

QUADRICHE REALI (QUATTORDICESIMA LEZIONE)

Data una quadrica Q reale non riducibile e con punti reali,

si dimostra che :

se Q ha un punto reale semplice parabolico, allora:

- 1) ogni altro punto semplice di Q è parabolico;
- 2) Q possiede un punto doppio (e quindi Q è un cono o un cilindro).

Infatti:

Sia $P \in Q$, parabolico.

Allora si può considerare l'intersezione di Q con il piano tangente a Q in P :

$\pi_P \cap Q = \Gamma$ degenerare, e, in particolare, poiché P è parabolico, Γ è una retta r reale.

OSSERVAZIONE1:

Poiché $\exists \infty$ punti reali di Q su r , ogni punto semplice $A \in r$ è parabolico; infatti:
Sia A un punto semplice di r .

$\pi_A = \pi_P$, perché \forall retta $s \subseteq \pi_P : A \in s$, allora $s \cap Q = \begin{cases} \{A\} \\ oppure \\ s \quad se \ s = r \end{cases}$

(che è proprio la definizione di piano tangente).

Quindi $\pi_A \cap Q = r \Rightarrow A$ è parabolico \Rightarrow tutti i punti semplici di r sono parabolici.

Sia $P' \in Q$: P' è un punto reale per Q e $P' \notin \pi_P$. Allora $P' \notin r$.

Si consideri il piano $\pi = \langle r, P' \rangle$, allora $\pi \cap Q = \Gamma$ degenerare (in quanto $r \subseteq \Gamma$).

In particolare, $\Gamma = r \cup s$, dove s è una retta per P' .

Perciò $s \subseteq Q \Rightarrow V = s \cap \pi_P \in Q \Rightarrow r \cap s = \{V\} : V \neq P$ (perché ogni retta per P contenuta in Q è anche contenuta in π_P , ma s non è contenuta in π_P).

Allora V non è parabolico, perché altrimenti per esso passerebbe un'unica retta contenuta nella quadrica, mentre per P passano due rette della quadrica .

Pertanto, poiché i punti semplici di r sono tutti parabolici, V non è semplice $\Rightarrow V$ è un punto doppio.

NOTA:

Per dimostrare che V è un punto doppio si potrebbe anche ragionare come segue:
siccome tutte le rette per V in π_P godono delle proprietà delle rette tangenti,
il piano tangente in V dovrebbe essere π_P ,
ma allora è assurdo che esista un'altra retta in Q
passante per V non contenuta nel piano tangente.

Pertanto, V non è semplice e non ha piano tangente e quindi è doppio .

Quindi si è arrivati a dire che $\exists V$, punto doppio per Q .

Inoltre P' è un punto parabolico. Infatti, se per P' ci fosse un'altra retta t contenuta nella quadrica e distinta da s , $t \cap \pi_P = \{B\}$ con $B \in Q$. Pertanto $B \in r$ e $\langle r, s, t \rangle \subseteq Q$, ma questo è un assurdo.

Quindi per P' non possono passare due rette della quadrica.

In conclusione:

poiché ogni punto P' della quadrica fuori del piano è parabolico e ogni punto semplice della quadrica che sta sulla retta è parabolico \Rightarrow ogni punto semplice della quadrica è parabolico ed esiste un punto doppio.

*

OSSERVAZIONE 2:

È valido anche il viceversa di quanto dimostrato:

Se Q è un cono o un cilindro di vertice V , tutti i punti di Q sono parabolici.

Infatti:

$\forall P \neq V : P$ è semplice e $P \in Q, \exists \pi_P$

Allora $\pi_P \cap Q =$ rette della quadrica passanti per P , ma

se $\pi_P \cap Q = r \cup s$ con $V \notin s$, si avrebbe che

il piano $\langle s, V \rangle$ sarebbe contenuto in Q ,

che è un assurdo.

Pertanto per P passa una sola retta contenuta nella quadrica $\Rightarrow P$ è parabolico.

In seguito a tale dimostrazione si può scrivere:

Q è un cono o un cilindro \Leftrightarrow i punti semplici di Q sono parabolici.

Sia ora Q una quadrica reale con punti reali non degeneri.

