

CONNESSIONE (VENTOTTESIMA LEZIONE)

In $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\mathbb{R}})$, si può dare la seguente caratterizzazione dei connessi:

Gli intervalli sono tutti e soli gli insiemi connessi di $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\mathbb{R}})$.

Nella prossima lezione si proverà che, dato $X \subseteq \mathbb{R}$, X è connesso $\Leftrightarrow X$ è un intervallo.

Per intervallo si intende uno dei possibili casi $\begin{cases} (a, b) \\]-\infty, a) \\ (b, +\infty[\\]-\infty, +\infty[\end{cases}$, dove :

supposto $a \leq b$, $(a, b) = \begin{cases} [a, b] \\]a, b[\\ [a, b[\\]a, b] \\ \{a\} \end{cases}$ (nel caso particolare in cui $a = b$;

$]-\infty, a) = \begin{cases}]-\infty, a] \\]-\infty, a[\end{cases}$ e $(b, +\infty[= \begin{cases} [b, +\infty[\\]b, +\infty[\end{cases}$;

$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE:

Una caratterizzazione degli intervalli di \mathbb{R} è che :

dato $X \subseteq \mathbb{R}$, se X è un intervallo, $\forall x, y \in X$, $[x, y] \subseteq X$.

Tale proprietà, oltre che necessaria, è anche sufficiente.

Infatti, supposto per ipotesi che $X \subseteq \mathbb{R}$ verifichi le proprietà sopra scritte, si presentano diversi casi; dimostriamo uno solo di essi, tenendo presente che nelle altre situazioni si procede analogamente.

Sia X tale che : $\nexists \sup X$ e $\exists \inf X = l : l \in X \Rightarrow l = \min X$

Allora proveremo che $X = [l, +\infty[$.

Infatti, sia $z \in X \Rightarrow$ poiché $l = \min X$, $l \leq z \Leftrightarrow z \in [l, +\infty[$ e quindi $X \subseteq [l, +\infty[$.

Viceversa, sia $z \in [l, +\infty[\Rightarrow z \geq l$.

Si presentano allora due possibilità :

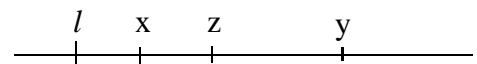
caso a) $z = l = \min X \Rightarrow z \in X$;

caso b) $z > l = \min X \Rightarrow z$ non è un minorante per X .

Pertanto, $\exists x \in X : x \leq z$, ma $x \in X \Rightarrow x \geq l$.

Inoltre, poiché per ipotesi $\nexists \sup X$, z non è un maggiorante per $X \Rightarrow \exists y \in X : y \geq z$.

Poiché $x, y \in X$, per l'ipotesi fatta su X , è $[x, y] \subseteq X$. Quindi $z \in X$ e $[l, +\infty[\subseteq X$.



In conclusione $X = [l, +\infty[$.

*

Componenti connesse di uno spazio topologico

Consideriamo ora che ogni spazio topologico si può vedere come unione di parti connesse.

Per fare ciò, bisogna innanzitutto introdurre in S una relazione \mathcal{R} :

$\forall x, y \in S$, si pone $x \mathcal{R} y \stackrel{def}{\iff} \exists C : C \text{ è un connesso di } S \text{ contenente } x \text{ e } y$.

La relazione \mathcal{R} è d'equivalenza; infatti

- 1) è riflessiva : per avere $x \mathcal{R} x \forall x \in S$, basta scegliere $C = \{x\}$
- 2) è simmetrica : $x \mathcal{R} y \iff \exists C : x, y \in C \iff y \mathcal{R} x$
- 3) è transitiva : $x \mathcal{R} y \text{ e } y \mathcal{R} z \iff \exists C_1 : x, y \in C_1 \text{ e } \exists C_2 : y, z \in C_2 \Rightarrow x, z \in C_1 \cup C_2 = C$,
dove C è un connesso essendo $C_1 \cap C_2 = \{y\} \neq \Phi \iff x \mathcal{R} z$

Nel caso particolare in cui S è connesso, $\forall x, y \in S$, $x \mathcal{R} y$.

Si può indicare \mathcal{R} con il simbolo \approx .

La relazione \approx genera una partizione di S in classi di equivalenza :

$\forall x \in S$, $[x]_{\approx}$ si dice componente connessa di x in S .

In particolare, se S è connesso, $\forall x \in S$, $[x]_{\approx} = S$.

Inoltre, poiché si dimostra che ogni componente connessa è un connesso, se $\forall x \in S$, $[x]_{\approx} = S$, S è connesso. Perciò ora si proverà che le classi di equivalenza generate da \approx sono connessi massimali.

Per fare ciò si procede come segue:

- 1) Se C è un connesso : $x \in C$, allora $C \subseteq [x]_{\approx}$.

Infatti, $\forall y \in C$, $y \approx x$, che equivale a dire che $y \in [x]_{\approx}$. Pertanto $C \subseteq [x]_{\approx}$.

- 2) $\forall x \in S$, $[x]_{\approx}$ è un connesso.

