

INSTABILITA' DI KELVIN-HELMHOLTZ

L'instabilità di Kelvin-Helmholtz rappresenta una delle prime applicazioni storiche dei modi normali temporali a problemi di fluidodinamica. Essa descrive un modello notevolmente semplice, la cui risoluzione può essere effettuata analiticamente in forma chiusa. Si vedrà, tuttavia, che i risultati della stabilità di Kelvin-Helmholtz, a dispetto della semplicità del modello, sono estendibili ad una grande varietà di flussi.

Approccio fisico del problema

Prima di affrontare il problema da un punto di vista puramente matematico, è preferibile analizzare fisicamente il modello dell'instabilità di Kelvin-Helmholtz. Essa consiste essenzialmente nello studiare l'instabilità di una linea vorticoso (o di una superficie vorticoso nel caso tridimensionale) all'interno di un campo di moto. Il riferimento ad una linea vorticoso presenta, in linea di principio, analogie con una tipica modellistica impiegata in aerodinamica allo scopo di caratterizzare le superfici portanti. A differenza di quest'ultima situazione, però, dove la distribuzione vorticoso è distribuita su una superficie solida (ad esempio quella di una lastra piana o di un profilo alare), qui il vortice è libero, nel senso che la superficie vorticoso è una superficie libera, e quindi la locazione dei vortici è una variabile del problema.

Si consideri, dunque, una linea vorticoso, ossia una linea lungo cui c'è una distribuzione inizialmente uniforme di vortici, che si distende lungo l'asse x come di seguito illustrato:

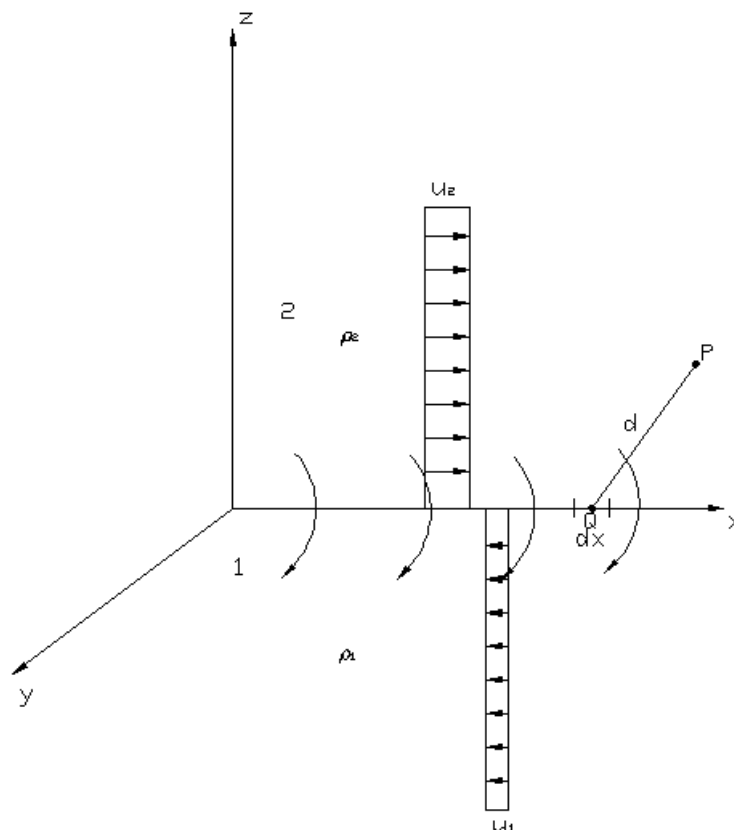


figura 1

La linea suddivide il campo, ipotizzato essere non viscoso, in due correnti uniformi a diversa velocità, U_1 e U_2 , e a diversa densità, ρ_1 e ρ_2 . Il campo è irrotazionale dappertutto ad esclusione della superficie vorticoso, dove c'è un salto di velocità e dove quindi si suppone concentrata la vorticità. Ciò vuol dire che la linea vorticoso rappresenta una discontinuità nel campo.