Allora $\forall P \in Q$, P reale, P è semplice e non parabolico, ovvero \exists due rette distinte contenute in Q passanti per P .

Analogamente a quanto visto per i punti parabolici, si prova che:

Se $\exists P_0 \in Q : P_0$ è reale e iperbolico, allora $\forall P \in Q : P$ è reale $\Rightarrow P$ è iperbolico.

Infatti,

Per ipotesi, $\exists P_0 \in Q : \pi_{P_0} \cap Q = r \cup s$ con r, s rette reali e distinte.

Poiché Q è non degeneri, nessun punto di Q è parabolico, per quanto è stato prima dimostrato.

$\forall P \in (r \cup s) - \{P_0\}$, P non è ellittico perché altrimenti per P non dovrebbe passare nessuna retta reale contenuta nella quadrica.

Quindi P è iperbolico.

Sia inoltre $P' \in Q - \pi_{P_0}$.

Si considera il piano $\langle P', r \rangle = \pi$; allora $r, P' \subseteq (\pi \cap Q) \Rightarrow \pi \cap Q = \Gamma$ che è degenera e si spezza nell'unione di due rette, r e t ; ma r è reale $\Rightarrow t$ è reale $\Rightarrow P'$ è iperbolico.

*

Inoltre si prova che:

Se $\exists P_0 \in Q$: P_0 reale e ellittico, allora $\forall P \in Q$: P è reale $\Rightarrow P$ è ellittico.

Infatti,

$\forall P \in Q$, P non può essere parabolico perché Q , avendo un punto ellittico, è non degenera.

$\forall P \in Q$, P non può essere iperbolico, perché altrimenti tutti gli altri punti di Q sarebbero iperbolici, ma per ipotesi c'è un punto ellittico.

Quindi, $\forall P \in Q$: P è reale, P è ellittico.

*

Poiché essere un punto reale è una nozione proiettiva, si è quindi giunti alla seguente classificazione proiettiva:

le quadriche non degeneri dotate di punti reali si dividono in quadriche a punti iperbolici e quadriche a punti ellittici.

NOTA:

Le nozioni proiettive sono quelle conservate da ogni omografia.

Le nozioni affini sono conservate in particolare dalle affinità.

CLASSIFICAZIONE DELLE QUADRICHE

Una classificazione proiettiva delle quadriche non degeneri è:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q \text{ totalmente immaginaria} \Leftrightarrow \text{non ha punti reali} \\ Q \text{ con punti reali} : \left\{ \begin{array}{l} a \text{ punti iperbolici} \\ a \text{ punti ellittici} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dal punto di vista affine, si possono distinguere le quadriche a seconda della loro intersezione con il piano improprio e quindi a seconda dei loro punti impropri.

In particolare $Q \cap \pi_\infty = \Gamma_\infty$: conica impropria di Q (tale conica è stata già usata per classificare coni e cilindri).

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{array}{l} \text{non degeneri priva di punti reali} \Rightarrow Q \text{ ellissoide} \left\{ \begin{array}{l} \text{totalmente immaginario} \\ \text{oppure} \\ \text{con punti reali} \end{array} \right. \\ \text{non degeneri con punti reali} \Rightarrow Q \text{ iperboloidi} \left\{ \begin{array}{l} \text{ellittico: } a \text{ punti ellittici} \\ \Leftrightarrow a \text{ due falde} \\ \text{oppure} \\ \text{iperbolico: } a \text{ punti iperbolici} \\ \Leftrightarrow a \text{ una falda} \end{array} \right. \\ \text{degeneri} \Rightarrow Q \text{ paraboloidi} \left\{ \begin{array}{l} \text{ellittico: } a \text{ punti ellittici} \\ \text{oppure} \\ \text{iperbolico: } a \text{ punti iperbolici} \Leftrightarrow a \text{ sella} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

OSSERVAZIONE:

Γ_∞ è degenere $\Leftrightarrow \pi_\infty$ è tangente a Q .

In particolare, Γ_∞ non può coincidere con una sola retta, perché

- se Γ_∞ si spezza in due rette reali e distinte, il punto di tangenza è iperbolico;
- se Γ_∞ si spezza in due rette immaginarie, il punto di tangenza è ellittico;
- se Γ_∞ si spezzasse in una sola retta, il punto di tangenza sarebbe parabolico, ma i punti parabolici sono caratteristici di coni e cilindri. Tuttavia Q è non degenere, quindi non può essere un cono o un cilindro. Allora Γ_∞ non può essere una sola retta.

