

SPAZI METRICI (DICHIOTTESIMA LEZIONE)

Gli spazi metrici sono una particolare classe di spazi topologici.

Dati $S \neq \Phi$ e l'applicazione $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x, y \in S$, $d(x, y)$ si dice distanza di x da y e d si dice una metrica se verifica le seguenti proprietà:

1D) Assioma di coincidenza:

$$\forall x, y \in S, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

2D) Proprietà di simmetria:

$$\forall x, y \in S, d(x, y) = d(y, x)$$

3D) Proprietà triangolare:

$$\forall x, y, z \in S, d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

Nel caso d sia una metrica, (S, d) è detto spazio metrico.

Si dimostra che:

$$\forall x, y \in S, d(x, y) \geq 0.$$

Infatti:

Per la proprietà triangolare applicata per $z = x$, $d(x, y) + d(y, x) \geq d(x, x) = 0$

Per la proprietà di simmetria allora, $2d(x, y) \geq 0$, ovvero $d(x, y) \geq 0$.

*

ESEMPI DI SPAZI METRICI:

1. Metrica euclidea in uno spazio vettoriale euclideo.

Sia $V(\mathbb{R})$ uno spazio vettoriale euclideo in cui è definita la forma bilineare simmetrica definita positiva $s: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

Si considera l'applicazione d così definita: $d(\underline{v}, \underline{w}) = |\underline{v} - \underline{w}| = \sqrt{s(\underline{v} - \underline{w}, \underline{v} - \underline{w})}$.

Si prova che (V, d) è uno spazio metrico.

Infatti:

1D) è verificata poiché :

$$d(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \Leftrightarrow |\underline{v} - \underline{w}| = 0 \Leftrightarrow s(\underline{v} - \underline{w}, \underline{v} - \underline{w}) = 0$$

$$\text{Tuttavia, essendo } s \text{ definito positivo, } \underline{v} - \underline{w} = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{w}.$$

2D) è verificata poiché:

$$d(\underline{v}, \underline{w}) = |\underline{v} - \underline{w}| \text{ e } d(\underline{w}, \underline{v}) = |\underline{w} - \underline{v}|,$$

$$\text{ma } |\underline{v} - \underline{w}| = |\underline{w} - \underline{v}|, \text{ quindi } d(\underline{v}, \underline{w}) = d(\underline{w}, \underline{v}).$$

3D) è verificata poiché:

presi $\underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \in V$, dalla proprietà triangolare negli spazi vettoriali euclidei

$$d(\underline{v}, \underline{z}) = |\underline{v} - \underline{z}| = |\underline{v} - \underline{z} + \underline{w} - \underline{w}| = |\underline{v} - \underline{w} + \underline{w} - \underline{z}| \leq |\underline{v} - \underline{w}| + |\underline{w} - \underline{z}| = d(\underline{v}, \underline{w}) + d(\underline{w}, \underline{z})$$

*

In particolare,

come spazio vettoriale euclideo si può considerare (\mathbb{R}^n, x) , dove x è il prodotto scalare standard.

La metrica euclidea in tale spazio è così definita:

presi $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, si pone $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x - y)(x - y)} = \sqrt{(x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

Tale metrica,

- in \mathbb{R}^2 , sarà : $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$;
- in \mathbb{R} , sarà : $d(x, y) = |x - y|$: valore assoluto

*

TOPOLOGIA INDOTTA DA UNA METRICA

Data (S, d) con $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$, siano $y \in S$ e $r \in \mathbb{R}: r > 0$,

$C(y, r) = \{x \in S : d(x, y) < r\}$ si dice cerchio aperto di centro y e raggio r (o anche intorno sferico o disco aperto).

Presa in considerazione la famiglia dei cerchi aperti $\mathcal{B} = \{C(y, r) : y \in S \text{ e } r \in \mathbb{R}^+\}$, allora si vede che:

dato $C(y, r)$, $\forall z \in C(y, r) \exists C'(z, r') \subseteq C(y, r)$, ovvero $C(y, r)$ è unione di cerchi aperti.

Infatti:

Sia $z \in C(y, r)$, allora $d(y, z) < r \Leftrightarrow r - d(y, z) > 0$.

Pertanto $\exists r' \in \mathbb{R} : 0 < r' < r - d(y, z)$.

Si considera quindi il cerchio $C'(z, r')$ e si prova che è contenuto nel cerchio C .

Preso $x \in C'$, $d(z, x) < r' < r - d(y, z)$.

Perciò si può scrivere $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < (r - d(y, z)) + d(z, y) = r \Rightarrow x \in C(y, r)$.

Quindi $C'(z, r') \subseteq C(y, r)$

*

Inoltre si prova che \mathcal{B} verifica le proprietà 1B) e 2B) .

