

Si dicono punti di tale spazio le classi di equivalenza  $[(x_1, \dots, x_{n+1})] \sim$ .

In esso,

- i punti vengono detti sottospazi proiettivi di dimensione 0;
- le rette vengono dette sottospazi proiettivi di dimensione 1;
- i piani vengono detti sottospazi proiettivi di dimensione 2.

In generale un sottospazio proiettivo di dimensione  $h$  con  $h \leq n$ , sarà identificato con un sottospazio vettoriale di dimensione  $h+1$ .

Per effettuare un cambio di riferimento in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  si procede come segue:

Siano  $R=(O,R_V)$  e  $R'=(O',R'_V)$  due riferimenti reali propri dello spazio affine reale complessificato e siano  $X'=PX + C$  le formule di trasformazione delle coordinate da  $R$  a  $R'$  (in forma non omogenea). Ricordiamo che:

$P$  è la matrice di passaggio da  $R'_V$  a  $R_V$ , quindi  $P \in \mathbb{R}_{3,3}$  e  $|P| \neq 0$ , inoltre

$C$  è il vettore colonna delle coordinate di  $O$  in  $R'$ .

$$\text{Le formule si possono equivalentemente scrivere: } \begin{cases} x' = p_{11}x + p_{12}y + p_{13}z + c_1 \\ y' = p_{21}x + p_{22}y + p_{23}z + c_2 \\ z' = p_{31}x + p_{32}y + p_{33}z + c_3 \end{cases}$$

Per passare alle coordinate omogenee si pone:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}, \quad x' = \frac{x'_1}{x'_4}, \quad y' = \frac{x'_2}{x'_4}, \quad z' = \frac{x'_3}{x'_4}$$

Sostituendo nel sistema precedente queste coordinate, a meno di un fattore  $q$  non nullo, le formule di trasformazione delle coordinate da  $R$  a  $R'$  in forma omogenea sono :

$$\begin{cases} qx' = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3 + c'_1 \\ qy' = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + p_{23}x_3 + c'_2 \\ qz' = p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{33}x_3 + c'_3 \\ qx'_4 = x_4 \end{cases}, \text{ che possono essere scritte come } X' = AX,$$

$$\text{dove } A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & c'_1 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & c'_2 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & c'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

per cui  $|P| = |A| \neq 0$ .

Quindi  $A \in GL(4, \mathbb{R})$ .

Detto  $\mathcal{A}(4, \mathbb{R}) = \{\text{matrici invertibili di } GL(4, \mathbb{R}) \text{ che hanno come ultima riga il vettore } (0 \ 0 \ 0 \ 1)\}$ , si vede facilmente che  $\mathcal{A}(4, \mathbb{R})$  è un sottogruppo del gruppo lineare.

Infatti:

- è stabile rispetto all'usuale prodotto righe per colonne, cioè  $\forall A, B \in \mathcal{A}(4, \mathbb{R}), A \cdot B \in \mathcal{A}(4, \mathbb{R})$  (come si verifica facendo i conti);
- contiene  $I_4$ ,
- $\forall A \in \mathcal{A}(4, \mathbb{R}), A^{-1} \in \mathcal{A}(4, \mathbb{R})$  (come si verifica facendo i conti).

Il gruppo  $\mathcal{A}(4, \mathbb{R})$  si dice Gruppo affine di ordine 4 su  $\mathbb{R}$ .

# LUOGHI GEOMETRICI

## Superficie sferica

In  $\mathcal{A}(3, \mathbb{R})$ , sia  $C$  un punto  $\in S$  e  $r \in \mathbb{R}^+$ .

Si dice superficie sferica di centro  $C$  e raggio  $r$  l'insieme  $S(C,r) = \{P \in S : d(P,C) = r\}$ .

Sia  $R=(O,R_V)$  un riferimento ortogonale monometrico.