*

Nel caso dell'ellissoide non è stata presentata una caratterizzazione partendo dai punti della quadrica perché:

ricordando che

- 1) se Γ_∞ è non degenera senza punti reali, Q si dice ellissoide \Rightarrow un ellissoide possiede solo punti impropri immaginari;
- 2) un punto iperbolico è un punto per cui passano due rette reali contenute nella quadrica;
- 3) se Q contiene una retta reale, Q contiene anche il punto improprio di tale retta e anch'esso sarà reale;

si ha che

un ellissoide non possiede punti impropri reali \Rightarrow non può contenere rette reali \Rightarrow non può avere punti reali iperbolici.

Di conseguenza, i punti reali di un ellissoide sono ellittici.

Inoltre, le sezioni piane non degeneri di un ellissoide sono ellissi.

OVVERO

Sia π un piano non tangente a Q, allora $\pi \cap Q = \Gamma$ non degenera.

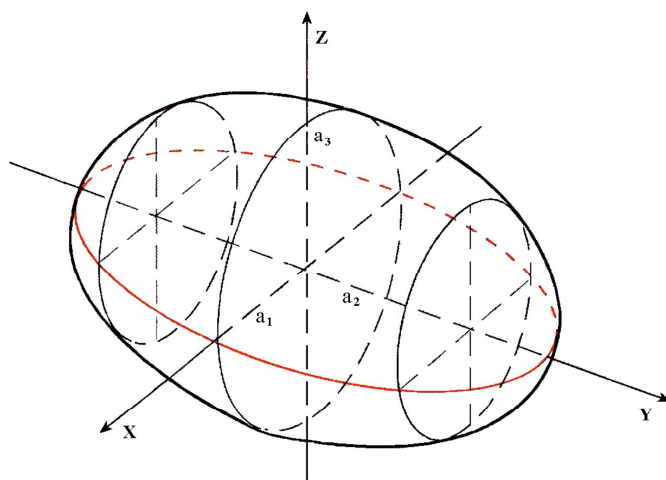
Poiché Γ_∞ ha solo punti immaginari, Γ è un'ellisse.

Infatti,

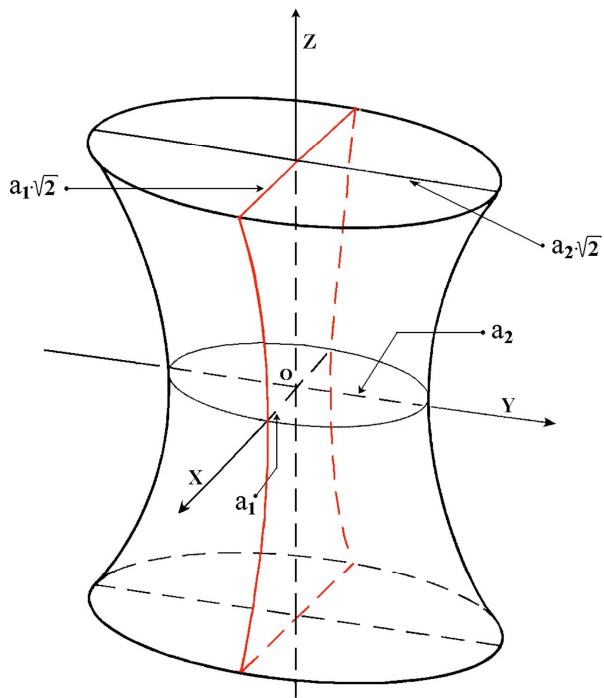
$$\Gamma \cap r_\infty(\pi) = (Q \cap \pi) \cap (\pi \cap \pi_\infty) = (Q \cap \pi_\infty) \cap (\pi \cap \pi_\infty) = \Gamma_\infty \cap r_\infty(\pi)$$

Tuttavia $r_\infty(\pi)$ è reale, mentre Γ_∞ ha solo punti immaginari $\Rightarrow \Gamma_\infty \cap r_\infty(\pi) =$ due punti immaginari $\Rightarrow \Gamma$ è un'ellisse.

