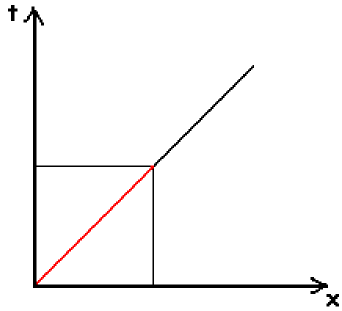
Studio della funzione di Green.

Nell'analizzare la funzione di Green di un flusso unidimensionale parallelo, applicando il metodo della fase stazionaria abbiamo trovato che il comportamento asintotico lungo le traiettorie *x/t* è:

$$G\left(\frac{x}{t},t\right) \approx e^{i\pi/4} \frac{e^{it\left[k_* \frac{x}{t} - \omega(k_*)t\right]}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k_*, \omega(k_*))\left[\frac{d^2\omega}{dk^2}(k_*)t\right]^{1/2}} \qquad (1)$$



E' utile ricordare che attraverso il metodo della fase stazionaria si trova che, lungo ogni traiettoria *x/t*, il disturbo è dominato da un numero d'onda k_* tale che

$$\frac{d\omega}{dk}(k_*) = \frac{x}{t} \qquad (2)$$

Il disturbo, quindi, assume la forma di un pacchetto d'onda centrato per ogni traiettoria in k_*, che viaggia alla velocità di gruppo data dalla parte reale dell'equazione (2).

Nell'espressione (1) della funzione di Green, l'esponente dell'esponenziale, tenuto conto che il numero d'onda e la frequenza sono entrambi complessi, si può scrivere convenientemente come:

$$i[k_{*_r} \frac{x}{t} - \omega_r(k_*)] + [\omega_i(k_*) - k_{*_i} \frac{x}{t}] \qquad (3)$$

per cui il fattore di crescita dell'ampiezza del pacchetto è:

$$\sigma = \omega_i(k_*) - k_{*_i} \frac{x}{t} \qquad (4)$$

Ora se

$$\forall \frac{x}{t}, \sigma \leq 0 \qquad (5)$$

il flusso è stabile. Ma se esiste almeno una direzione per la quale

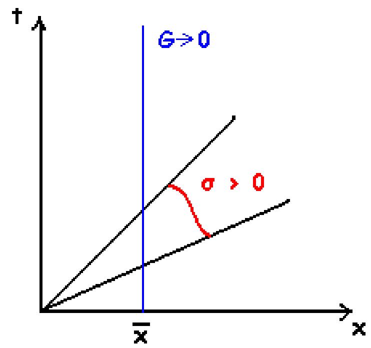
$$\sigma > 0 \qquad (6)$$

allora il flusso è instabile. Naturalmente se esiste una direzione per la quale si ha instabilità, per la continuità ne esistono infinite altre, tutte quelle ad essa contigue.

In quest'ultimo caso si aprono due scenari, di cui si è già parlato la volta scorsa, nei quali l'instabilità può essere convettiva o assoluta: tutto dipende da come il cuneo di direzioni in cui si verifica la (6) si estende nel piano *x/t*. Allo scopo di analizzare tale aspetto, è conveniente studiare il limite per $t \to \infty$ della funzione di Green, effettuato questa volta a stazione fissata. Infatti se, per ogni stazione $\bar{x}$, risulta:

$$\lim_{t \to \infty} G(\bar{x}, t) = 0 \qquad (7)$$

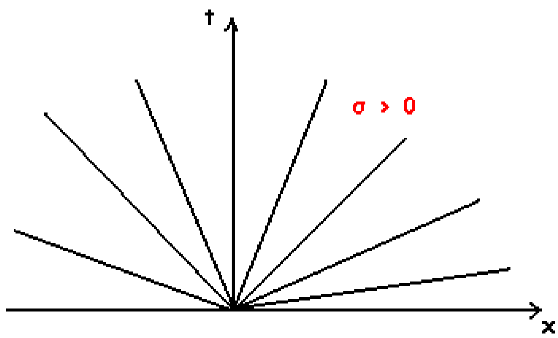
si ha instabilità convettiva come è indicato dalla figura:



Se invece esiste una stazione per la quale risulta

$$\lim_{t \to \infty} G(\bar{x}, t) = \infty \qquad (8)$$

allora l'instabilità è assoluta e la situazione è la seguente



Restringerei il cuneo e per analogia con la precedente inserirei la stazione $\bar{x}$ e il σ

La metodologia di analisi precedentemente riportata può essere semplificata se si osserva che allo scopo di distinguere tra i due comportamenti, assoluto o convettivo, è sufficiente analizzare il limite asintotico lungo la direzione *x/t*=0. In altri termini, detto k_0 il numero d'onda tale che

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_r (k_0) = 0 \tag{9}$$

in corrispondenza del quale si può valutare la frequenza $\omega_0 = \omega(k_0)$, è evidente che lungo la direzione *x/t*=0 risulta $\sigma = \omega_i(k_0) = \omega_{0i}$

Perciò, la natura dell'instabilità, assoluta o convettiva, dipende dal segno di ω_{0i}. In particolare, se:

- ω_{0i} >0 il flusso è assolutamente instabile
- ω_{0i} <0 il flusso è convettivamente instabile

Come è agevole rendersi conto, il presupposto di base per la precedente conclusione è che $\omega_{i\max} \geq \omega_{0i}$, dove con $\omega_{i\max}$ si è indicato il massimo della parte immaginaria della frequenza ω. E' anche utile sottolineare che in molte applicazioni pratiche accade che $\omega_{i\max}$ corrisponde ad un numero d'onda reale, $k = k_{\max}$. L'instabilità di getti analizzata in precedenza ne fornisce un esempio.