Possiamo definire la distribuzione dell'intensità dei vortici per unità di lunghezza come:

$$\gamma(x) = U_2 - U_1 \quad (1)$$

In effetti, come si può intuire, la differenza di velocità sopra definita va intesa in senso vettoriale.

E' utile valutare la velocità indotta da un elemento di vortice di lunghezza dx posto nel punto Q in un punto P in prossimità della linea:

$$v(P) = \gamma(x) dx / 2\pi d \quad (2)$$

dove d rappresenta la distanza tra i due punti P e Q.

Naturalmente la velocità indotta dalla distribuzione di vortici nel punto P dipende dall'integrale esteso alla lunghezza del vortice. Prima di iniziare l'analisi della stabilità della linea vorticoso nelle ipotesi assegnate, conviene considerare le diverse situazioni fisiche riconducibili al modello introdotto.

Consideriamo dapprima due correnti uniformi (in realtà già questa è una semplificazione) con diversa velocità che scorrono sui due lati di una lastra: le due correnti iniziano ad interagire nel al bordo di uscita della lastra, dove si genera una zona di mescolamento tra le due.

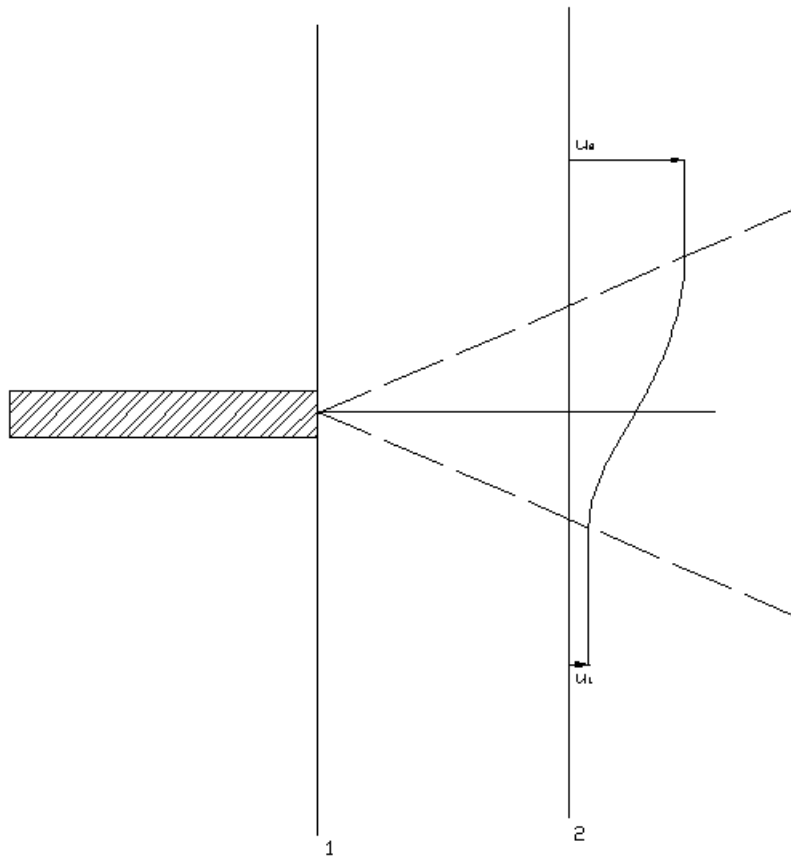


figura 2

Per effetto della viscosità, la corrente U_2 tende ad accelerare la corrente U_1 , e quest'ultima tende a frenare la corrente U_2 . Si noti dall'illustrazione sopra riportata il particolare profilo di velocità ad una certa distanza dal punto in cui le due correnti sono venute in contatto: c'è una *zona di interazione* in cui il profilo di velocità, per effetto della diffusione della quantità di moto dovuta dalla viscosità, non è più piatto, ma varia in modo da raccordare con continuità U_2 e U_1 ; al di fuori di tale zona il profilo di velocità continua ad essere uniforme, ritenendo ivi gli effetti della viscosità trascurabili. In un certo senso, la zona di interferenza (zona di mescolamento o *mixing layer*) è analoga allo strato limite. Adottando delle semplificazioni, è possibile rappresentare la curva del profilo di velocità nella zona di interazione tramite delle funzioni analitiche nella variabile y , ad esempio con $\text{arctgh}(y)$.