*

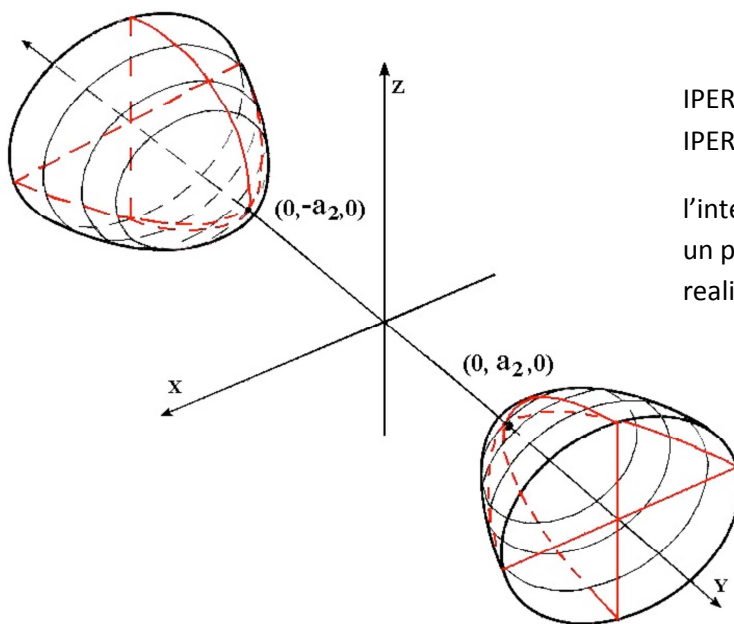


ELLISSOIDE



IPERBOLOIDE IPERBOLICO, oppure
IPERBOLOIDE A UNA FALDA

l'intersezione con un piano tangente
in un punto semplice dà due rette reali

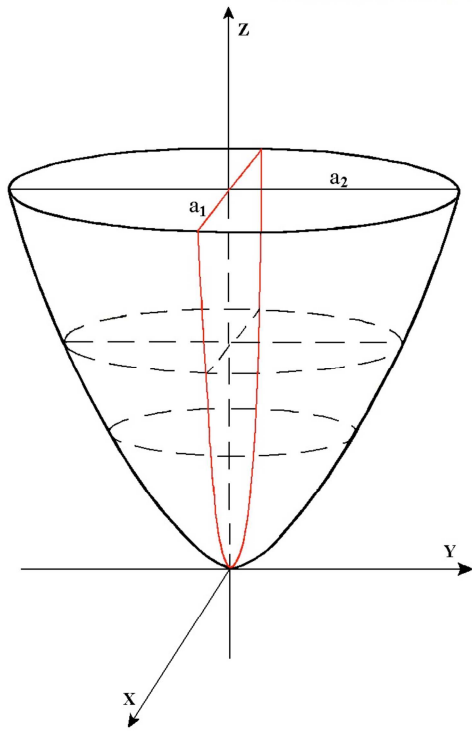


IPERBOLOIDE ELLITTICO, oppure
IPERBOLOIDE A DUE FALDE

l'intersezione con un piano tangente in
un punto semplice non contiene rette
reali

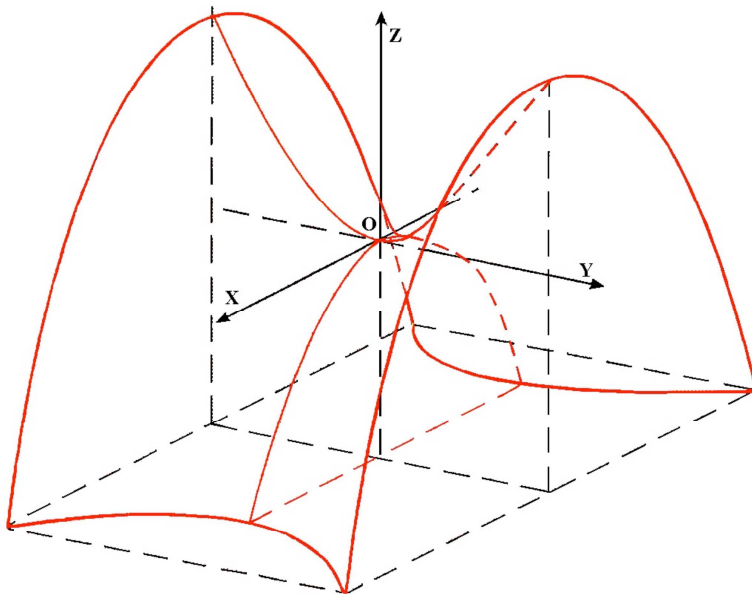
NOTA:

Nel caso dell'iperboloide le sezioni piane non degeneri possono essere sia ellissi, sia iperboli, sia parabole.



