QUADRICHE (*DECIMA LEZIONE)*

In $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, fissato un riferimento $R=(O,R_V)$ reale e proprio, una quadrica è Q={punti dello spazio le cui coordinate in R sono le soluzioni di un'equazione omogenea di 2° grado non identica in 4 incognite} : $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$.

NOTA:

Dato un polinomio $f: (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \rightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}$,

f definisce una forma quadratica di $\mathbb{C}^4$.

Nel riferimento naturale di $\mathbb{C}^4$, detta A la matrice di Gram di f e detta σ la forma bilineare da cui f proviene, f: X^tAX e σ: Y^tAX.

Ricordando che la forma bilineare è simmetrica, anche A sarà simmetrica $\Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}$.

Da ciò si deduce che Q è una quadrica$\Leftrightarrow$ le coordinate dei punti di Q sono zeri della forma quadratica $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$.

Quindi un'altrettanto valida definizione di quadrica è:

Q = {punti dello spazio le cui coordinate in R sono zeri di una forma quadratica su $\mathbb{C}^4$}.

Allora A (matrice di Gram di f in R_V) verrà detta matrice associata alla quadrica nel riferimento R.

ESEMPIO

Fissato il riferimento R, si consideri Q: $x_1^2 + 2x_1x_3 - x_3^2 + x_1x_4 + 2x_4^2 = 0$.

Quindi :

1. f: $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \rightarrow x_1^2 + 2x_1x_3 - x_3^2 + x_1x_4 + 2x_4^2 \in \mathbb{C}$
2. $\sigma(\,(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)\,) = x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_3y_3 + \frac{1}{2}x_1y_4 + \frac{1}{2}x_4y_1 + 2x_4y_4$

   dove σ è la forma bilineare da cui si può ricavare Q.
3. A , che è la matrice di Q in R e la matrice di Gram di σ in R, è :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE:

Una forma bilineare σ di uno spazio vettoriale $V_n(K)$ si dice degenere $\Leftrightarrow$ il suo rango è minore di quello massimo: $r(\sigma)< n$.

Ovvero, se A è la matrice di Gram di σ in un generico riferimento R fissato,

σ è degenere ⇔ r(A) < n.

Una forma quadratica f di $V_n(K)$ si dice degenere ⇔ è degenere la forma bilineare da cui f proviene.

Quindi, fissato un riferimento R,

una quadrica Q: $X^tAX = 0$ si dirà degenere ⇔ la forma quadratica f: $X^tAX = 0$ da cui proviene è degenere ovvero se r(A) < 4 (essendo f definita in $\mathbb{C}^4$).

Bisogna ora osservare che la definizione di quadrica (ed anche le altre definizioni date) è ben posta, essendo indipendente dal riferimento fissato; infatti:

se Q: $X^tAX = 0$ nel riferimento R, considerato un riferimento R´ di $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ reale, proprio e distinto da R, si ha che:

dette X = BX´ le formule di trasformazione delle coordinate da R´ a R, allora l'equazione di Q in R´ si ottiene considerando: $(BX')^t\ A\ (BX') = 0 \rightsquigarrow (X')^t\ (B^tAB)\ X' = 0$ che è una forma quadratica poiché, posto $A' = B^tAB$, $(X')^t\ A'\ X' = 0$ è omogenea di 2° grado non identica, essendo r(A´)=r(A).

Come conseguenza di quanto detto, si ha:

1. La definizione di quadrica è ben posta: Q è rappresentato da un'equazione di 2° grado in 4 incognite non identica in qualsiasi riferimento;
2. r(A) = r(A´) indipendentemente dal riferimento scelto , ∀A,A´ matrici di Gram in due riferimenti distinti => le definizioni di quadrica degenere e non degenere sono ben poste;
3. se |A| = 0 => |A´| = 0 e, in particolare, $|A'| = |B^tAB| = |B^t|\,|A|\,|B| = |B|^2|A|$ => |A´| e |A| sono concordi.

OSSERVAZIONE

Sono quadriche:

1. superficie sferica;
2. cono quadrico e cilindro quadrico;
3. un piano :

   Dato un piano π: $ax + by + cz + dt = 0$,

   l'equazione omogenea di 2° grado $(ax + by + cz + dt)^2 = 0$ rappresenta una quadrica degenere;
4. l'unione di due piani:

   Dati π: $ax + by + cz + dt = 0$ e π´: $a'x + b'y + c'z + d't = 0$

L'equazione omogenea di 2° grado $(ax + by + cz + dt)(a'x + b'y + c'z + d't) = 0$ rappresenta una quadrica degenere.

*

Fissato un riferimento R, una quadrica Q: $X^tAX = 0$ si dice reale ⇔ Q può essere rappresentata in R mediante un'equazione a coefficienti reali ,ovvero se e solo se ∃ A reale tale che Q: $X^tAX = 0$ e quindi se e solo se la forma quadratica f : $\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}x_ix_j$ è reale .

Tra le quadriche reali, esistono:

a. quadriche non degeneri con infiniti punti reali.
   Ad esempio: $x^2 + y^2 - z^2 + t^2 = 1$
b. quadriche prive di punti reali.
   Ad esempio: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$, ricordando che la soluzione (0,0,0,0) non è accettabile;
c. quadriche che hanno infiniti punti reali (che formano una retta) e infiniti punti immaginari.
   Ad esempio: $Q: y^2 + z^2 = 0$; i punti reali sono tutti e soli i punti dell'asse x , quindi sono i punti del tipo (h,0,0,1) . In particolare Q è l'unione di due piani immaginari:

   $$\begin{cases} y + iz = 0 \\ y - iz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ 2iz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ : asse x}$$

   Perciò Q ha infiniti punti reali appartenenti all'asse x e infiniti punti immaginari ;
d. quadriche con un solo punto reale.
   Ad esempio: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; l'unico punto reale è P(0,0,01) .

