GRUPPO STRUTTURALE DELLO SPAZIO PROIETTIVO

(TREDICESIMA LEZIONE)

Si vuole costruire un automorfismo di $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, partendo da un automorfismo (vettoriale) di $\mathbb{C}^4$:

f: $X \in \mathbb{C}^4 \rightarrow AX \in \mathbb{C}^4$, dove $A \in GL(4, \mathbb{C})$ ed è la matrice di f nel riferimento naturale di $\mathbb{C}^4$.

Si considera allora l'applicazione:

$\omega_f : [x]_\sim \in \frac{\mathbb{C}^4 - \{0\}}{\sim} \rightarrow [f(x)]_\sim \in \frac{\mathbb{C}^4 - \{0\}}{\sim}$

Tale applicazione è ben posta , ovvero è indipendente dal rappresentante, infatti:

se $y \in [x]_\sim \Rightarrow f(y) \in [f(x)]_\sim \Leftrightarrow [f(y)]_\sim = [f(x)]_\sim$, infatti

se $y = \rho x \Rightarrow f(y) = f(\rho x) = \rho f(x)$.

Quindi ω_f può essere vista come applicazione di $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ in sé.

Dunque fissato il riferimento R, ω_f: $P([x]) \rightarrow P'([f(x)])$ è un automorfismo (proiettivo) di $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$.

Infatti:

ricordando che nello spazio proiettivo

- i punti si trovano in corrispondenza biunivoca con i sottospazi vettoriali di dimensione 1;
- le rette si trovano in corrispondenza biunivoca con i sottospazi vettoriali di dimensione 2;
- i piani si trovano in corrispondenza biunivoca con i sottospazi vettoriali di dimensione 3;

e poiché f è un automorfismo (muta sottospazi vettoriali in sottospazi di uguale dimensione ed è biettiva), allora ω_f muta rette in rette, piani in piani ed è biettiva.

In particolare, ω_f è:

- iniettiva : se $P([x]) \neq Q([y])$ => $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono indipendenti=> poiché f è un automorfismo, anche f($\underline{x}$) e f($\underline{y}$) sono indipendenti =>$\omega_f(P) \neq \omega_f(Q)$;
- suriettiva: dato $P'([y])$, ∃! $\underline{x}$:f(x) = y e detto $P([x])$ => $\omega_f(P) = P'$.

*

L'applicazione ω_f: $P([X]) \rightarrow P'([AX])$ si dice proiettività o omografia

e in termini di coordinate le equazioni di ω_f sono:

$X' = \rho AX$ con $\rho \neq 0$.

NOTA: Al posto di ω_f si può scrivere ω_A.

OSSERVAZIONE:

Tra il gruppo degli automorfismi vettoriali e il gruppo lineare c'è una corrispondenza biunivoca.

Nel caso delle proiettività, invece, poiché è presente il fattore non nullo ρ, da matrici proporzionali si ottiene la stessa applicazione e quindi c'è corrispondenza biunivoca solo con il gruppo lineare quozientato rispetto alla proporzionalità.

*

Se la matrice A è reale, si può parlare di omografia reale di $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$.
Si può allora dire che un'omografia reale è un'applicazione ω_A dello spazio proiettivo di dimensione 3 in sé tale che, fissato un riferimento, le equazioni sono $X' = \rho\, AX$ con $\rho \neq 0$ e $A \in GL(4,\mathbb{R})$.

Le proprietà invarianti dello spazio proiettivo rispetto alle omografie reali del tipo ω_A si dicono PROPRIETÁ PROIETTIVE e tra queste ricordiamo le seguenti :

- un punto reale viene mutato in un punto reale;
- una retta viene mutata in una retta;
- un piano viene mutato in un piano;
- una quadrica reale viene mutata in una quadrica reale;
- una quadrica con punti reali viene mutata in quadrica con punti reali;
- una quadrica priva di punti reali viene mutata in quadrica priva di punti reali;
- una quadrica Q riducibile viene mutata in una quadrica riducibile;
- i punti doppi vengono mutati in punti doppi.