PARABOLOIDE ELLITTICO

l'intersezione con un piano tangente
in un punto semplice non contiene
rette reali



**PARABOLOIDE IPERBOLICO, oppure
A SELLA**

l'intersezione con un piano tangente
in un punto semplice contiene due
rette reali

OSSERVAZIONE:

Se Q ha sezioni piane di tipo iperbole,

$$Q \text{ può essere: } \begin{cases} \text{cilindro iperbolico} \\ \text{iperboloide } \begin{cases} \text{ellittico} \\ \text{iperbolico} \end{cases} \\ \text{paraboloide iperbolico} \\ \text{cono} \end{cases}$$

Infatti:

- Un paraboloide ellittico non ha sezioni piane di tipo iperbole :

infatti sul piano improprio ha due rette immaginarie coniugate e un solo punto reale .

Se π è un piano proprio che interseca Q in una conica Γ non degenera, considerato che $r_\infty(\pi) \subseteq \pi_\infty$,

$$\Gamma \cap r_\infty(\pi) = \begin{cases} \text{due punti immaginari coniugati} \Rightarrow \text{le sezioni sono ellissi} \\ \text{oppure} \\ \text{un punto reale} \Rightarrow \text{le sezioni sono parabole} \end{cases} .$$

- L'ellissoide può avere solo ellissi come sezioni piane perché all'infinito non ha punti impropri reali essendo Γ_∞ non degenera priva di punti reali.

Tra le coniche degeneri, poi:

- Un piano e due piani non fanno parte delle quadriche che hanno sezioni piane di tipo iperbole (le sezioni piane di un piano sono rette).
- Un cilindro ellittico o parabolico non ha sezioni piane di tipo iperbole.

*

SCHIERE DI RETTE DI UNA QUADRICA NON DEGENERE

Siano Q una quadrica reale non degenera e P un punto reale di Q .

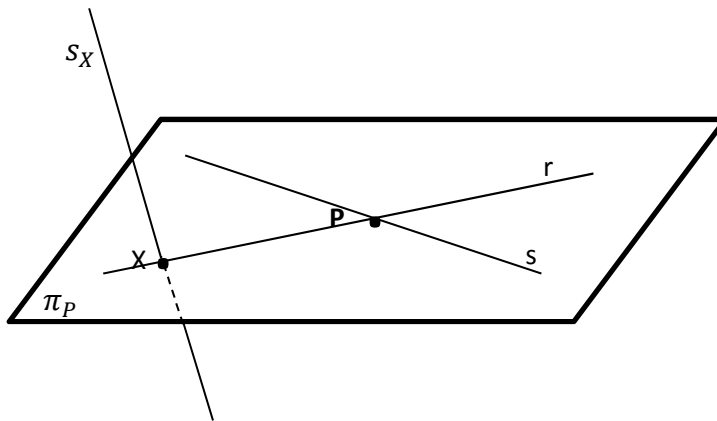
Allora $Q \cap \pi_P = \Gamma = r \cup s$ con $r \neq s$ (reali o immaginarie).

Sia t una generica retta contenuta in Q .

Allora $t \cap \pi_P \in r \cup s \Leftrightarrow t \cap r \neq \emptyset$ oppure $t \cap s \neq \emptyset$.

Si pone :

$$\Sigma = \{ t \subseteq Q : t \cap r \neq \emptyset \} = \{ s, s_X, \forall X \in r \}$$



$$\Sigma' = \{ t \subseteq Q : t \cap s \neq \emptyset \} = \{ r, r_Y, \forall Y \in s \}$$

Quindi si ottiene una partizione delle rette contenute in Q : $\{\Sigma, \Sigma'\}$.