Un altro caso di interesse pratico è quello di un getto emergente da un ugello in un altro fluido in quiete:

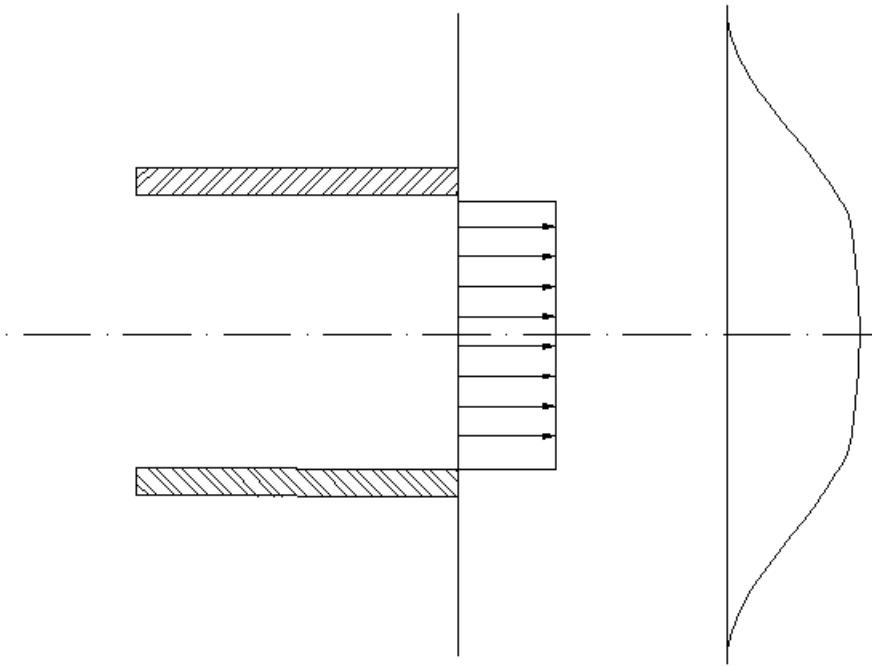


figura 3

in cui è stata fatta l'ipotesi che la velocità del getto all'uscita dall'ugello sia uniforme. Osserviamo dalla figura qual è l'andamento delle velocità ad una certa distanza dall'uscita dell'ugello.

Anche in questa situazione si parla di zona di mescolamento, ovvero di *mixing layer*, ovvero ancora di *free mixing layer* perché, a differenza dello strato limite, non c'è la presenza di una parete. Flussi di questo tipo sono anche detti *free shear flows*, ossia *flussi viscosi liberi*. Si noti che in generale tutti i moti dominati da effetti viscosi, quindi da effetti di diffusione di quantità di moto per viscosità, sono detti *shear flows*, quelli *free* non risentono della presenza di una parete. In quest'ultimo caso si parla spesso di *wall shear flows*, ovvero di *flussi viscosi di parete*. Così come per lo strato limite, anche le dimensioni del *free mixing layer* sono limitate, anche se matematicamente gli effetti diffusivi si annullano asintoticamente solo all'infinito.

Lo studio dei getti non è un qualcosa di puramente accademico, ma trova ampia applicazione in diverse tecnologie. Si pensi al caso di un getto di liquido iniettato in aria in quiete attraverso un ugello molto piccolo, che dà luogo all'atomizzazione (o spray) del liquido, fenomeno per cui il liquido si frammenta in una nube di finissime goccioline. Lo studio della formazione dello spray è basilare in tutte le tecnologie dell'iniezione di combustibile in camera di combustione.

Le condizioni del flusso che producono la rottura del getto e quindi, successivamente, l'atomizzazione, sono riconducibili a fenomeni di instabilità del getto stesso. Uno studio completo di tale instabilità, attraverso il metodo ai modi normali, comporta la determinazione del moto base e la scrittura delle equazioni del disturbo, includendo per entrambi gli effetti viscosi. In un modello altamente semplificato, tuttavia, possiamo ipotizzare il *mixing layer* molto sottile, e considerare, quindi, due campi di moto, entrambi non viscosi, separati da una linea vorticoso, attraverso la quale le velocità sono discontinue.

