ELEMENTI DI MATEMATICA FINANZIARIA

Prof. Arch. ALESSIO D'AURIA, PhD

aldauria@unina.it

www.docenti.unina.it

Il problema

- Come posso **confrontare correttamente** la **bontà di un investimento in capitale** (stock) a fronte dell'analisi del flusso "costi-ricavi" che esso determina?
- Come posso confrontare i **benefici e i costi legati ad una trasformazione edilizia/urbana** o **alla realizzazione di un'infrastruttura**, che avvengono a scadenze temporali diverse?

- La matematica finanziaria fornisce gli strumenti necessari per il confronto di flussi di moneta che avvengono in momenti diversi

24

Spostamento di capitali nel tempo

- Non è possibile addizionare, sottrarre o confrontare tra loro **valori differiti nel tempo**, se prima non sono resi omogenei, ovvero riferiti allo stesso momento.
- Perciò è necessario individuare le formule che consentono di anticipare o di posticipare ciascuna prestazione finanziaria.
- Un capitale spostato in avanti nel tempo si trasforma in **montante**, spostato indietro nel tempo si trasforma in **valore scontato**.

25

Le prestazioni finanziarie

- Le **prestazioni finanziarie** sono rappresentate da costi e ricavi, ovvero variabili di flusso
- Perché sia definita univocamente, di una prestazione finanziaria dobbiamo conoscere:
  - **l'ammontare**, ovvero la quantità di moneta del flusso
  - la **scadenza**, ovvero il momento in cui avverrà la prestazione finanziaria

26

L'interesse

- L'interesse è il **prezzo d'uso del capitale**.
- Il saggio o tasso d'interesse (r) può essere espresso in **termini percentuali** (r = 5%) o in termini unitari (r = 0,05). **L'interesse unitario** è l'interesse maturato da 1€ in un anno.
- Il saggio di interesse è **direttamente proporzionale al rischio** (a rischio maggiore corrisponde un maggiore tasso di interesse) e alla durata dell'investimento (a durata maggiore corrisponde un maggiore tasso di interesse).

27

Il montante

- Il **montante** è la somma del **capitale** e dei relativi **interessi**.
- Il **montante unitario** (q) è la somma del capitale unitario (una lira) e degli interessi maturati in un anno:

$$M = C_0 + C_0\, r = C_0 \boxed{(1 + r)} \Leftarrow q$$

(es. r = 0,05 q = 1,05).

28

Interesse semplice e composto

- L'interesse **semplice**
- È semplice quando gli interessi maturati **non maturano** a loro volta altri interessi;
- si usa quando si considera un **periodo** di tempo **uguale o inferiore ad 1 anno**

- L'interesse **composto.**
- È composto quando gli interessi maturati **maturano** a loro volta altri interessi;
- Si usa quando si si considera un periodo di tempo **superiore ad 1 anno**

29

I coefficienti di anticipazione e di posticipazione

- **Periodi inferiori all'anno**
- Coefficiente di posticipazione

$$1 + rn$$

- Coefficiente di anticipazione

$$\frac{1}{1 + rn}$$

- **Periodi superiori all'anno**
- Coefficiente di posticipazione

$$q^n$$

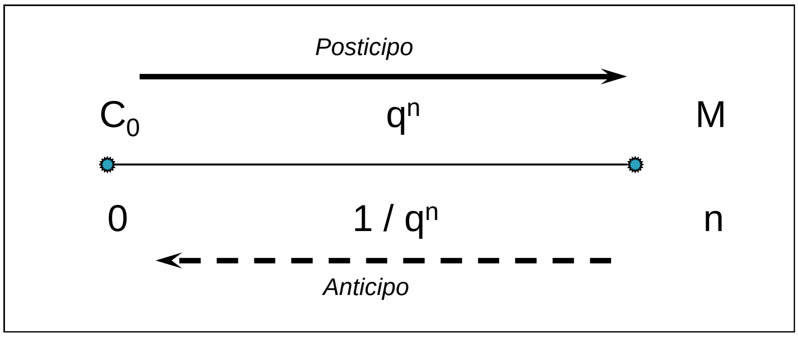
- Coefficiente di anticipazione

$$\frac{1}{q^n}$$

30

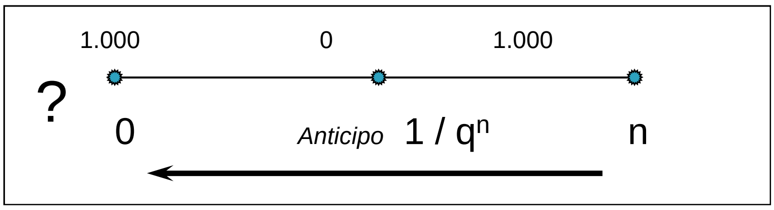
Periodi superiori all'anno

- *Coefficiente di posticipazione*: q^n
- *Coefficiente di anticipazione*: $\frac{1}{q^n}$



Esempio

- Comperate un nuovo pc che pagate in 2 rate da 1.000 €: la prima adesso, la seconda fra due anni. Quanto costa il computer (r = 6 %) ?