Tuttavia un'omografia reale non conserva i punti propri e impropri perché tale caratterizzazione dipende dalla quarta coordinata del punto, che in generale non è conservata.

Le proiettività formano un gruppo e la geometria che studia le proprietà proiettive si chiama geometria proiettiva.

Tra le omografie scegliamo ora quelle in cui la matrice A è del tipo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e poniamo $\mathcal{A}(4,\mathbb{C}) = \{A = \begin{pmatrix} & & & a_{14} \\ & A' & & a_{24} \\ & & & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.

In particolare $\mathcal{A}$ (4,ℂ) rispetto al prodotto righe per colonne forma un gruppo che è sottogruppo di GL(4,ℝ) ed è detto GRUPPO AFFINE di $\mathbb{P}_3$(ℂ).

Poiché A ϵ GL(4,ℝ) , la matrice A´ = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ϵ GL(3,ℝ) e | A´ | = | A |.

Si verifica facilmente che, l'omografia ω_A che deriva dalla matrice A ϵ $\mathcal{A}$ (4,ℂ), conserva anche i punti propri e impropri.

Si può quindi dare la seguente definizione:

si dicono PROPRIETÀ AFFINI di $\mathbb{P}_3$(ℂ) le proprietà invarianti per le omografie del tipo di ω_A con A ϵ $\mathcal{A}$ (4,ℂ).

OSSERVAZIONE:

$\mathcal{A}$ (4,ℂ) è un gruppo.

Infatti:

- prese A, B ϵ $\mathcal{A}$ (4,ℂ) => C= AxB = $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ϵ $\mathcal{A}$ (4,ℂ)

  e quindi l'insieme è chiuso rispetto alla moltiplicazione righe per colonne.
- Il prodotto righe per colonne è sempre associativo.
- ∃ l'elemento neutro: I ϵ $\mathcal{A}$ (4,ℂ)
- Presa A ϵ $\mathcal{A}$ (4,ℂ) => A^{-1} = $\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$, ma $A_{14} = A_{24} = A_{34} = 0$ e

  $A_{44} = |A'|$

  => $\frac{A_{44}}{|A|} = 1 => A^{-1} \epsilon$ $\mathcal{A}$ (4,ℂ)

  e, quindi, ∃ inverso di ogni elemento.

*

Le proprietà delle quadriche reali che si studieranno nel seguito sono le proprietà invarianti rispetto a tali affinità.

QUADRICHE REALI

Fissato un riferimento reale e proprio R, sia Q: X^tAX con $A \in \mathbb{R}_{n,n}$.

OSSERVAZIONE:

Se Q è degenere, i suoi punti doppi sono reali e quindi una quadrica reale degenere ha sempre punti reali.

Infatti, i punti doppi si trovano come soluzioni del sistema omogeneo a coefficienti reali AX = 0 e quindi tali punti appartengono a $\mathbb{R}^4$.

*

Classificazione affine delle quadriche degeneri

- se r(A) = 1, Q = π con π reale e con punti reali;

- se r(A) = 2, Q = π ∪ π´ con π ≠ π´ e π, π´: $\begin{cases} entrambi\ reali: \begin{cases} \pi \parallel \pi' \\ oppure \\ \pi \cap \pi' = r\ propria \end{cases} \\ oppure \\ immaginari\ coniugati \end{cases}$;

- se r(A) = 3, ∃! punto doppio V, e Q è

$$\begin{cases} cono \quad se\ V\ \text{è}\ proprio \begin{cases} a\ falda\ reale\ se\ le\ generatrici\ sono\ rette\ reali \\ oppure \\ a\ falda\ immaginaria\ se\ le\ generatici\ sono\ rette\ immaginarie \\ (in\ tal\ caso\ \exists!\ punto\ reale: il\ vertice) \end{cases} \\ oppure \\ cilindro \quad se\ V\ \text{è}\ improprio \Rightarrow V \in \pi_\infty, Q \cap \pi_\infty = \Gamma_\infty degenere;\ \Gamma_\infty: \begin{cases} due\ rette\ reali\ distinte \Rightarrow Q: cilindro\ iperbolico \\ una\ retta\ reale \Rightarrow Q: cilindro\ parabolico \\ due\ rette\ immaginarie\ coniugate \Rightarrow Q: cilindro\ ellittico \end{cases} \end{cases}$$

ESEMPI:

a) Q: $x^2 + y^2 = 0$ si scompone nei due piani: (x + iy)(x – iy)= 0
b) Q: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xt + t^2 = 0$;

   la matrice associata a tale quadrica è :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   |A| = 0 => Q è degenere.