Modi normali spaziali

Il significato dell'instabilità convettiva può essere anche visto sotto un altro aspetto, cioè attraverso la sua connessione con i cosiddetti modi normali spaziali. Per alcune classi di moti viscosi, lo strato limite, il mixing layer, la scia a valle di corpi sottili, molti ricercatori negli anni 60-70 avevano osservato sperimentalmente che l'instabilità si manifesta per accumulo spaziale dei disturbi. Si osservi, a titolo di esempio, che mentre per il moto in condotti o in canali l'evidenza sperimentale mostra un numero di Reynolds di transizione del tipo globale, ovvero basato sul diametro del condotto o l'altezza del canale, per la transizione dello strato limite su lastra piana o su profili alari, la stazione della transizione è individuata mediante un numero di Reynolds critico locale. Queste osservazioni hanno portato allo sviluppo e all'applicazione dei modi normali spaziali in cui il numero d'onda è considerato una quantità complessa, mentre la frequenza è assunta reale, e può simulare la frequenza temporale di un disturbo acustico o, come in classici esperimenti effettuati in galleria del vento, la frequenza di vibrazione di un nastro disposto trasversalmente alla corrente su una lastra piana.

Nei modi normali spaziali il disturbo è posto, quindi, come:

$$\varphi' = \widehat{\varphi}(z)e^{-i\omega t}e^{kx}$$

con ω reale e k complesso. E' chiaro allora che il flusso è stabile se k_r<0 qualunque sia ω ed è, al contrario, instabile se esiste almeno un ω tale che k_r >0. In questo modello il flusso è stabile o instabile spazialmente, ovvero per $x \to \infty$.

In tempi più recenti la possibilità di applicazione del metodo ai modi normali spaziali è stata fortemente posta in discussione, specie sotto l'aspetto matematico. E naturalmente sono state riscontrate diverse situazioni in cui le risultanze emerse dall'applicazione di tale metodo si sono rilevate errate. Il punto è che l'evoluzione spazio-temporale di un disturbo dovrebbe correttamente emergere dalla risoluzione di un problema di valori iniziali in cui il disturbo stesso è localizzato nel tempo (t=0) e nello spazio (x=0).

Allo scopo di analizzare più dettagliatamente tale aspetto, con simbolismo analogo a quello adottato per determinare la funzione di Green, si pone:

$$L\{\varphi'\} = \delta_x(0) \; e^{-i\omega_F t} \tag{10}$$

dove si è indicato con ω_F la frequenza reale della forzante.

Come nel caso della funzione di Green (risposta impulsiva), effettuando dapprima l'integrale in ω mediante la valutazione dei residui, e poi applicando il metodo della fase stazionaria, il comportamento asintotico di φ' al tendere di $t \to \infty$, per ogni fissata direzione *x/t* risulta essere:

$$\varphi'(x,t) \propto \frac{e^{i[k_* x - \omega_* t]}}{[\omega_* - \omega_F]\frac{\partial D}{\partial \omega}[k_*, \omega_*]\left[\frac{d^2\omega}{dK^2}(k_*)t\right]^{\frac{1}{2}}} + i\frac{e^{i[k^+(\omega_F)x - \omega_F t]}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}[k^+(\omega_F), \omega_F]}H(x) - i\frac{e^{i[k^-(\omega_F)x - \omega_F t]}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}[k^-(\omega_F), \omega_F]}H(-x) \tag{11}$$

Ci sono sostanzialmente due tipi di contributi. Il primo è analogo a quello ottenuto in precedenza per la risposta impulsiva. Il secondo contributo è somma di due termini, uno associato al ramo di numeri d'onda k^+ e l'altro associato al ramo di numeri d'onda k^-, che rappresentano i due rami spaziali di k restituiti dalla relazione di dispersione minimale per $\omega = \omega_F$, e costituisce la parte stazionaria della risposta. La funzione *H(x)* vale zero per *x* minore di zero e 1 per *x* maggiore di zero. Di conseguenza, il primo addendo del secondo contributo è significativo solo per stazioni a valle di quella in cui è localizzato il disturbo, il secondo addendo è significativo solo per stazioni a monte.

Il primo contributo ha chiaramente la forma di un pacchetto d'onda e costituisce la cosiddetta parte transitoria della risposta il cui comportamento asintotico per $t \to \infty$ può essere valutato mediante il metodo della fase stazionaria. Si noti anche come esso diverge se $\omega_* = \omega_F$, cioè in condizioni di risonanza. Il secondo contributo, invece, rappresenta due modi normali spaziali, uno propagantesi verso destra, l'altro in direzione opposta. Questo secondo contributo, puramente oscillante nel tempo, costituisce la parte stazionaria della risposta e può amplificarsi o smorzarsi nello spazio.

Ciò premesso, è conveniente analizzare la risposta (11) a stazione fissata. Se l'instabilità è assoluta, per definizione ogni stazione del sistema risulta "contaminata" dal disturbo in tempi lunghi, la parte stazionaria della soluzione, limitata nel tempo, non avendo alcun significato. Viceversa, se l'instabilità è convettiva, ad ogni stazione il limite della parte transitoria è nullo, rimanendo perciò significativo il secondo contributo, quello oscillante nel tempo a frequenza reale $\omega = \omega_F$ rappresentato dai modi normali spaziali.

Si può allora trarre la conclusione che i modi normali spaziali hanno significato matematico, e quindi possono essere impiegati con efficacia per predire il comportamento di un flusso, solo nel caso in cui questo è instabile convettivamente.