CONI, CILINDRI E SUPERFICI DI ROTAZIONE (NONA LEZ*IONE*)

Coni e Cilindri (ovvero superficie conica e superficie cilindrica)

In $\mathcal{A}(3,\mathbb{R})$, sia D $\subseteq$ S: D $\neq \emptyset$ e sia V un punto : V $\in$ S – D.

Si dice cono di vertice V e direttrice D: $\mathcal{C}(V,D)$ = {punti delle rette per V e P,$\forall$ P $\in$ D}.

In particolare se D è una conica $\Gamma \subseteq \pi$ e V $\notin \pi$, il cono $\mathcal{C}(V,D)$si indica $\mathcal{C}(V,\Gamma)$ e si dice CONO QUADRICO. Le rette passanti per V e P ($\forall$ P $\in$ D) si dicono rette generatrici del cono, mentre la conica Γ è detta direttrice del cono.

Per costruire il cilindro, al posto del punto V si fissa una direzione.

Sia quindi D $\subseteq$ S: D $\neq \emptyset$ e sia g una retta .

Si dice cilindro di direttrice D e generatrici parallele a g : $\mathcal{C}(\delta(g),D)$ = { punti delle rette parallele a g e passanti per P $\in$ D, $\forall$ P $\in$ D }.

In particolare, se D è una conica $\Gamma \subseteq \pi$ e g$\nparallel \pi$, il cilindro si dice CILINDRO QUADRICO (se Γ è una conica degenere il cilindro degenera in piani) .

Fissato un riferimento R=(O,R_V), dati D e V(oppure g), per rappresentare il cono $\mathcal{C}(V,D)$ (o il cilindro $\mathcal{C}(\delta(g),D)$), basta rappresentare le rette per V e per P (o le rette per P parallele a g), dove P$\in$S.

ESEMPI:

1. Fissato il riferimento R=(O,R_V), siano Γ: $\begin{cases} x = 2y^2 \\ z = 0 \end{cases}$ e V(0,0,4).

   Si vuole trovare il cono $\mathcal{C}$ di vertice V e direttrice Γ .

   Il punto P$(\alpha,\beta,\gamma) \in \Gamma \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \alpha = 2\beta^2 \\ \gamma = 0 \end{cases}$

   La retta t per P e V ha equazione t: $\begin{cases} x = \alpha t \\ y = \beta t \\ z = 4 + (\gamma - 4)t \end{cases}$

   essendo il vettore VP$(\alpha,\beta,\gamma - 4)$.

   Pertanto una rappresentazione parametrica del cono è:

$$\begin{cases} x = \alpha t \\ y = \beta t \\ z = 4 + (\gamma - 4)t \\ \alpha = 2\beta^2 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Una rappresentazione ordinaria di $\mathcal{C}$ si ottiene da quella parametrica eliminando i parametri:

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 2\beta^2 \\ z = 4 - 4t \\ \alpha = \dfrac{x}{t} \\ \beta = \dfrac{y}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ t = \dfrac{4-z}{4} \\ \alpha = \dfrac{4x}{4-z} \\ \beta = \dfrac{4y}{4-z} \\ 2\left(\dfrac{4y}{4-z}\right)^2 - \dfrac{4x}{4-z} = 0 \end{cases}$$

Da cui $\mathcal{C}$: $8\,y^2 + xz - 4x = 0$.

In $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, $\mathcal{C}$: $8\,y^2 + xz - 4xt = 0$.

Inoltre, i punti impropri si ottengono dal sistema :

$$\Gamma_\infty: \begin{cases} 8\,y^2 + xz - 4xt = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\,y^2 + xz = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Nel caso considerato quindi Γ_∞ è una conica reale non degenere con punti reali.

2. Fissato il riferimento R=(O,R$_V$), siano Γ: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

e $\underline{v}(1,0,1) = \delta(g)$, direzione della retta g: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$

Il punto P$(\alpha, \beta, \gamma) \in \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$

La retta t per P parallela a $\underline{v}$ ha equazione t: $\begin{cases} x = \alpha + t \\ y = \beta \\ z = \gamma + t \end{cases}$

Pertanto una rappresentazione parametrica del cilindro è:

$$\begin{cases} x = \alpha + t \\ y = \beta \\ z = \gamma + t \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ z = t \\ \alpha = x - t = x - z \\ \beta = \gamma \\ (x-z)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Da cui, eliminando i parametri, $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 1 = 0$

In $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - t^2 = 0$

I punti impropri si ottengono dal sistema :

$$\Gamma_\infty : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Nel caso considerato quindi Γ_∞ è una conica degenere e si può scrivere:

$$\Gamma_\infty : \begin{cases} (x-z)^2 + y^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(x-z) + iy][(x-z) - iy] = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Gamma_\infty : \begin{cases} (x-z) + iy = 0 \\ t = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} (x-z) - iy = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

NOTA: Si vedrà in seguito che nel caso di un cilindro, Γ_∞ sarà sempre degenere.

Superfici di rotazione

Dati un insieme $X \subseteq S$ e una retta a, la superficie ottenuta ruotando X intorno all'asse a è formata dai punti delle circonferenze descritte dai punti di X in rotazione attorno ad a $\Leftrightarrow \forall P \in X$, P descrive la circonferenza del piano π per P e ortogonale ad a, circonferenza che ha centro in $H = \pi \cap a$ e raggio $r = d(P,H)$.

Nel caso in cui X è l'insieme dei punti che formano una retta non perpendicolare ad a, si parla di superficie quadrica.

Fissato un riferimento $R=(O,R_V)$, una rappresentazione della superficie di rotazione sopra considerata si ottiene rappresentando le circonferenze descritte dai punti in rotazione. Tali circonferenze vengono dette Circonferenze Generatrici.

ESEMPIO:

Si vuole rappresentare la superficie ottenuta dalla rotazione della retta r attorno all'asse x, con

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

In particolare, r non è perpendicolare all'asse x, infatti, scritta r nella forma:

$$r : \begin{cases} y = t \\ z = 2t \\ x = 1 - t \end{cases}$$

si osserva che il vettore direzione di r: v(−1,1,2) non è

perpendicolare a (1,0,0).

Pertanto , si può considerare il punto P ϵ r ⇔ P(1 − t, t, 2t).

La circonferenza descritta da P si ottiene dall'intersezione di π e di S(C,r), dove π è il piano per P perpendicolare ad a e S(C,r) è una superficie sferica passante per la circonferenza avente centro C su a e raggio r = d(C,P), essendo C un punto fissato (a piacere).

Perciò, π: $x = x_P = 1 - t$

Scelto C = O (0,0,0), r = d(O,P) => S(C,r) : $x^2 + y^2 + z^2 = (1 - t)^2 + t^2 + 4t^2$.

Una rappresentazione parametrica della superficie di rotazione è pertanto:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ x^2 + y^2 + z^2 = (1 - t)^2 + 5t^2 \end{cases}$$

Una rappresentazione ordinaria, si può ottenere da tale rappresentazione parametrica eliminando il parametro t , per cui S: $5x^2 - y^2 - z^2 - 10x + 5 = 0$