   In particolare r(A) = 3 => Q è un cono o un cilindro.

   Sia V il vertice di Q, allora V si ottiene dal sistema:

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow V(1,0,0,1).$$

   Poiché V è proprio, Q è un cono.

   È bene notare che l'equazione considerata è quella di una sfera di raggio nullo e centro V.

*

Vedremo ora che:

1) le sezioni piane non degeneri di un cilindro iperbolico sono iperboli;
2) le sezioni piane non degeneri di un cilindro parabolico sono parabole;
3) le sezioni piane non degeneri di un cilindro ellittico sono ellissi.

In particolare proveremo che:

Se Q è un cilindro iperbolico di vertice V, allora $\forall\, \pi : V \notin \pi$, si ha: $Q \cap \pi = \Gamma$ è un iperbole.

Infatti:

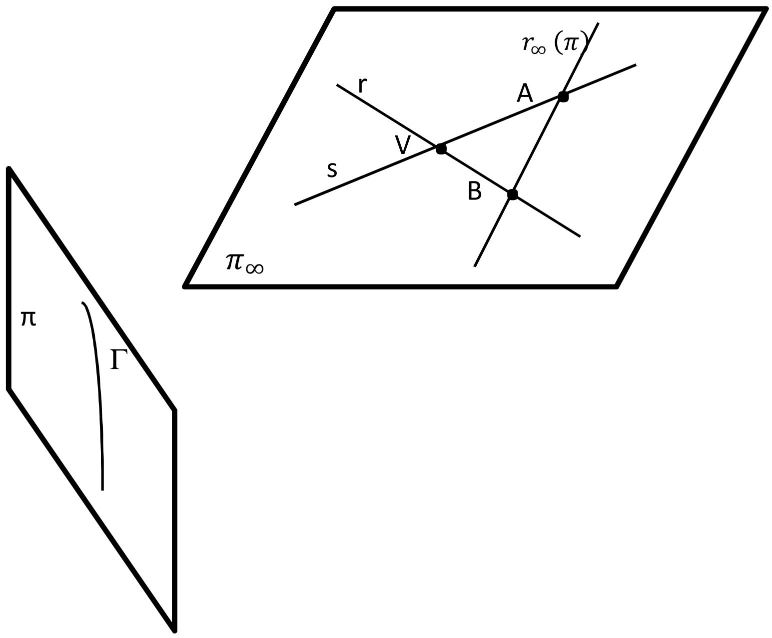
Poiché Q è un cilindro iperbolico $Q \cap \pi_\infty = \Gamma_\infty$ degenere con $\Gamma_\infty = r \cup s$, dove r ed s sono due rette reali e distinte.

Sia $\Gamma = Q \cap \pi$; Γ è reale e non degenere, dato che $V \notin \pi$.

Per classificare Γ si considera:

$\Gamma \cap r_\infty(\pi) = (Q \cap \pi) \cap (\pi \cap \pi_\infty) = (Q \cap \pi_\infty) \cap (\pi \cap \pi_\infty) = \Gamma_\infty \cap r_\infty(\pi)$.

Poiché $V \notin \pi \Rightarrow V \notin r_\infty(\pi) \Rightarrow \Gamma_\infty \cap r_\infty(\pi)$ = due punti reali e distinti => Γ è un'iperbole.



*

Analogamente si procede

per il cilindro ellittico (per cui si avrà che $\Gamma_\infty \cap r_\infty(\pi)$ = due punti immaginari => Γ è un'ellisse) e

per il cilindro parabolico (per cui si avrà $\Gamma_\infty \cap r_\infty(\pi)$ = un punto reale => Γ è una parabola).