In tale riferimento, detti  $C(x_0, y_0, z_0)$  e  $P(x, y, z)$ , si ha:  $d(C,P) = r \Leftrightarrow$

$$|PC| = \sqrt{\overline{PC} \cdot \overline{PC}} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$$

Tale equazione già rappresenta la superficie sferica, tuttavia si può ancora scrivere:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2, \text{ da cui}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0.$$

Posto  $a = -2x_0, b = -2y_0, c = -2z_0, d = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2$ ; si ha:

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$  che è un'equazione di secondo grado in  $x, y, z$  in cui mancano i termini rettangolari ( $xy, xz$  e  $yz$ ) ed i coefficienti di  $x^2, y^2$  e  $z^2$  sono uguali tra loro e diversi da zero.

Viceversa,

data un'equazione del tipo  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ ,

$$\text{posti } x_0 = -\frac{a}{2}, y_0 = -\frac{b}{2}, z_0 = -\frac{c}{2} \text{ e } r^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - d = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d,$$

l'equazione rappresenta una superficie sferica di centro  $C(x_0, y_0, z_0)$  e raggio  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - d}$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0, \text{ essendo } r^2 > 0$$

$$(r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d} > 0).$$

## Intersezione di una superficie sferica con un piano

Sia  $S(C,r)$  una superficie sferica e  $\pi$  un piano.

Allora,  $S(C,r) \cap \pi$

$$= \begin{cases} \emptyset & \text{se } d(C, \pi) > r \\ \{H\} & \text{se } d(C, \pi) = r \text{ (essendo } H = \pi \cap (\text{retta per } C \text{ ortogonale a } \pi)) \\ \infty \text{ punti} & \text{se } d(C, r) < r \end{cases}$$

Si prova che,

se  $d(C,r) < r$ , allora  $S(C,r) \cap \pi$  è una circonferenza del piano  $\pi$  con centro  $H$  e raggio  $r' = \sqrt{r^2 - d}$ .

Infatti:

Siano  $P \in S(C,r) \cap \pi$  e  $H = \pi \cap (\text{retta per } C \text{ perpendicolare a } \pi)$ .

Si considera il triangolo  $CHP$  rettangolo in  $H$ , in cui  $|CP| = r$  e  $|CH| = d = d(C, \pi)$

Pertanto  $d(P,H) = \sqrt{r^2 - d^2} = |PH|$ .

Supposto che  $\exists P' \neq P : |CP'| = r \Rightarrow |HP'| = |HP|$ .

Quindi  $\forall P' \in S(C,r) \cap \pi \Rightarrow d(P',H) = d(P,H) = \sqrt{r^2 - d^2} = r' > 0$ .

Dunque per definizione il luogo  $S(C,r) \cap \pi$  è una circonferenza di centro  $H$  e raggio  $r'$ .

\*

In particolare

Se  $S(C,r) \cap \pi = \begin{cases} \emptyset & \Rightarrow \pi \text{ si dice piano esterno} \\ \{P\} & \Rightarrow \pi \text{ si dice piano tangente} \\ \text{circonferenza} & \Rightarrow \pi \text{ si dice piano secante} \end{cases}$

NOTA:

Data una retta  $s$  e una superficie sferica  $S(C,r)$ ,

$S(C,r) \cap s = \begin{cases} \emptyset & \text{se } d(C,s) > r \Rightarrow s \text{ si dice retta esterna} \\ \{P\} & \text{se } d(C,s) = r \Rightarrow s \text{ si dice retta tangente} \\ \{A,B\} & \text{se } d(C,s) < r \Rightarrow s \text{ si dice retta secante} \end{cases}$

Si può quindi affermare che se  $\pi$  è un piano tangente a  $S(C,r)$  in  $H$ , tutte le rette di  $\pi$  passanti per  $H$  sono tangenti a  $S(C,r)$  in  $H$  e una qualunque retta per  $H$  tangente a  $S(C,r)$  si trova su  $\pi$ .