DEFINIZIONE:

Q si dice riducibile ⇔ Q = π ∪ π´ con π ≠ π´ oppure π = π´, ovvero se e solo se la forma f si scompone nel prodotto di due polinomi omogenei di 1° grado in 4 incognite che possono essere sia uguali che distinti.

Intersezione di una quadrica con un piano

Fissato un riferimento R , siano Q: $X^tAX = 0$ una quadrica e π un piano reale.

Proviamo che:

$$Q \cap \pi = \begin{cases} \pi \text{ (cioè } \pi \subseteq Q) \\ \text{oppure} \\ \Gamma: \Gamma \subseteq \pi \text{ è una conica che può essere non degenere oppure degenere in una o due rette} \end{cases}$$

Infatti:

Sia $\pi \not\subseteq Q$ e consideriamo $Q \cap \pi$

I CASO : $\pi = \pi_\infty$

Se π è il piano improprio, $\pi = \pi_\infty$: $x_4 = 0$, allora

$$Q \cap \pi = \begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{44}x_4^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{13}\,x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Poiché si è ottenuta un'equazione omogenea di 2° grado in 3 incognite non identica, essa rappresenta una conica di π_∞, Γ_∞ che è detta conica impropria di Q.

II CASO: $\pi \neq \pi_\infty$

Se π è un piano proprio, si fissa un riferimento R in cui il piano π coincide con il piano xy, per cui π: $x_3 = 0$.

Allora,

$$Q \cap \pi = \begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{14}\,x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + a_{44}x_4^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

anche in tal caso si ottiene un'equazione omogenea di 2° grado in 3 incognite non identica, che quindi rappresenta una conica Γ del piano π.

*

Come conseguenze di quanto detto, ricordando che una conica Γ che contiene una retta è degenere, e inoltre, che una conica degenere si spezza in una o due rette, si ha che:

1. se $\exists$ tre rette $\subseteq (Q \cap \pi)$, $Q \cap \pi = \pi$ e quindi $\pi \subseteq Q$;
2. se $\exists$ una retta $r \subseteq (Q \cap \pi)$ e se $\pi \not\subseteq Q$, $\Gamma = (Q \cap \pi)$ è degenere.

Intersezione di una quadrica con una retta

Fissato un riferimento R , siano Q: $X^tAX = 0$ una quadrica e r una retta per A(Y) e B(Z).

L'equazione di r si può anche scrivere r : $X = \lambda Y + \mu Z$ con $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$.

Allora:

$$Q \cap r = \begin{cases} \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}x_ix_j = 0 \\ x_i = \lambda y_i + \mu z_i\,, \qquad \forall i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

Da tale sistema si ottiene l'equazione omogenea di 2° grado in λ e μ :

$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}(\lambda y_i + \mu z_i)(\lambda y_j + \mu z_j) = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{4}(a_{ij}\lambda^2 y_i y_j + \lambda\mu a_{ij} y_i z_j + \mu\lambda a_{ij} z_i y_j + \mu^2 a_{ij} z_i z_j) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2(\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} y_i y_j) + \lambda\mu(\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} y_i z_j) + \lambda\mu(\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} z_i y_j) + \mu^2(\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} z_i z_j) = 0$

Posto

- $\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} y_i y_j = Y^t AY = a$;
- $\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} y_i z_j = Y^t AZ = Z^t AY = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} z_i y_j = b$ (si ricorda che $Y^t AZ = (Y^t AZ)^t$ essendo una matrice quadrata di ordine 1; inoltre, essendo A simmetrica, $(Y^t AZ)^t = Z^t AY$);
- $\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} z_i z_j = Z^t AZ = c$;

si può scrivere :

$\lambda^2 a + 2\,\lambda\mu\, b + \mu^2 c = 0$ che è un'equazione omogenea di 2° grado.

Se tale equazione è identica, $a = b = c = 0$=> ogni coppia(λ, μ) è soluzione .

Perciò r $\subseteq$ Q => r$\cap$Q = r.

Se l'equazione non è identica, essa ammette due soluzioni e, in particolare,

$$\text{Se}\quad \frac{\Delta}{4} = (\frac{b}{2})^2 - ac = \begin{cases} = 0 \Rightarrow \exists! \text{ soluzione } P(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \Rightarrow r \cap Q = \{P\} \\ \neq 0 \Rightarrow \exists \text{ due soluzioni distinte e non proporzionali: } \\ \qquad P_1(\lambda_1, \mu_1) \text{ e } P_2(\lambda_2, \mu_2) \Rightarrow r \cap Q = \{P_1, P_2\} \end{cases}$$

In sintesi,

$$Q \cap r = \begin{cases} r \Leftrightarrow r \subseteq Q \\ \quad\text{oppure} \\ \text{due punti distinti} \\ \quad\text{oppure} \\ \text{due punti coincidenti} \Leftrightarrow \text{un solo punto} \end{cases}$$

Come conseguenza di quanto detto si ha che:

se r $\cap$ Q $\supseteq\{P_1,P_2,P_3\}$, con $P_1 \neq P_2 \neq P_3$, ovvero | r $\cap$ Q | ≥ 3 => r $\subseteq$ Q .