La linea di discontinuità diventa così sede di una distribuzione uniforme di vortici di intensità pari alla differenza delle velocità delle due correnti. L'instabilità di una linea vorticoso in scenari di questo tipo prende il nome di instabilità di Kelvin-Helmholtz. Il vantaggio della semplificazione è che riusciamo ad ottenere una soluzione analitica del problema, che non verrà smentita nelle sue linee essenziali dai risultati ottenibili da modelli più completi.

Prima di illustrare formalmente l'applicazione dei modi normali, è interessante prevedere quali possono essere le caratteristiche di stabilità della linea vorticoso facendo ricorso a semplici ma efficaci considerazioni fisiche inizialmente sviluppate da Kelvin e successivamente da Batchelor negli anni '60.

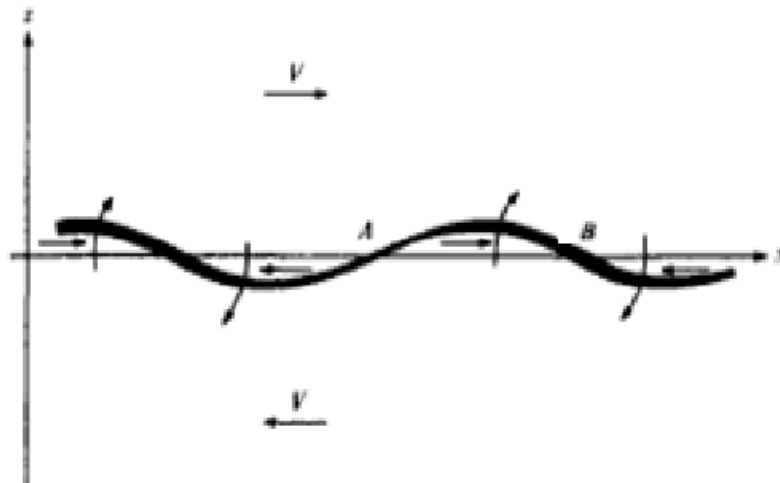


Figura 4

Si consideri dunque una linea vorticoso e si supponga che questa per qualche motivo risulti perturbata in modo da assumere una forma sinusoidale. Consideriamo i due punti A e B della figura ed i loro rispettivi intorno distesi lungo x: per effetto della perturbazione, l'intorno di B subisce una rotazione in senso orario, analogamente A una in senso anti-orario. Tali rotazioni sono puramente cinematiche. La rotazione di B genera un incremento di velocità dU rivolto verso destra sopra la linea vorticoso e verso sinistra sotto tale linea. Un ragionamento duale può farsi per il punto A.

Ritornando all'intorno del punto B, la vorticità per unità di lunghezza è aumentata di una quantità $2dU$ e di conseguenza aumenta anche il modulo della velocità indotta, diretta verso destra sopra e verso sinistra sotto la linea. Ciò esalta la rotazione cinematica oraria dell'intorno del punto B, amplificando la successione di effetti primi descritti. Gli effetti del disturbo iniziale si esaltano, conducendo rapidamente ad una instabilità. Da qui la conclusione che *ogni campo di moto caratterizzato da due correnti uniformi a velocità differenti separate da una linea vorticoso è sempre instabile*.

Approccio analitico ai modi normali

Con riferimento alla figura 1, ipotizziamo che anche per il campo perturbato gli effetti viscosi siano trascurabili. Anche tale assunzione va sempre presa con cautela perché,

contrariamente a quanto suggerisce l'intuito, esistono situazioni in cui la viscosità può svolgere un ruolo destabilizzante.