Classificazione analitica delle quadriche degeneri

Per studiare le quadriche da un punto di vista analitico si considera A_{44} (come per le coniche viene usato A_{33}).

Data Q: X^tAX , se | A | = 0 e r(A) = 3, si può considerare:

$$Q \cap \pi_\infty = \Gamma_\infty : \begin{cases} \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Si presentano quindi due casi.

Q può essere un cono o un cilindro:

1) Γ_∞ non degenere =>

   Γ_∞ non contiene il vertice =>

   il vertice è un punto proprio =>

   Q è un cono .

   Precisamente,

   a) Γ_∞ ha punti reali => cono a falda reale;

b) Γ_∞ non ha punti reali => cono a falda immaginaria.

2) Γ_∞ degenere =>

Q è un cilindro.

Precisamente,

a) Γ_∞ è l'unione di due rette reali => cilindro iperbolico;

b) Γ_∞ è un sola retta reale => cilindro parabolico;

c) Γ_∞ è l'unione di due rette immaginarie => cilindro ellittico.

Analogamente partendo dall'equazione di Q si stabilisce che:

Poiché la matrice di Q è

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

la matrice associata a Γ_∞ è

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Allora $|A'| = A_{44}$.

Quindi :

$A_{44} \neq 0 \Leftrightarrow \Gamma_\infty$ non degenere $\Leftrightarrow$ Q è un cono , mentre

$A_{44} = 0 \Leftrightarrow \Gamma_\infty$ degenere $\Leftrightarrow$ Q è un cilindro

ESEMPIO:

Sia Q : $x^2 + z^2 - 2xz - 2yt + 2zt = 0$.

1) Classificazione di Q e determinazione di eventuali punti doppi .

Poiché $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| = 0$ e, in particolare, $r(A) = 3$.

Pertanto Q è un cono o un cilindro.

Si studia quindi:

$\Gamma_\infty = Q \cap \pi_\infty : \begin{cases} x^2 + z^2 - 2xz - 2yt + 2zt = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 - 2xz = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - z)^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$

=>Q è un cilindro parabolico.

Il vertice V di Q si ottiene dal sistema AX = 0 : $\begin{cases} x - z = 0 \\ -t = 0 \\ -x + z + t = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} t = 0 \\ x = z \\ y = z \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ V(1,1,1,0).

2) Intersezione di Q con z= 0.

V $\notin$ (z = 0) => Q $\cap$ (z = 0) è una parabola, infatti:

$\begin{cases} x^2 + z^2 - 2xz - 2yt + 2zt = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ => $x^2 - 2yt = 0$ $\Leftrightarrow$ $y = -\frac{x^2}{2}$: parabola del piano xy.

3) Piano tangente nell'origine : π_0 e sua intersezione con la quadrica.

π_0 è il piano tangente a Q in O(0,0,01).

Detto P(Y) un punto semplice di Q, il piano tangente il P si ottiene da:

$Y^tAX = 0$ => π_0: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$ => π_0: $-y + z = 0$

Γ = Q $\cap$ π_o: $\begin{cases} -y + z = 0 \\ x^2 + z^2 - 2xz - 2yt + 2zt = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y = z \\ x^2 - 2xz + z^2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y = z \\ (x - z)^2 = 0 \end{cases}$,

che si spezza nella retta $\begin{cases} y = z \\ x - z = 0 \end{cases}$ contata due volte.

*

È noto che :

dati una quadrica Q non riducibile e un punto semplice P di Q,

$\exists$ π_P = piano tangente a Q in P

e, inoltre,

Q $\cap$ π_P = Γ degenere.

Se Q è reale, Γ è reale.

Pertanto Γ si può spezzare in

$\begin{cases} \text{una sola retta reale } \Rightarrow \text{ P è detto parabolico} \\ \text{due rette } \Rightarrow \text{ P è detto non parabolico } \begin{cases} \text{rette reali } \Rightarrow \text{ P è detto iperbolico} \\ \text{rette immaginarie coniugate } \Rightarrow \text{ P è detto ellittico} \end{cases} \end{cases}$