1.000 + 1.000 * 1 / 1.06 ^{2} = **1.890 €**

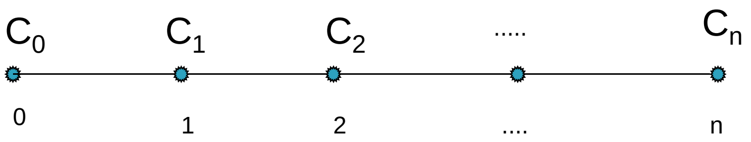
Interesse composto: la determinazione del montante dopo ***n* anni**:

- Dopo 1 anno: $C_1 = C_0 + C_0\, r = C_0\,(1+r)$
- Dopo 2 anni: $C_2 = C_1 + C_1\, r = C_1\,(1+r)$

  $C_2 = C_0\,(1+r)\,(1+r)$

  $C_2 = C_0\, q^2$

In generale, $C_n = C_0\, q^n$.



Interesse composto: esempio

- A quanto ammonterà, tra **10 anni** (n), il capitale di € **1.000** (C_0) investito in titoli al saggio del **5%**?
- $M = C_0 * q^n$
- $1.000 * 1{,}05^{10} = 1.629$ €
- Se l'interesse non fosse composto, cioè se gli interessi non maturassero altri interessi, il montante sarebbe inferiore: 1.500 €.

Mille euro, in valore attuale, al variare del tempo e del tasso di interesse

All'**aumentare** del **tempo**, **diminuisce** il **valore attuale**

Tasso di interesse	1 anno	2 anni	3 anni	10 anni	20 anni
1%	990	980	971	905	820
2%	980	961	942	820	673
3%	971	943	915	744	554
4%	962	925	889	676	456
5%	952	907	864	614	377
6%	943	890	840	558	312
7%	935	873	816	508	258
8%	926	857	794	463	215
9%	917	842	772	422	178
10%	909	826	751	386	149

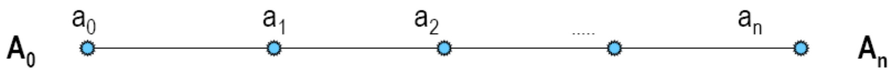
Al crescere del **saggio diminuisce** il valore attuale

Annualità

- Con il simbolo ***a*** vengono indicate le annualità, ovvero quelle **prestazioni finanziarie che si verifica ad intervalli annuali**
- Nel caso delle annualità, oltre all'ammontare e alla scadenza, bisogna conoscere anche il dato relativo alla loro **durata**

- Esse possono essere:
- **posticipate o anticipate**, in base alla scadenza rispettivamente all'inizio o alla fine dell'anno
- **costanti o variabili**, in funzione del loro ammontare
- **limitate o illimitate**, in base alla durata delle prestazioni

Annualità variabili



- Gli strumenti disponibili: **coefficienti di anticipazione e posticipazione**. Le accumulazioni iniziale e finale assumono rispettivamente la forma:
- $A_0 = a_0 + a_1 / q + a_2 / q^2 + a_n / q^n$ $\frac{1}{q^n}$
- $A_n = a_0 \times q^n + a_1 \times q^{n-1} + ... + a_n$ q^n

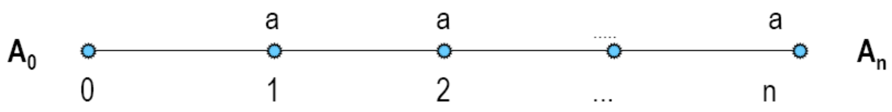
Esercizio

- Calcolare l'accumulazione iniziale dei costi sostenuti dal proprietario di un immobile. Le spese sono le seguenti:
  - 10.000 Euro alla fine del primo anno
  - 25.000 Euro alla fine del secondo anno
  - 12.500 Euro alla fine del terzo anno
  - 18.000 Euro alla fine del quarto anno
  - Utilizzare un saggio del 4%.
- $A_0 = a_0 + a_1 / q + a_2 / q^2 + a_3 / q^3 + a_4 / q^4 =$
- 10.000 / 1,04 + 25.000 / 1.08 + 12.500 / 1,13 + 18.000 / 1,17 =
- 59.228 euro