Se il moto è non viscoso allora possiamo esprimere il campo mediante i potenziali della velocità:

$$\underline{v}_1 = \nabla\phi_1 \quad (3a)$$

$$\underline{v}_2 = \nabla\phi_2 \quad (3b)$$

E, applicando l'equazione di continuità, si ha:

$$\nabla^2\phi_1 = 0 \quad (4a)$$

$$\nabla^2\phi_2 = 0 \quad (4b)$$

Finora ci siamo riferiti alle grandezze totali, quindi, ricordando che le velocità sono somma di una quantità base e della perturbazione, si può porre:

$$\phi_{1,2} = \bar{\phi}_{1,2} + \phi'_{1,2} \quad (5)$$

Sostituendo le espressioni di $\phi_{1,2}$ nelle equazioni di Laplace otteniamo:

$$\nabla^2\phi'_{1,2} = 0 \quad (6)$$

che, risolta, fornisce l'espressione per il campo di velocità dei disturbi.

Dobbiamo ora accoppiare alle equazioni del disturbo delle opportune condizioni al contorno, due per il campo 1 e due per il campo 2. Anche se nell'espressione del laplaciano compaiono le derivate seconde rispetto a x e a y, non imponiamo condizioni lungo x e lungo y, ma solo lungo z, perché il moto è risolto con modi normali spaziali in x e y.

Circa le condizioni asintotiche, si noti preliminarmente che deve risultare:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \underline{v}_1 = U_1 \underline{i} \quad (7a)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \underline{v}_2 = U_2 \underline{i} \quad (7b)$$

ovvero che il disturbo all'infinito si smorza, cioè

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \underline{v}'_{1,2} = \underline{0} \quad (8)$$

dove z va considerato in valore assoluto. Poiché \underline{v} è legato al $\nabla\Phi$, possiamo anche imporre:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \phi'_{1,2} = 0 \quad (9)$$

Imponiamo ora una condizione cinematica tra i due fluidi, che viene fuori dalla congruenza cinematica dei punti che si trovano sulla superficie di separazione dei due fluidi. Per imporre tale condizione, introduciamo la funzione ξ , funzione di spostamento dei punti dell'interfaccia lungo l'asse z, che dipende da x, y, e t (tempo). Naturalmente, $\xi = 0$ indica la

superficie dell'interfaccia indisturbata, Inoltre, ξ è un'ulteriore incognita, infatti il presente problema è a frontiera libera, ovvero soluzione del problema stesso.

Se i due campi fossero in quiete, la velocità verticale del disturbo dovrebbe coincidere con la variazione nel tempo della frontiera, dal momento che una particella che sta sulla frontiera determina con il suo spostamento la velocità del campo in quel punto. Quindi, per $\xi=z$ si ha che

$$w_2(\xi)=\partial \xi/\partial t \quad (10a)$$

e analogamente

$$w_1(\xi)=\partial \xi/\partial t \quad (10b)$$

Nel momento in cui i campi non sono in quiete, non possiamo più dire che $w_{1,2}(\xi)=\partial \xi/\partial t$, perché nel valutare la rapidità di variazione dell'elevazione verticale dell'interfaccia occorre considerare che l'interfaccia è in moto lungo x e y.

Ciò può essere espresso sinteticamente attraverso la derivata sostanziale:

$$w_{1,2}(\xi)=D\xi/Dt \quad (11)$$

ovvero:

$$D\xi/Dt=\partial \xi/\partial t + \underline{v} \bullet \nabla \xi \quad (11)$$

Si noti che il secondo termine è nullo se $\underline{v} = 0$ (campo in quiete), $\nabla \xi = 0$ (ξ è una superficie piana), i due vettori, velocità e gradiente della superficie, sono mutuamente ortogonali.

Con riferimento alla presente applicazione, per le caratteristiche del moto base e nell'ipotesi di piccoli disturbi, si ottiene:

$$\underline{v} \bullet \nabla \xi = U \partial \xi/\partial x \quad (12)$$

in quanto $u' \partial \xi/\partial x$ e $v' \partial \xi/\partial y$ sono termini quadratici nella perturbazione e $V \partial \xi/\partial y = 0$ perché $V = 0$.

La condizione al contorno cinematica si esprime:

$$w'_{1,2}(\xi) = \partial \xi/\partial t + U_{1,2} \partial \xi/\partial x \quad (13)$$

in quanto in $w_{1,2}$ la quantità base è nulla e abbiamo solo la componente del disturbo.

