Lezione 15/04/08 STF

Instabilità di un getto gravitazionale (continuata)

Riscriviamo il sistema di equazioni linearizzate del disturbo che consiste nell'equazione di Laplace per il campo delle pressioni e due condizioni al contorno (C.C.), quella della congruenza cinematica e quella del salto di pressione:

$$\begin{cases} \nabla^2 p' = 0 \\ u'_r = \dfrac{\partial \zeta'}{\partial t} \quad , \; r = a \\ p' = -\gamma\left(\dfrac{\zeta'}{a^2} + \dfrac{\partial^2 \zeta'}{\partial x^2} + \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 \zeta'}{\partial \vartheta^2}\right) \quad , \quad r = a \end{cases} \tag{1}$$

Rivediamo inizialmente come si ottiene il terzo termine del secondo membro della C.C. per il salto di pressioni attraverso una serie di semplificazioni:

$$\frac{1}{(a^2+\zeta')^2} \cong \frac{1}{a^2+\zeta'^2+2a\;\zeta'} = \frac{a^2-2a\zeta'}{a^4-4a^2\zeta'^2} = \frac{1}{a^2} - 2\frac{\zeta'}{a^3} \tag{2}$$

(abbiamo semplificato di volta in volta tutti i termini in cui compaiono i termini quadratici del disturbo ζ'). Per mantenere l'ordine di accuratezza prestabilito dovremmo conservare i due termini trovati, ma poiché questi vanno moltiplicati per la derivata $\dfrac{\partial^2\zeta'}{\partial\vartheta^2}$, $\dfrac{\zeta'}{a^3}$ darà origine ad un termine contenente il disturbo di ordine superiore al primo, e va semplificato. Resta, dunque, unicamente $\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\zeta'}{\partial\vartheta^2}$.

Per imporre le C.C. è necessario disporre del campo di velocità, ottenibile dalle Navier Stokes una volta calcolata la pressione.

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} u'_x \\ u'_r \\ u'_\vartheta \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial p'}{\partial x} \\ \dfrac{\partial p'}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p'}{\partial \vartheta} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

La strategia da seguire per risolvere il nostro problema è la seguente:

1. risolvere il campo della pressione;
2. sfruttare le Navier Stokes per trovare le componenti di velocità da sostituire nella C.C. di congruenza conematica.
3. sostituire la pressione nella C.C. relativa al salto di pressione.

Nel procedimento sopra sintetizzato vanno anche tenute in conto le posizioni dei modi normali:

$$\begin{Bmatrix} u'_x \\ u'_r \\ u'_\vartheta \\ \zeta' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_x(r) \\ \hat{u}_r(r) \\ \hat{u}_\vartheta(r) \\ \hat{\zeta} \end{Bmatrix} e^{st} e^{i(kx+n\vartheta)} \tag{4}$$

Abbiamo modi normali nella direzioni verticale, ovvero nella direzione del moto del getto, e nella direzione azimutale. Quindi *k* e *n* sono due numeri d'onda, e affinché siano soddisfatte le condizioni di periodicità nella direzione rappresentata da ϑ, è necessario che *n* sia un numero intero.

L'espressione del laplaciano della pressione in coordinate cilindriche diventa:

$$\frac{d^2\hat{p}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\hat{p}}{dr} - \left(k^2 + \frac{n^2}{r^2}\right)\hat{p} = 0 \tag{5}$$

Questa è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare a coefficienti non costanti. Essa ha la forma di un'equazione di *Bessel modificata,* le cui soluzioni sono dette *funzioni di Bessel*.

Essendo $n \in N$, al variare di questo numero d'onda, avremo come soluzioni funzioni di Bessel di diverso ordine. L'equazione scritta è del secondo ordine, quindi l'integrale generale sarà combinazione lineare di due funzioni di Bessel.

Può essere conveniente moltiplicare la precedente equazione per r^2 :

$$r^2\frac{d^2\hat{p}}{dr^2} + r\frac{d\hat{p}}{dr} - \left(k^2r^2 + n^2\right)\hat{p} = 0 \tag{6}$$

e riscrivere il problema in termini della nuova variabile *kr*:

$$(kr)^2\frac{d^2\hat{p}}{d(kr)^2} + kr\frac{d\hat{p}}{d(kr)} - \left(k^2r^2 + n^2\right)\hat{p} = 0 \tag{7}$$

Come detto in precedenza, l'integrale generale è combinazione lineare delle due funzioni di Bessel:

$$\hat{p}(kr) = AI_n(kr) + BK_n(kr) \tag{8}$$

dove le costanti A e B si determinano imponendo le condizioni al contorno.