Annualità costanti, posticipate, limitate

- Il caso delle annualità posticipate limitate si presenta nel caso in cui, ad esempio, si ponga in locazione un immobile destinato ad un impiego temporalmente definito
- E' possibile procedere al calcolo del valore delle annualità sia considerando il momento della stima, sia considerando il momento in cui si ipotizza la fine dello sfruttamento economico del bene
- Nel primo caso parleremo di **accumulazione iniziale** delle annualità, nel secondo di **accumulazione finale**

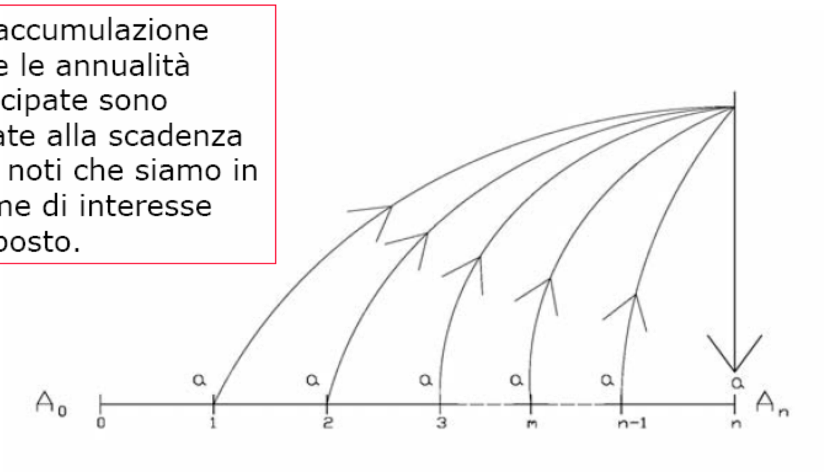
Annualità costanti posticipate limitate



- *Accumulazione finale:* $A_n = a \dfrac{(q^n - 1)}{r}$
- *Accumulazione iniziale:* $A_0 = a \dfrac{(q^n - 1)}{r\, q^n}$

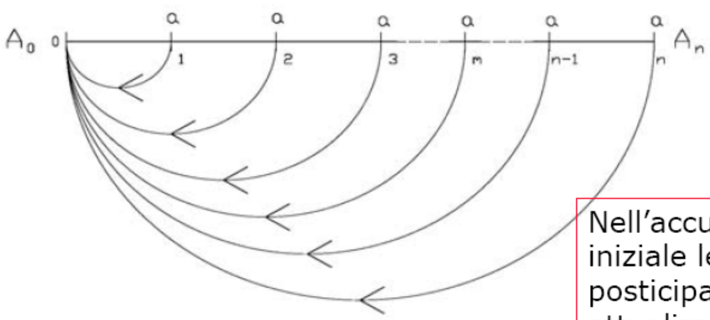
La rappresentazione grafica dell’accumulazione finale

Nell’accumulazione finale le annualità posticipate sono portate alla scadenza n. Si noti che siamo in regime di interesse composto.



41

La rappresentazione grafica dell’accumulazione iniziale



Nell’accumulazione iniziale le annualità posticipate sono attualizzate al momento della stima

42

Esercizio

- La gestione di un museo comporta una spesa annua posticipata di 50.000 Euro. Assumendo un arco di tempo di sei anni e un saggio del 10%, si vuol conoscere:
  1. l'accumulazione iniziale delle spese;
  2. l'accumulazione finale;

- 1. $A_0 = a (q^6 - 1) / (r q^6) = 50.000 \times 4{,}355 = 217.750$ Euro
- 2. $A_6 = a (q_6 - 1) / r = 50.000 \times 7{,}716 = 385.800$ Euro

43

Esercizio

- Per la manutenzione straordinaria di un fabbricato, il proprietario di un immobile ha speso alla fine di ogni anno per 4 anni consecutivi 5.000 €.
- Si vuol conoscere la spesa complessiva alla fine del periodo considerato, Sia r = 5%
- $A_4 = a * q^4 – 1 / r = 5.000 * 1{,}05^4 – 1 / 0{,}05 = 5.000 * 4{,}3101 = 21.550$ €

