TOPOLOGIA PRODOTTO (TRENTADUESIMA LEZIONE)

Si ricorda che, dati n spazi topologici $(S_1,\mathcal{A}_1)$, $(S_2,\mathcal{A}_2)$,…, $(S_n,\mathcal{A}_n)$,

si può considerare $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in S_i, \forall i=1,2,\ldots,n \}$.

In S si può definire la topologia prodotto considerando la famiglia

$\mathcal{B} = \{ A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i \ \forall i=1,2,\ldots,n\}$.

La proprietà 2A) non è verificata da tale famiglia, quindi essa non costituisce una topologia; tuttavia sono verificate le proprietà 1B) e 2B), pertanto essa costituisce una base per una topologia, che è detta topologia prodotto delle $\mathcal{A}_i$.

La topologia prodotto è dunque la topologia in cui gli aperti sono le unioni degli elementi di $\mathcal{B}$.

OSSERVAZIONE:

Se $\mathcal{B}_i$ è una base di $\mathcal{A}_i \ \forall i$,

allora si può considerare la famiglia $\mathcal{B}' = \{ B_i^1 \times B_j^2 \times \ldots \times B_k^n , \forall B^i \in \mathcal{B}_i \ \forall i\}$.

Tale famiglia, formata dai prodotti degli elementi che compongono le basi delle topologie considerate, è ancora una base per la topologia prodotto.

*

È bene notare che nella lezione precedente è stato dimostrato che la topologia di $\mathbb{R}^2$ si può ottenere come prodotto di $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_\mathcal{N})$ per se stessa.

In generale, la topologia prodotto ottenuta moltiplicando n volte $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_\mathcal{N})$ per se stesso, dà proprio la topologia naturale di $\mathbb{R}^n$.

Proprietà dello spazio prodotto : proiezioni sui fattori

È già stato visto che il prodotto di basi dà una base.

Si consideri il prodotto $(S, \mathcal{A})$ tra i due spazi topologici $(S_1,\mathcal{A}_1)$ e $(S_2,\mathcal{A}_2)$.

Le due applicazioni

$\varphi_1 : (x_1, x_2) \in S \rightarrow x_1 \in S_1$ e

$\varphi_2 : (x_1, x_2) \in S \rightarrow x_2 \in S_2$

si definiscono <u>proiezioni</u> sul primo e sul secondo fattore.

In generale, la proiezione φ_i è così definita: $\varphi_i : (x_1, \ldots, x_i) \in S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_i \rightarrow x_i \in S_i$.

Le proiezioni sono applicazioni suriettive.

Infatti guardando al caso n = 2:

$\forall$ x ϵ S_1, x = φ_1 (x , x_2) con x_2 ϵ S_2 e $\forall$ y ϵ S_2, y = φ_2 (x_1, y) con x_1 ϵ S_1.

Dal punto di vista topologico, si prova che φ_1 e φ_2 sono continue e aperte.

Infatti, si prova che sono continue dimostrando che la controimmagine di un aperto è ancora un aperto e che sono aperte dimostrando che l'immagine di un aperto è ancora un aperto.

Tali verifiche si possono fare considerando solo gli aperti di una base.

In particolare, la dimostrazione che segue verrà effettuata sulla φ_1: (x_1, x_2) ϵ S_1 x S_2 $\rightarrow$ x_1 ϵ S_1 .

- φ_1 è continua:

  Sia A_1 ϵ $\mathcal{A}_1$;

  allora ${\varphi_1}^{-1}(A_1)$ = {(x_1, x_2) ϵ S_1 x S_2 : φ_1 (x_1 , x_2) ϵ A_1} = {(x_1, x_2) ϵ S_1 x S_2 : x_1 ϵ A_1}.

  In particolare, $\forall$ coppia (x_1, x_2) ϵ A_1 x S_2, x_1 ϵ A_1 e x_2 ϵ S_2 e quindi ${\varphi_1}^{-1}(A_1)$ si può scrivere come prodotto di A_1 per S_2.

  Si deve quindi provare che la controimmagine di un aperto è un aperto.

  Gli aperti della topologia prodotto sono i prodotti tra gli aperti del primo spazio per gli aperti del secondo spazio e le unioni di tali prodotti.

  A_1 x S_2 è un aperto della topologia prodotto $\mathcal{A}$, in quanto è un aperto di S_1 per un aperto di S_2. Quindi la controimmagine di un aperto è un aperto e φ_1è continua.

  Per φ_2 il ragionamento è analogo, in quanto la controimmagine di un aperto mediante φ_2 è ancora un aperto e quindi anche φ_2è continua.

- φ_1 è aperta:

  Consideriamo per la topologia prodotto la base $\mathcal{B}$ = { A_1 x A_2 , A_i ϵ $\mathcal{A}_i$}.

  Sia A_1 x A_2 un aperto di $\mathcal{B}$. Allora, φ_1(A_1 x A_2) = A_1 .

  Infatti, A_1 x A_2 = {(x_1, x_2) : x_1 ϵ A_1 e x_2 A_2 }.

  Quindi, associando ad ogni coppia la sua prima coordinata, si ottiene un insieme contenuto in A_1; inoltre, $\forall x_1$ ϵ A_1 e $\forall x_2$ ϵ A_2, la coppia (x_1, x_2) ϵ A_1 x A_2. Allora, $\forall x_1$ ϵ A_1, x_1 può essere visto come immagine di una coppia del tipo (x_1, x_2).

  Tale ragionamento è valido anche se A_2 è vuoto, poiché in tal caso, A_1 x A_2 = Φ e anche φ_1(A_1 x A_2) = Φ, che è comunque un aperto.

  Quindi , φ_1(A_1 x A_2) = A_1, che è un aperto di S_1 .

  Pertanto, poiché l'immagine di un aperto della base è un aperto, φ_1 è aperta.

  Analogamente si procede per φ_2, in quanto φ_2(A_1 x A_2) = A_2 .

*

È stato dunque chiarito che le applicazioni φ_1 e φ_2 sono continue, aperte e suriettive.

Inoltre, presa ad esempio, φ_1: (x_1, x_2) ϵ S_1 x S_2 → x_1 ϵ S_1 ,ci sono coppie distinte che hanno la stessa immagine : (x_1, x_2) e (x_1, y_2) con $x_2 \neq y_2$, se | S_2| ≥ 2 .

Pertanto, φ_1 è iniettiva ⇔ S_2 è un singleton, ovvero

se in S_2 ci sono almeno due elementi distinti, l'applicazione φ_1 non è iniettiva.

In generale, quindi, le applicazioni del tipo φ_i non sono iniettive;

tuttavia, φ_i è iniettiva ⇔ S_i è un singleton.

Infine, è bene notare che, in generale, le applicazioni del tipo φ_i non sono omeomorfismi.

OSSERVAZIONE:

Si consideri il prodotto S_1 x S_2 e sia fissato $\overline{x_2}$ ϵ S_2 .

Allora si può considerare il prodotto S_1 x $\{\overline{x_2}\}$ = $\{(x_1, \overline{x_2})$: x_1 ϵ S_1 }.

È inoltre data la proiezione φ_1: (x_1, x_2) ϵ S_1 x S_2 → x_1 ϵ S_1 e, in particolare, la restrizione di tale applicazione sarà $\varphi_{1|S_1 \text{x} \{\overline{x_2}\}}$: $(x_1, \overline{x_2})$ ϵ S_1 x $\{\overline{x_2}\}$ → x_1 ϵ S_1 .