Infatti, si verifica subito che, se  $s$  è una retta per  $H$  tangente a  $S(C,r)$ , essa:

1. sarà perpendicolare alla retta  $t$  passante per  $C$  e  $H$
2. incontrerà  $S(C,r)$  nel solo punto  $H$
3. apparterrà al piano  $\pi$

Pertanto, una retta  $s$  contenente  $H$  è tangente a  $S(C,r)$  in  $H \Leftrightarrow s$  è perpendicolare alla retta  $t$  per  $C$  e  $H \Leftrightarrow s$  è inclusa nel piano per  $H$  perpendicolare alla retta  $t$ , che è proprio il piano tangente ad  $S(C,r)$  in  $H$ .

\*

In  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ , una superficie sferica deve essere rappresentata da un'equazione omogenea.

Per rendere omogenea l'equazione della superficie sferica precedentemente determinata

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

si opera la seguente sostituzione:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

$$\text{da cui : } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a x_1 x_4 + b x_2 x_4 + c x_3 x_4 + d x_4^2 = 0;$$

ovvero, dette x,y,z,t le coordinate omogenee :

$$x^2 + y^2 + z^2 + a x t + b y t + c z t + d t^2 = 0 .$$

I punti impropri di S(C,r) si trovano dall'intersezione con il piano improprio:

$$S(C,r) \cap (x_4 = 0) = \Gamma : \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$\Gamma$  è una conica del piano improprio detta conica impropria di S(C,r) ; in particolare  $\Gamma$  è una conica reale priva di punti reali, infatti:

se P fosse un punto reale di  $\Gamma$ , P avrebbe coordinate  $(x_1, x_2, x_3, 0)$  che soddisfano l'equazione di S(C,r)  $\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Tuttavia questo è un assurdo, dovendo essere  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 - \{0\}$ .

Pertanto  $\nexists$  punti reali su  $\Gamma \Rightarrow \Gamma$  è totalmente immaginaria e non dipende da S(C,r) (poiché a,b,c e d non compaiono nell'equazione di  $\Gamma$ ). Ricordando che i punti impropri di una circonferenza di un piano sono detti punti ciclici, avremo che:

$\Gamma$  è l'insieme di tutti i punti ciclici dello spazio e si dice l'assoluto dello spazio.

### ESEMPIO

Dati i punti A(1,0,1), B(0,1,-1) e C(0,0,1), essi non sono allineati in quanto la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ha determinante non nullo.}$$

Si rappresenta quindi il piano  $\pi$  per tali punti :

si considerano AB(-1, 1, -2), AC(-1, 0, 0) e P(x,y,z) da cui si ricava facilmente  $\pi : 2y + z - 1 = 0$ .

Si vuole quindi rappresentare una superficie sferica S per A, B e C (ne esistono infinite!):

scelto  $O = (0,0,0) : O \notin \pi$  e detta  $x^2 + y^2 + z^2 + a x + b y + c z + d = 0$  la generica equazione della superficie sferica, si impone il passaggio per i quattro punti considerati:

$$\begin{cases} O \in S \Rightarrow d = 0 \\ A \in S \Rightarrow 2 + a + c + d = 0 \\ B \in S \Rightarrow 2 - b + c + d = 0 \\ C \in S \Rightarrow 1 + c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ c = -1 \\ b = -3 \\ a = -1 \end{cases}$$

Pertanto, la superficie sferica S ha equazione:  $x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y - z = 0$ .

Allora l'equazione della circonferenza  $\Gamma$  intersezione di S e  $\pi$  è:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y - z = 0 \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Il centro  $C'$  e il raggio  $r$  di S sono:

$$C' \left( \frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right) = \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ e } r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Il centro H e il raggio  $r'$  di  $\Gamma$  sono :

detta s la retta per H e  $C'$  perpendicolare a  $\pi \Rightarrow s$ :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} + 2t \\ z = \frac{1}{2} + t \end{cases}$$

allora  $H = s \cap \pi \Rightarrow H \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$  e  $r' = d(C, H) = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .