Richiami su equazioni differenziali lineari ed omogenee

Si consideri un'equazione differenziale del secondo ordine del tipo:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = H(x)$$

Non essendo i coefficienti di tale equazione dipendenti dalla funzione incognita, l'equazione è lineare. Nel caso in cui *H(x)=0* identicamente, l'equazione è omogenea:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \qquad (1)$$

Il problema differenziale che sarà considerato qui di seguito è caratterizzato dall'assegnazione di opportune condizioni al contorno. Sotto questo aspetto, come già anticipato la lezione scorsa, il problema si differenzia dal classico problema di Cauchy ai valori iniziali.

Le condizioni al contorno consistono nel prescrivere agli estremi dell'intervallo di definizione dell'equazione (1), il valore che assume una opportuna combinazione lineare della funzione e della sua derivata prima. Nel caso di $x_0 < x < x_1$, se le condizioni al contorno appaiono separate e lineari, si impone:

$$a_1 y(x_0) + a_2 y'(x_0) = c_1$$
$$b_1 y(x_1) + b_2 y'(x_1) = c_2$$

In questa sede, in particolare, si analizzeranno problemi omogenei del secondo ordine lineari per cui le condizioni al contorno, anch'esse omogenee, sono:

$$\begin{aligned} a_1 y(x_0) + a_2 y'(x_0) &= 0 \\ b_1 y(x_1) + b_2 y'(x_1) &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Il numero delle condizioni al contorno da assegnare, in analogia ai problemi ai valori iniziali, è pari all'ordine dell'equazione differenziale. Questi problemi nella terminologia anglosassone sono detti Boundary Value Problems. Da un'analisi preliminare notiamo che questo problema ammette certamente la soluzione banale y(x)=0.

Si supponga ora che una funzione $\Phi_1(x)$ sia una soluzione del problema. Data la linearità di questo, un qualunque suo multiplo è ancora soluzione del problema; si avranno quindi infinite soluzioni.

Si supponga che anche $\Phi_2(x)$ sia soluzione del problema, linearmente indipendente da $\Phi_1(x)$; allora una loro qualsiasi combinazione lineare[1] sarà ancora soluzione del problema. Risulta quindi una doppia infinità di soluzioni del problema rappresentate dall'integrale generale così definito

$$y(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x)$$

[1] La condizione di indipendenza lineare si esprime: $c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) = 0 \iff c_1 = c_2 = 0$

Le condizioni al contorno permettono di particolarizzare la soluzione.

- **Primo esempio**

Il problema da analizzare è:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \qquad 0 < x < 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

La soluzione generale è una combinazione lineare delle funzioni seno e coseno.

$$y(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$$

E' possibile ora determinare le costanti c_1 e c_2 applicando le condizioni al contorno per cui:

$$y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$
$$y(1) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

Si noti, cioè, esplicitamente, che essendo sin(1) diverso da zero, dovrà essere necessariamente $c_1=0$. In conclusione, il problema analizzato ammette la sola soluzione banale.

- **Secondo esempio**

$$\begin{cases} y''(x) + \pi^2 y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \qquad 0 < x < 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 \sin(\pi x) + c_2 \cos(\pi x)$$

Effettuiamo adesso la ricerca delle costanti c_1 e c_2 sfruttando le condizioni al contorno

$$y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$
$$y(1) = 0 \rightarrow c_1 \sin(\pi) = 0$$

La seconda condizione al contorno è verificata per qualsiasi valore di c_1 ,essendo come è ben noto $\sin(\pi x) = 0$. La soluzione è quindi fornita dalla famiglia $y(x) = c_1 \sin(\pi x)$.

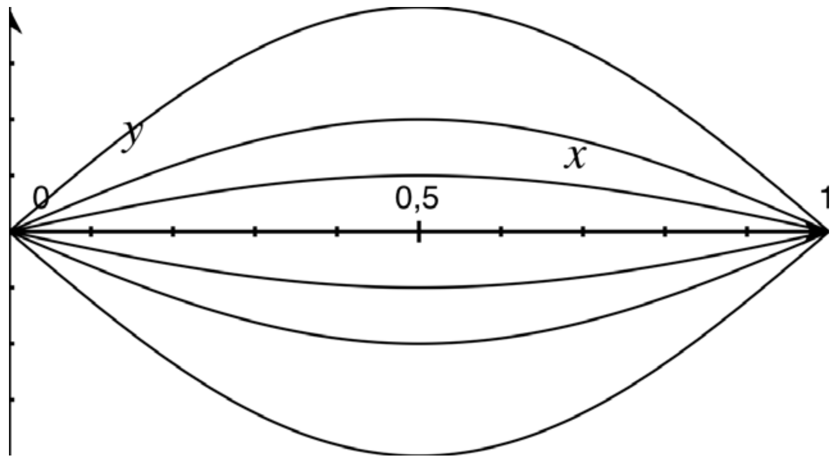

Figura 1: Alcune soluzioni del secondo esempio

- **Terzo esempio**

Si studi ora un problema ai limiti con condizioni al contorno miste:

$$\begin{cases} y''(x) + \pi^2 y(x) = 0 \\ y(0) + y(1) = 0 \quad 0 < x < 1 \\ y'(0) + y'(1) = 0 \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 \sin(\pi x) + c_2 \cos(\pi x)$$

Effettuiamo adesso la ricerca delle costanti c_1 e c_2 sfruttando le condizioni al contorno. Si ottengono le seguenti identità:

$$c_1 = c_1 \quad c_2 = c_2$$

Risulta quindi che l'integrale generale è soluzione del problema per qualsiasi coppia c_1, c_2 e si ha dunque una doppia infinità di soluzioni.

- **Risoluzione di un problema agli autovalori**

L'impostazione di un problema agli autovalori per una equazione differenziale alla Sturm-Liouville di valori ai limiti è stata discussa nel corso della lezione precedente. Qui sarà sviluppato un esempio specifico.
Consideriamo il problema

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \qquad 0 < x < 1 \\ y'(1) + y(1) = 0 \end{cases}$$

Un'equazione di questo tipo può presentarsi in un problema di conduzione in una barra, di lunghezza unitaria ai cui estremi si impongono una condizione alla Dirichlet ed un'altra alla Robin (condizione cosiddetta radiativa).
Per $\lambda = 1$ e π^2 abbiamo già trovato la soluzione in precedenza. Ci si chiede ora se esistono soluzioni diverse da quella banale per altri valori di λ.
Studiamo il problema per ogni possibile tipologia di valori assumibili da λ, ovvero nullo, positivi o negativi.

Primo caso λ=0

L'equazione diventa $y''(x)=0$ da cui otteniamo mediante una prima integrazione $y'(x)=c_1$ ed integrando ancora $y(x)=c_1 x + c_2$. Applicando le condizioni al contorno otteniamo

$$y(0)=0 \rightarrow c_2 = 0$$
$$y(1)+y'(1)=0 \rightarrow 2c_1 + c_2 = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

Per cui λ=0 non è autovalore del problema essendo l'unica soluzione possibile quella banale, ovvero $y(x)=0$

Secondo caso λ>0

L'integrale generale in questo caso è:

$$y(x)=c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)+c_2\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

che si verifica essere soluzione del problema seguendo lo stesso approccio presentato nello studio dei problemi ai limiti. Applicando le condizioni al contorno si ottiene:

$$y(0)=0 \rightarrow c_2 = 0$$
$$y(1)+y'(1)=0 \rightarrow c_1\left[\sin\left(\sqrt{\lambda}\right)+\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\right)\right]=0$$

Allo scopo di ottenere una soluzione di interesse, dovendo essere $c_1 \neq 0$, dovrà essere nullo il termine compreso tra parentesi quadre per cui otteniamo

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\right)+\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\right)=0 \rightarrow \tan\left(\sqrt{\lambda}\right)=-\sqrt{\lambda}$$

Le soluzioni di questa equazione trascendente possono essere trovate numericamente, tuttavia è possibile visualizzarle utilizzando un metodo grafico. Si rappresentano su di un piano le funzioni corrispondenti al primo ed al secondo membro dell'equazione precedente. I valori di $\sqrt{\lambda}$ per i quali si verificano le intersezioni tra le curve, sono gli autovalori del problema. Il procedimento è mostrato in Fig. 3 in cui sull'asse delle ascisse è riportata come variabile indipendente $\sqrt{\lambda}$.

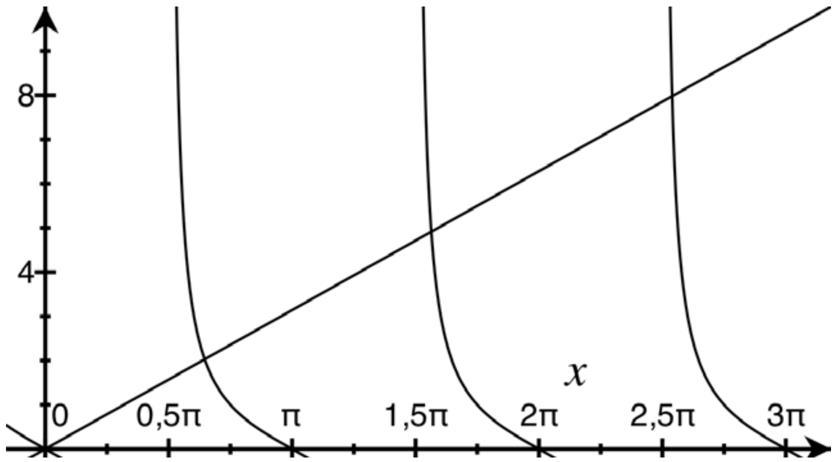

Figura 2: Risoluzione grafica dell'equazione trascendente

Il valore del primo autovalore è circa 2. Tutti gli altri possono essere ottenuti, come è facile verificare dalla figura sopra riportata, con approssimazione via via crescente, dalla relazione

$$\sqrt{\lambda_n} \cong \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}, \quad n = 2,3,4,\ldots$$

Le associate autofunzioni sono:

$$y_n(x,\lambda_n) = k \sin\sqrt{\lambda_n}\, x$$

Dove la costante k è arbitraria.
Si noti che gli autovalori costituiscono un infinito numerabile di valori discreti.

Terzo caso λ<0

Sfruttando la trasformazione $\lambda=-\mu$, con $\mu>0$ possiamo riscrivere il problema

$$\begin{cases} y''(x) - \mu y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \qquad 0 < x < 1 \\ y'(1) + y(1) = 0 \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 \sinh\left(\sqrt{\mu} x\right) + c_2 \sqrt{\mu} \cosh\left(\sqrt{\mu} x\right)$$

per cui, in analogia al caso precedente, applicando le condizioni al contorno si ricava l'equazione trascendente

$$\sqrt{\mu} = -\tanh\left(\sqrt{\mu}\right)$$

Risolvendo questa equazione mediante lo stesso metodo grafico del caso precedente notiamo che l'intersezione tra le due curve si ha unicamente nell'origine degli assi coordinati. Si osservi, tuttavia, che nel primo esempio si è già mostrato che il valore nullo non è autovalore. In conclusione, non esistono autovalori negativi del problema assegnato.

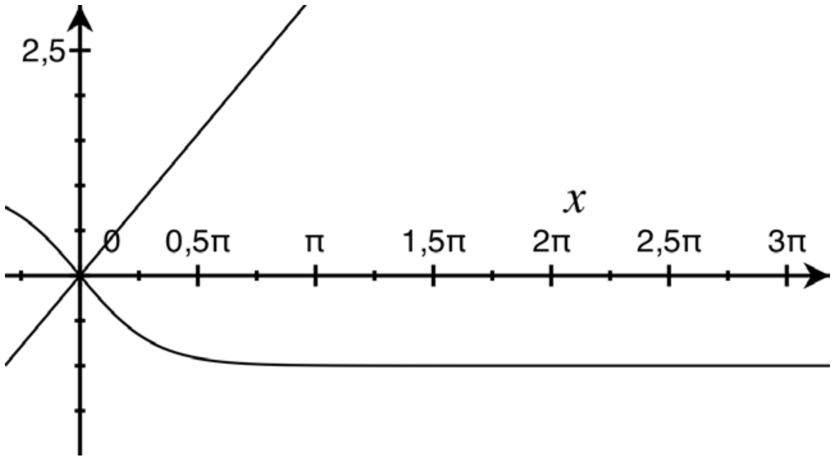

Figura 3: Risoluzione grafica dell'equazione trascendente

Va anche osservato, infine, che è possibile mostrare che gli autovalori di una equazione di Sturm Liouville, sono sempre tutti reali.