Riguardo all'applicazione $\varphi_{1|S_1 \text{x} \{\overline{x_2}\}}$ si può dire che è un omeomorfismo, ovvero è biettiva, continua e aperta:

- $\varphi_{1|S_1 \text{x} \{\overline{x_2}\}}$ è sicuramente biettiva, perché ∀$\overline{x_1}$ ϵ S_1, ∃! $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ ϵ S_1 x $\{\overline{x_2}\}$;
- $\varphi_{1|S_1 \text{x} \{\overline{x_2}\}}$ è continua, perché la restrizione di una funzione continua è ancora continua; infatti si prova che la controimmagine di un aperto è ancora un aperto:
  preso un aperto A_1 del codominio ,
  $\varphi_{1|S_1 \text{x} \{\overline{x_2}\}}{}^{-1}(A_1) = \{(x_1, x_2): x_2 = \overline{x_2}$ e x_1 ϵ $A_1\}$ = A_1 x $\{\overline{x_2}\}$ = (A_1 x S_2) ∩ (S_1 x $\{\overline{x_2}\}$),
  che è un aperto in S_1 x$\{\overline{x_2}\}$ e quindi $\varphi_{1|S_1 \text{x} \{\overline{x_2}\}}$ è continua.
- $\varphi_{1|S_1 \text{x} \{\overline{x_2}\}}$ è aperta, infatti si prova che l'immagine di un aperto è un aperto:
  si consideri l'aperto A_1 x A_2 : $\overline{x_2}$ ϵ A_2 .
  Allora, (A_1 x A_2) ∩ (S_1 x $\{\overline{x_2}\}$) = $\{(x_1, x_2): x_2 = \overline{x_2}$ ϵ A_2 e x_1 ϵ $A_1\}$ = $\{(x_1, \overline{x_2})$: x_1 ϵ A_1 }.
  La proiezione di tale insieme è A_1, ovvero $\varphi_{1|S_1 \text{x} \{\overline{x_2}\}}$ ((A_1 x A_2) ∩ (S_1 x $\{\overline{x_2}\}$)) = A_1, che è un aperto e quindi $\varphi_{1|S_1 \text{x} \{\overline{x_2}\}}$ è aperta.

Perciò $\varphi_{1|S_1 \text{x} \{\overline{x_2}\}}$, essendo biettiva, continua ed aperta, è un omeomorfismo.

In conclusione, ∀$\overline{x_2}$ ϵ S_2, il prodotto S_1 x $\{\overline{x_2}\}$ è omeomorfo a S_1.

È dunque ovvio che lo spazio prodotto contiene tanti sottospazi omeomorfi a S_1.

Inoltre ∃ sottospazi del prodotto omeomorfi a S_2 ; infatti si prova in modo analogo che ∀$\overline{x_1}$ ϵ S_1, $\{\overline{x_1}\}$ x S_2 è uno spazio omeomorfo a S_2.

*

OSSERVAZIONI:

Tenendo presente che un intorno è un insieme che contiene un aperto contenente il punto considerato, dato un qualunque punto (x_1, x_2) dello spazio prodotto S = S_1 x S_2 , in S come intorno del punto (x_1, x_2) si può considerare l'aperto A_1 x A_2 contenente (x_1, x_2),
dove A_1 è un aperto di S_1 contenente x_1 e A_2 è un aperto di S_2 contenente x_2.
Dunque, $\forall (x_1, x_2) \in$ S, se I_1 è un intorno di x_1 in S_1 e I_2 è un intorno di x_2 in S_2, allora I_1 x I_2 è un intorno di (x_1, x_2) in S. Quindi il prodotto di intorni è un intorno.
In generale, però, non è vero il viceversa, cioè un intorno di (x_1, x_2) in S può non essere del tipo I_{x_1} x I_{x_2}.
Tuttavia, dati un qualunque punto (x_1, x_2) dello spazio prodotto S = S_1 x S_2 e un intorno I di (x_1, x_2) in S, per la definizione di intorno scritta sopra e ricordando che un aperto della topologia prodotto è unione di prodotti di aperti, I conterrà un prodotto del tipo I_{x_1} x I_{x_2}.
Quindi se I è intorno di (x_1, x_2) nello spazio prodotto S, sicuramente $\exists$ I_1 intorno di x_1 in S_1 e e $\exists$ I_2 intorno di x_2 in S_2 tali che il prodotto I_1 x I_2 è contenuto in I.
In conclusione si può riassumere quanto osservato dicendo che:
Il prodotto di intorni è un intorno e ogni intorno nel prodotto contiene un prodotto di intorni.