Infatti:

1B) : $S = \bigcup_{y \in S} C(y, r)$: ovvia

2B) : Presi $C_1(y_1, r_1)$ e $C_2(y_2, r_2)$: $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, si prova che $C_1 \cup C_2$ è unione di cerchi aperti, ovvero che: $\forall x \in C_1 \cap C_2, \exists C(x, r) \subseteq C_1 \cup C_2$.

Sia quindi $x \in C_1 \cap C_2$.

Per quanto già provato,

- $x \in C_1 \Rightarrow \exists I_1(x, \rho_1) \subseteq C_1$;
- $x \in C_2 \Rightarrow \exists I_2(x, \rho_2) \subseteq C_2$.

I_1 e I_2 sono cerchi concentrici e, inoltre, $I_1 \cap I_2 \subseteq C_1 \cap C_2$.

Posto quindi $C =$ cerchio di raggio minore tra I_1 e I_2 , si ha che $C \subseteq C_1 \cap C_2$.

*

Si può allora costruire la topologia \mathcal{A}_d indotta da d , i cui aperti sono unioni di cerchi aperti.

Preso $A \subseteq S$, $A \in \mathcal{A}_d \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists C(x, r) \subseteq A$.

Allora (S, \mathcal{A}_d) è uno spazio topologico e sarà detto uno spazio metrico.

ESEMPIO:

TOPOLOGIA NATURALE di \mathbb{R}^n con $n \geq 1$: $\mathcal{A}_N = \mathcal{A}_d$.

\mathcal{A}_N è la topologia indotta dalla metrica euclidea di \mathbb{R}^n .

- Se $n = 1$: gli aperti sono unioni di intervalli aperti (infatti in \mathbb{R} si ha: $C(x, r) =]x - r, x + r[$).
- Se $n = 2$: gli aperti sono unioni di cerchi.

In particolare, si vede che:

- ogni parte di piano racchiusa da una curva S , privata di S stessa, è un aperto,
- una retta è un chiuso,
- un ellisse è un chiuso.
- Se $n = 3$: gli aperti sono unioni di sfere aperte.
In particolare,
 - dato un piano, i due semispazi, escluso i punti del piano, in cui tale piano divide lo spazio sono aperti, mentre il piano stesso è un chiuso,
 - un iperboloide a una falda è un chiuso, poiché il complementare è un aperto.

*

ESEMPI DI METRICA:

1) Metrica discreta.

Dato $S \neq \emptyset, \forall x, y \in S$, si definisce :

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

d , così definita, è una metrica; infatti:

1D) e 2D) sono banalmente verificate;

3D) : $\forall x,y,z \in S$ si ha:

- se $x = y = z \Rightarrow d(x,y) = 0$, $d(y,z) = 0$ e $d(x,z) = 0$ per definizione, quindi $d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$;
- se $x \neq y \neq z \Rightarrow d(x,y) = 1$, $d(y,z) = 1$ e $d(x,z) = 1$ per definizione, quindi $d(x,y) + d(y,z) = 1+1 = 2 > 1 = d(x,z)$;
- se $x = y \neq z \Rightarrow d(x,y) = 0$, $d(y,z) = 1$ e $d(x,z) = 1$ per definizione, quindi $d(x,y) + d(y,z) = 0 + 1 = 1 = d(x,z)$;
- se $x \neq y = z \Rightarrow d(x,y) = 1$, $d(y,z) = 0$ e $d(x,z) = 1$ per definizione, quindi $d(x,y) + d(y,z) = 1 + 0 = 1 = d(x,z)$.

Allora (S,d) è uno spazio metrico \Rightarrow induce la topologia \mathcal{A}_d .

$C(y,r) = \{x \in S : d(x,y) < r\} \neq \Phi$, poiché $y \in C(y,r)$.

In particolare, $C(y,1/2) = \{y\}$; $C(y,1) = \{y\}$; $C(y,2) = S$.

Quindi, in generale, $C(y,r) = \begin{cases} \{y\} & \text{se } r \leq 1 \\ S & \text{se } r > 1 \end{cases}$

Gli aperti della topologia sono S le unioni dei singleton dei punti di S

$\Rightarrow \forall X \subseteq S$, X è un aperto.

Quindi $\mathcal{A}_d = P(S)$.

2) METRICA DEL TAXI in \mathbb{R}^2

$\forall x(x_1, x_2), y(y_1, y_2)$, si pone $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Si prova che d è una metrica. Infatti:

1D) : Se $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x_1 - y_1 = 0$ e $x_2 - y_2 = 0 \Leftrightarrow x = y$

2D) : $d(y,x) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = d(x,y)$

3D) : $\forall x,y,z \in S$ si ha:

$$d(x,z) = |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| =$$

$$= |x_1 + y_1 - y_1 - z_1| + |x_2 + y_2 - y_2 - z_2| \leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| =$$

$$= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| = d(x,y) + d(y,z).$$

*

NOTA: Quando una topologia deriva da una metrica, essa si dice metrizzabile.