I_n e K_n sono le funzioni di Bessel modificate di cui nella figura seguente si riportano gli andamenti per n=0 e n=1 :

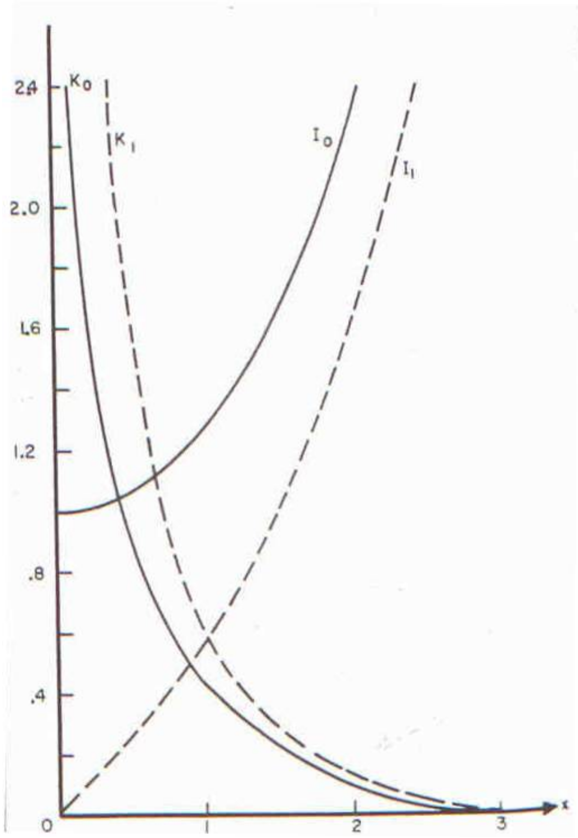

Fig.1: Andamento delle funzioni di Bessel modificate al variare di $x \equiv kr$

Per ogni valore n la funzione K_n diverge per x tendente a zero, ovvero per r tendente a 0 (cioè sull'asse del getto). Essendo questa una condizione non fisica, nell'integrale generale occorre imporre, per qualunque valore di n B=0. L'integrale generale diventa:

$$\hat{p}(kr) = AI_n(kr) \quad , \quad \forall n \tag{9}$$

Fatte le opportune sostituzioni le C.C. si riscrivono:

$$\begin{cases} AI_n(ka) = -\gamma(1-(ka)^2 - n^2)\dfrac{\hat{\zeta}}{a^2} \\ -\dfrac{A}{\rho a s}(ka)I'_n(ka) = s\hat{\zeta} \end{cases} \tag{10}$$

dove è utile osservare la presenza della nuova variabile ka che emerge nel momento in cui si applicano le C.C. r=a.

Osservazioni:

1. k, essendo un numero d'onda, ha le dimensioni del reciproco di una lunghezza; quindi la variabile ka rappresenta l'adimensionalizzazione del numero d'onda rispetto ad una grandezza tipica del sistema in esame, il raggio del getto a;

2. E' coinvolta anche la derivata della funzione di Bessel la quale, come si può verificare dalla figura sopra riportata, è tale che $I'_n > 0 \ \forall n$;

3. La relazione di dispersione attesa è algebrica del secondo ordine, ottenibile dal sistema lineare omogeneo (10) nelle incognite A e $\hat{\zeta}$.

Ponendo $ka = \alpha$ si ottiene:

$$s^2 = \frac{\gamma}{a^3 \rho} \frac{\alpha I'_n(\alpha)}{I_n(\alpha)}(1 - \alpha^2 - n^2) \tag{11}$$

E' utile osservare che $\alpha \geq 0$, $\frac{a^3 \rho}{\gamma} > 0$ ed ancora $\frac{I_n(\alpha)}{I'_n(\alpha)} \geq 0$ per ogni valore di n.
Di conseguenza la (11) si può sintetizzare come:

$$s^2 = C(1 - \alpha^2 - n^2) \tag{12}$$

avendo inglobato nella costante non negativa C il prodotto dei fattori sopra discussi.

Al fine di ricercare le condizioni di instabilità del getto, si noti che occorre e basta che il termine in parentesi tonde a secondo membro della (12) sia maggiore di zero. Se, al contrario, esso fosse negativo i due autovalori sarebbero immaginari ed il getto sarebbe neutralmente stabile.

Possiamo fare una distinzione fra due casi: $n \geq 1$ e n=0.

1. $n \geq 1$

Se n=1 si ottiene $s^2 = -C\alpha^2$, il che comporta che il getto è stabile per disturbi di qualunque numero d'onda. La stessa condizione si verifica anche per n>1.

2. n=0

In questo caso si ottiene $s^2 = C(1 - \alpha^2)$ ed il getto può essere sia stabile che instabile. Limitandosi a considerare numeri d'onda positivi, è facile verificare che $\alpha < 1$ comporta instabilità, $\alpha > 1$ stabilità. In definitiva, per disturbi assialsimmetrici (n=0) il sistema va classificato instabile.

Concludendo, si può affermare che il getto è sempre instabile per disturbi assialsimmetrici e per numeri d'onda tali che $\alpha < 1$. In termini di lunghezza d'onda dei disturbi $\lambda = 2\pi / k$, si può anche asserire che il getto è instabile per disturbi assialsimmetrici la cui lunghezza d'onda è maggiore della circonferenza indisturbata del getto stesso.

E’ interessante osservare, in analogia con quanto già trovato per l’instabilità di Kelvin-Helmhotz, che il disturbo più gravoso che dà instabilità è quello del tipo bidimensionale.