*

Da tali osservazioni si deduce che:
se $X_1 \subseteq S_1$ e $X_2 \subseteq S_2$, un punto (x_1, x_2) del prodotto X_1 x X_2 è aderente a X_1 x X_2 $\Leftrightarrow$ la prima coordinata è aderente a X_1 e la seconda coordinata è aderente a X_2, ovvero
il prodotto delle chiusure è uguale alla chiusura del prodotto : $\overline{X_1}$ x $\overline{X_2}$ = $\overline{X_1 \text{ x } X_2}$.

Proprietà topologiche dello spazio prodotto

Per quanto riguarda gli assiomi di separazione, essi passano al prodotto.

Si ricorda che:
Considerato lo spazio topologico (S, $\mathcal{a}$),
S è $T_0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall$x,y $\in$ S: x $\neq$ y , $\exists\, I_x$: y $\notin I_x$ oppure $\exists\, I'_y$: x $\notin I'_y$.
S è $T_1 \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ x,y $\in$ S: x $\neq$ y , $\exists\, I_x$: y $\notin I_x$ e $\exists\, I'_y$: x $\notin I'_y$.
S è separato o di Hausdorff o $T_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall$ x,y $\in$ S: x $\neq$ y, $\exists\, I_x$ed $\exists\, I'_y$: $I_x \cap I'_y = \Phi$.

Il prodotto $S = S_1 \times S_2$ è T_0 ,T_1 o T_2 ⇔ sia S_1 che S_2 sono rispettivamente T_0 ,T_1 o T_2.

Di seguito è presentata la dimostrazione per la proprietà T_2; analogamente si può procedere per T_0 e T_1 .

Sia per ipotesi $S = S_1 \times S_2$ uno spazio T_2. Allora, si prova in generale che:

se S è T_2, ogni suo sottospazio è T_2.

Infatti sia $X \subseteq S$; $\forall x,y \in X$ si scelgano in S due intorni disgiunti di x e di y che sono rispettivamente: I_x e I_y tali che $I_x \cap I_y = \Phi$.

da tali intorni si possono ricavare in X due intorni di x e y che sono rispettivamente $I'_x = I_x \cap X$ e $I'_y = I_y \cap X$, che saranno disgiunti essendolo I_x e I_y . Pertanto X è T_2 .

Allora, poiché S_1 e S_2 sono omeomorfi a sottospazi di S, essi sono T_2 .

Viceversa, siano S_1 e S_2 spazi T_2 e si considerino in S due punti distinti (x_1, x_2) e (y_1, y_2).

Proviamo che esistono in S due intorni disgiunti di tali punti.

Infatti, poichè (x_1, x_2) e (y_1, y_2) sono distinti, una almeno delle due coordinate è distinta e si può supporre senza ledere la generalità della dimostrazione che sia $x_1 \neq y_1$.

(Nel caso in cui fosse $x_2 \neq y_2$, si ragionerebbe in modo analogo).

Pertanto, poiché $x_1 \neq y_1$ e poiché S_1 è T_2, $\exists\, I_{x_1} \subseteq S_1$ e $\exists\, I_{y_1} \subseteq S_1$ tali che $I_{x_1} \cap I_{y_1} = \Phi$.

Allora $(I_{x_1} \times S_2)$ e $(I_{y_1} \times S_2)$ sono rispettivamente intorni di (x_1, x_2) e (y_1, y_2) e sono chiaramente disgiunti.

*

Per quanto riguarda gli assiomi di numerabilità, si può dire quanto segue.

Si ricorda che:

Considerato lo spazio topologico $(S, \mathcal{A})$,

S è N_1 , ovvero è detto localmente a base numerabile $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\forall\, x_0 \in S$, $\exists$ un sistema fondamentale di intorni di x_0 : $H(x_0)$ che sia finito o numerabile.