Σ e Σ' sono dette schiere di rette della quadrica Q .

PROPRIETÀ

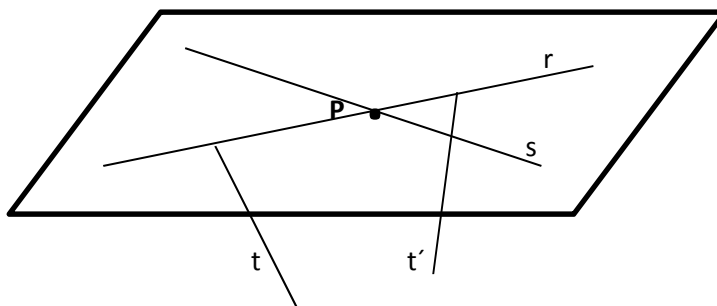
- 1) rette della stessa schiera sono sghembe.

Infatti:

Siano t e $t' \in \Sigma$.

Supponiamo per assurdo che t e t' non siano sghembe; allora $\exists P_0 \in t \cap t'$

$\Rightarrow \pi = \langle r, P_0 \rangle \subseteq Q$ dato che $\pi \cap Q \subseteq \{r, t, t'\}$, ma questo è assurdo essendo Q non degenera.

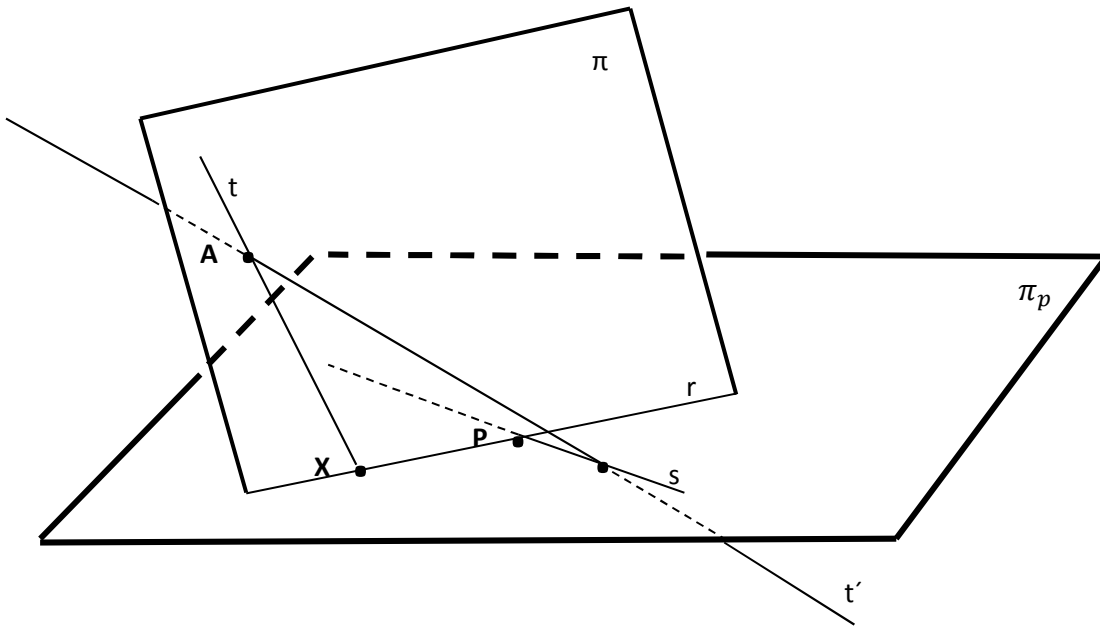


2) rette di schiere distinte hanno sempre un punto in comune.

Infatti:

Siano $t \in \Sigma$ e $t' \in \Sigma'$.

Si può considerare il piano $\pi = \langle r, t \rangle = \pi_X$, avendo posto $X = t \cap r$.



La retta $t' \notin \pi \Rightarrow t' \cap \pi = \{A\}$, ma $t' \subseteq Q$. Perciò $A \in Q$.

Quindi $A \in r$ oppure $A \in t$,

ma $t' \cap r = \emptyset \Rightarrow A \in t$ e quindi $t' \cap t \neq \emptyset$.

*