Infatti, presi $y, z \in [x]_{\approx}$,

$y \approx x \iff \exists C_1 : x, y \in C_1$, e, per quanto visto al punto 1), $C_1 \subseteq [x]_{\approx}$;

$z \approx x \iff \exists C_2 : x, z \in C_2$, e, per quanto visto al punto 1), $C_2 \subseteq [x]_{\approx}$.

Quindi $x \in C_1 \cap C_2 \neq \Phi$, pertanto $C_1 \cup C_2 = C$ è un connesso. Inoltre, $y, z \in C \subseteq [x]_{\approx}$.

Pertanto $[x]_{\approx}$ è connesso.

*

Da quanto dimostrato, si deduce che $\forall x \in S$, $[x]_{\approx}$ è un connesso contenente x e che contiene ogni connesso contenente x ; di conseguenza, rispetto all'inclusione, $[x]_{\approx}$ è il più grande connesso contenente x .

Quindi, in uno spazio topologico S , $\forall x \in S$, $[x]_{\approx}$ è un connesso massimale.

Pertanto ogni spazio topologico può essere visto come unione delle sue componenti connesse e lo studio di uno spazio topologico può essere ricondotto allo studio delle sue componenti connesse.

In particolare, se S è connesso, $\exists!$ componente connessa (ovvero, $\forall x \in S$, $[x]_{\approx} = S$).

ESEMPIO

Nello spazio topologico $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_N)$,

- $\mathbb{R} - \{a\}$ con $a \in \mathbb{R}$ non è connesso; infatti $\mathbb{R} - \{a\}$ si può scrivere come unione dei due aperti disgiunti $] -\infty, a[\cup]a, +\infty[$, dove $] -\infty, a[$ e $]a, +\infty[$ sono quindi due componenti connesse;

$$\left(\begin{array}{l} \forall x < a,] -\infty, a[\text{ è il più grande connesso contenente } x. \\ \forall y > a,]a, +\infty[\text{ è il più grande connesso contenente } y. \end{array} \right)$$

- $\mathbb{R} - \{a, b\}$ è sconnesso e ha tre componenti connesse : $] -\infty, a[\cup]a, b[\cup]b, +\infty[$;
- $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ è sconnesso perché ha infinite componenti connesse del tipo $]a, a+1[$ con $a \in \mathbb{Z}$;
- \mathbb{Z} è sconnesso perché ha infinite componenti connesse del tipo $\{a\}$ con $a \in \mathbb{Z}$.

*

DEFINIZIONE:

Uno spazio topologico S si dice totalmente sconnesso $\stackrel{def}{\iff} \forall x \in S, [x]_{\approx} = \{x\}$.

*

ESEMPIO

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ è sconnesso. Infatti si possono considerare i due aperti in \mathbb{Q} : $] -\infty, \sqrt{2}[$ e $] \sqrt{2}, +\infty[$.

Tali aperti sono non vuoti e disgiunti e $\mathbb{Q} =] -\infty, \sqrt{2}[\cup] \sqrt{2}, +\infty[$.

Proviamo che, \mathbb{Q} è totalmente sconnesso, cioè che $\forall q \in \mathbb{Q}, [q]_{\approx} = \{q\}$.

Si deve verificare che in \mathbb{Q} gli unici sottoinsiemi connessi sono $\{q\}$, dove $q \in \mathbb{Q}$,

cioè che se $X \subseteq \mathbb{Q}$ e $\exists a, b \in X: a \neq b$, allora X non è connesso.

Infatti, supposto $a < b$, sicuramente $\exists r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : a < r < b$;

allora $X = (X \cap] -\infty, r[) \cup (X \cap]r, +\infty[)$ e dunque X è sconnesso.

*

Proviamo ora che $\forall x \in S, [x]_{\approx}$ è un chiuso.

Infatti, per quanto già visto, $\forall x \in S, [x]_{\approx}$ è connesso. Pertanto $\overline{[x]_{\approx}}$ è connesso e $x \in \overline{[x]_{\approx}}$.

Allora $\overline{[x]_{\approx}} \subseteq [x]_{\approx} \Rightarrow [x]_{\approx} = \overline{[x]_{\approx}} \Rightarrow [x]_{\approx}$ è chiuso.

*

Da quanto appena detto, si deduce che, se uno spazio topologico è totalmente sconnesso e quindi i singleton sono gli unici connessi, essi sono tutti chiusi.

ESEMPIO:

$(S, \mathcal{A}_{\mathcal{D}})$, dove $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ è la topologia discreta, è totalmente sconnesso $\forall S$.

Infatti, preso $X \subseteq S$, siano $a, b \in X : a \neq b$; allora $X = \{a\} \cup (X - \{a\})$ e

- $\{a\}$ e $(X - \{a\})$ sono entrambi non vuoti, perché $a \in \{a\}$ e $b \in (X - \{a\})$;
- sono disgiunti;
- $X = \{a\} \cup (X - \{a\})$;
- $\{a\}$ e $(X - \{a\})$ sono aperti, perché nella topologia discreta tutti i sottoinsiemi sono aperti.

Pertanto, X è sconnesso \Rightarrow gli unici connessi sono i singleton degli elementi di $X \Rightarrow X$ è totalmente sconnesso.

*