S è N_2, ovvero è detto a base numerabile $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ una base numerabile o finita $\mathcal{B}$.

S è separabile $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, D \subseteq S$: D è denso in S, ovvero $\overline{D} = S$, e D è o numerabile o finito.

S_1 e S_2 sono a base numerabile o separabili ⇔ $S_1 \times S_2$ è a base numerabile o separabile.

Tale dimostrazione è analoga a quella vista per la proprietà T_2 .

Per quanto riguarda la connessione e la compattezza, si può dire quanto segue.

Si ricorda che

Uno spazio topologico $(S,\mathcal{A})$ si dice connesso $\Leftrightarrow \nexists\ A_1, A_2 \in \mathcal{A}$: $A_1 \neq \Phi$, $A_2 \neq \Phi$, $A_1 \cap A_2 = \Phi$ e $A_1 \cup A_2 = S$.

Uno spazio topologico $(S,\mathcal{A})$ è sconnesso $\Leftrightarrow$ non è connesso, cioè se $\exists\ A_1, A_2 \in \mathcal{A}$: $A_1 \neq \Phi$, $A_2 \neq \Phi$, $A_1 \cap A_2 = \Phi$ e $A_1 \cup A_2 = S$.

Uno spazio topologico $(S,\mathcal{A})$, S si dice compatto $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall$famiglia $\{A_i\}_{i\epsilon I}$: $A_i \in \mathcal{A}$ e $S = \bigcup_{i\,\epsilon\, I} A_i$, $\exists\ F \subseteq I$: F è finito e $S = \bigcup_{i\,\epsilon\, F} A_i$ (cioè esiste una sottofamiglia finita di $\{A_i\}_{i\epsilon I}$ tale che dall'unione degli elementi di tale sottofamiglia si ottenga il sostegno dello spazio), ovvero ogni ricoprimento di S formato da aperti contiene un sottoricoprimento finito di S.

Si prova che: Se S_1 e S_2 sono connessi, allora anche $S = S_1 \times S_2$ è connesso, e viceversa.

Infatti, dati due spazi S_1 e S_2 connessi, è bene ricordare che, per come sono stati caratterizzati i connessi, uno spazio S è connesso $\Leftrightarrow \forall\ x,y \in S$, $\exists$ C connesso : $x,y \in C \subseteq S$.

Pertanto, per provare che $S = S_1 \times S_2$ è connesso, consideriamo due punti di S, (x_1, x_2) e (y_1, y_2).

Si deve allora dimostrare l'esistenza di un connesso contenuto in S che contenga tali punti.

È noto che S_1 è omeomorfo a un sottospazio di S che contiene il punto (x_1, x_2), ovvero S_1 è omeomorfo a $S_1 \times \{x_2\}$ e quindi $S_1 \times \{x_2\}$ è un connesso di S che contiene il punto (x_1, x_2).

Analogamente, un connesso di S che contiene (y_1, y_2) è $\{y_1\} \times S_2$, che è omeomorfo a S_2.

Ricordando che l'unione di connessi è connessa $\Leftrightarrow$ l'intersezione di tali connessi è non vuota, nel caso considerato, $(S_1 \times \{x_2\}) \cap (\{y_1\} \times S_2) = (y_1, x_2) \neq \Phi$.

Quindi $(S_1 \times \{x_2\}) \cup (\{y_1\} \times S_2)$ è un connesso di S contenente i punti (x_1, x_2) e (y_1, y_2).

Viceversa, sia S connesso.

Considerate le proiezioni φ_1: $S = S_1 \times S_2 \to S_1$ e φ_2: $S = S_1 \times S_2 \to S_2$, esse sono continue e suriettive e quindi mutano connessi in connessi. Pertanto S_1 e S_2 sono connessi.

*

Si può inoltre provare che: Se S_1 e S_2 sono compatti, allora anche $S = S_1 \times S_2$ è compatto.