44

Esercizio

- Si abbia, per diritto, alla fine di ogni anno e per 7 anni consecutivi, un reddito di 2.000€.
- Supposto che l'esigibilità di tutti i redditi avvenga alla fine del 7° anno, determinare l'ammontare complessivo ritirabile con r = 8%.
- $A_7 = 2.000 * (1,08^7-1) / 0,08 = 2.000 * 8,9228 =$ 17.845 (reddito totale al 7° anno)

45

Esercizio

- Si abbia, per diritto, alla fine di ogni anno e per 7 anni consecutivi, un reddito di 2.000€.
- Si supponga che l'esigibilità di tutti i redditi avvenga subito.
- $A_0 = 2.000 * (1,08^7-1) / (0,08 * 1,08^7) = 2.000 *$ 5,2063 = 10.412 (credito totale ritirabile subito)

46

Esercizio

- Un agricoltore risulta debitore verso una ditta, per l'acquisto di una macchina agricola, per 3 anni consecutivi di una somma di 100.00€ pagabile alla fine di ogni anno.
- Si supponga che l'agricoltore voglia estinguere subito il suo debito. Sia r = 9,5%.
- A_0 = 100.000 * (1,095^3-1) / (0,095 * 1,095$^{3)}$ = 100.000 * 2,5089 = 250.890 (debito pagabile subito)

Esercizio

- La somma di tutte le spese calcolate alla fine del periodo economico di un vigneto è pari a 380.000€.
- Supposto il periodo di vita economica utile di 32 anni, si determini la **spesa media annua**.

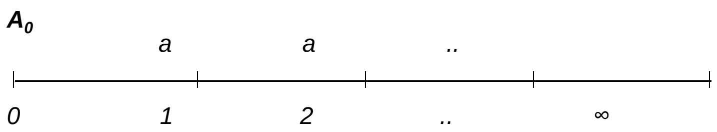
  Sia r = 5%.
- a = A_n * r / (q^n -1) = 380.000 * 0,05 / (1,05^{32} -1) = 380.000 * 0,0133 = 5.054€ (spesa media annua)

Esercizio

- Si abbiano le seguenti spese:
  - S1 all'anno 3 = 2.000€
  - S2 all'anno 5 = 5.000€
- Si abbia il seguente reddito:
  - R1 dall'anno 10 all'anno 15 = 10.000€
- Si determini l'accumulazione iniziale, con r = 8%
- A_0 = - (S1 * 1 / q^3) - (S2 * 1 / q^5) + R1 * [(q^{15-10}-1) / r * q^{15-10} * 1 / q^{10}]
- A_0 = - (2.000 * 1 / $1{,}08^3$) - (5.000 * 1 / $1{,}08^5$) + 10.000 * [($1{,}08^5$-1) / 0,08 * $1{,}08^5$ * 1 / $1{,}08^{10}$]

49

Annualità costanti e illimitate



• *Posticipate:* $A_0 = \frac{a}{r}$ Formula di capitalizzazione

• *Anticipate:* $A_0 = \frac{aq}{r}$

•*Accumulazione intermedia:* $A_m = A_0\, q^m$

50

Annualità costanti e illimitate

- Trattandosi di annualità illimitate:

$$\lim_{(n \to \infty)} \frac{a\,(q^n - 1)}{rq^n}$$

- sostituendo, si ha che:

$$\frac{a\,(q^\infty - 1)}{rq^\infty}$$

- essendo al numeratore 'n' tendente all'infinito, '$(q^\infty - 1)$' rimane praticamente uguale a 'q^∞'

51

Annualità costanti e illimitate

- Pertanto:

$$A_0 = \frac{a\,q^\infty}{rq^\infty}$$

- Semplificando si otterrà in definitiva:

$$A_0 = \frac{a}{r}$$

52

Esercizio

- Si abbia la seguente spesa:
  - S1 all'anno 3 = 2.000€
- Si abbiano i seguenti redditi:
  - R1 dall'anno 10 all'anno 15 = 10.000€
  - R2 dall'anno 18 all'infinito = 15.000€
- Si determini l'accumulazione iniziale, con r = 8%
- $A_0 = - (S1 * 1 / q^3) + R1 * [(q^{15-10}-1) / r * q^{15-10} * 1 / q^{10}] + [(R2 / r) * (1 / q^{18})]$
- $A_0 = - (2.000 * 1 / 1{,}08^3) + 10.000 * [(1{,}08^5-1) / 0{,}08 * 1{,}08^5 * 1 / 1{,}08^{10}] + [(15.000 / 0{,}08) * (1 / 1{,}08^{18})]$

53