E' anche importante osservare che nell'ambito dell'analisi lineare le quantità perturbate da valutate all'interfaccia perturbata sono identificabili con quelle calcolate sull'interfaccia indisturbata, cioè per $z = 0$. Si tratta di una semplificazione molto vantaggiosa che può essere giustificata sviluppando $w'(\xi)$ in serie di Taylor di punto iniziale 0:

$$w'(\xi) = w'(0) + (\partial w'/\partial z) \zeta + \text{termini ordine superiore}, \quad (14)$$

in cui a secondo membro tutti i termini con le derivate sono trascurabili perché non lineari nelle quantità delle perturbazioni.

In conclusione:

$$\partial \phi_{1,2}/\partial z (0) = \partial \xi/\partial t + U_{1,2} \partial \xi/\partial x \quad (15)$$

avendo espresso $w'_{1,2}$ in termini del potenziale.

Le condizioni cinematiche, tuttavia, non sono sufficienti a chiudere il problema. Esse, infatti hanno introdotto una nuova incognita, ξ , pertanto abbiamo bisogno di una nuova equazione, che esprime l'equilibrio dinamico della linea vorticoso. Nelle presenti condizioni tale equilibrio è garantito dalla continuità delle pressioni nei due campi all'interfaccia:

$$p_2(\xi) = p_1(\xi) \quad (16a)$$

E' opportuno anticipare qui che se il moto fosse stato viscoso, avremmo dovuto sostituire la continuità delle pressioni con quella degli sforzi normali:

$$\sigma_{z2}(\xi) = \sigma_{z1}(\xi) \quad (16b)$$

Si noti, inoltre, che abbiamo trascurato gli effetti della tensione superficiale. Vedremo nel seguito come la condizione di equilibrio dinamico dell'interfaccia può essere modificata per includere tali fenomeni interfacciali.

Ritornando al presente problema, per l'ipotesi di moto non viscoso, è conveniente esprimere la pressione attraverso la relazione di Bernoulli valida per un campo instazionario:

$$p = \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + c - \frac{1}{2} \nabla \phi \bullet \nabla \phi - gz \right) \quad (17)$$

L'uguaglianza delle pressioni all'interfaccia si scrive:

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + c_1 - \frac{1}{2} \nabla \Phi_1 \bullet \nabla \Phi_1 - gz \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + c_2 - \frac{1}{2} \nabla \Phi_2 \bullet \nabla \Phi_2 - gz \right) \quad (18)$$

dove occorre considerare che:

$$\phi_{1,2} = \bar{\phi}_{1,2} + \phi'_{1,2} \quad (5)$$

Sostituendo tale espressione nell'uguaglianza precedente e linearizzando il problema si ottiene:

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi'_1}{\partial t} + \nabla \bar{\phi}_1 \bullet \nabla \phi'_1 - g\xi \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi'_2}{\partial t} + \nabla \bar{\phi}_2 \bullet \nabla \phi'_2 - g\xi \right) \quad (18)$$

Si noti che, pur avendo asserito che le quantità perturbate vanno calcolate all'interfaccia indisturbata ($z = 0$), in tale formula compare il termine $g\xi$, perché gli effetti gravitazionali legati alla quota sono lineari e dunque non trascurabili.

Riassumendo, le condizioni al contorno da imporre al problema sono:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \phi'_{1,2} = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi'_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi'_1}{\partial z} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi'_1}{\partial t} + \nabla \bar{\phi}_1 \bullet \nabla \phi'_1 - g\xi \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi'_2}{\partial t} + \nabla \bar{\phi}_2 \bullet \nabla \phi'_2 - g\xi \right) \quad (18)$$

Prima di procedere alla risoluzione analitica del problema, si introducano i moti normali temporali e spaziali:

$$\phi'_{1,2} = \hat{\phi}_{1,2}(z) e^{st} e^{i(kx+ly)} \quad (19)$$

$$\xi = \hat{\xi} e^{st} e^{i(kx+ly)} \quad (20)$$