Di tale asserto vale anche il viceversa (che viene dimostrato ancora grazie alla continuità e alla suriettività delle proiezioni φ_1 e φ_2).

È bene notare che quanto detto per due generici spazi, vale per un numero finito di spazi.
Quindi il prodotto di compatti è ancora un compatto e da ciò dedurremo la dimostrazione del TEROEMA DI HEINE – PINCHERLE – BOREL in $(\mathbb{R}^n, \mathcal{a}_{\mathcal{N}})$

Innanzitutto, in $\mathbb{R}^n$ si definiscono gli n-cubi chiusi.
Si dice n-cubo chiuso di centro y = $(y_1,\ldots, y_n)$ e lato $2r$, con $r \in \mathbb{R}^+$, il prodotto di n intervalli chiusi $[y_i - r , y_i + r]$ di centro y_i e ampiezza $2r$: $\prod_{i=1}^{n}[y_i - r , y_i + r]$.
Un n-cubo aperto è definito mediante gli intervalli aperti, ovvero è uguale a $\prod_{i=1}^{n}]y_i - r , y_i + r[$.
In altri termini, un n-cubo chiuso è costituito dalle n-ple $(x_1,\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tali che $x_i \in [y_i - r , y_i + r]$ $\forall$ i =1, …, n .

Nel caso n = 2 si ha:
$[y_1 - r, y_1 + r] \times [y_2 - r, y_2 + r]$ è il quadrato chiuso di centro y = (y_1, y_2) e lato 2r.

Si potrebbe anche definire l'm-rettangolo chiuso come il prodotto di m intervalli che non abbiano necessariamente tutti la stessa ampiezza.

Riguardo la compattezza, un n-cubo chiuso è un compatto, perché in $(\mathbb{R},\mathcal{a}_{\mathcal{N}})$ un intervallo chiuso è un compatto e inoltre il prodotto di compatti è ancora un compatto, come è stato detto nelle pagine precedenti.
Allora ogni cerchio chiuso $\overline{C(y,r)}$ è un compatto, infatti

- un qualunque cerchio chiuso è sempre contenuto nell'n-cubo chiuso che ha lo stesso centro e che ha come lato il doppio del raggio;
- un n-cubo chiuso è un compatto ;
- un chiuso di un compatto è un compatto: il cerchio chiuso è un chiuso di $\mathbb{R}^n$, ma è chiuso anche nell'n-cubo, che è a sua volta un chiuso.

Pertanto risulta dimostrata la seguente PROPOSIZIONE:
Ogni cerchio chiuso $\overline{C(y,r)}$= { x $\in \mathbb{R}^n$: d(x,y) $\leq$ r } è compatto.

DEFINIZIONE:
Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ si dice limitato $\Leftrightarrow$ $\exists$ un cerchio C tale che K è contenuto in C.

Si può allora dimostrare il seguente TEOREMA DI HEINE – PINCHERLE − BOREL in $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_{\mathcal{N}})$.
Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ è compatto ⇔ K è chiuso e limitato.

Dimostrazione:

Sia K compatto.

Poiché $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_{\mathcal{N}})$ è uno spazio T_2, i suoi sottoinsiemi compatti sono chiusi e quindi K è chiuso.

Inoltre, $\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico poiché la topologia naturale deriva dalla metrica euclidea; pertanto i compatti di $\mathbb{R}^n$ sono limitati e quindi K è anche limitato.

Viceversa, sia K chiuso e limitato. Allora ∃ un cerchio C : $K \subseteq C$; quindi $\overline{K} \subseteq \overline{C}$, ma, poiché K è chiuso per ipotesi, $K = \overline{K}$.

$\overline{C}$ è un compatto, per quanto visto in precedenza, e inoltre K è un chiuso contenuto in un compatto.

Pertanto K è compatto.

*

Tale teorema rappresenta una prima caratterizzazione dei compatti di $\mathbb{R}^n$.