

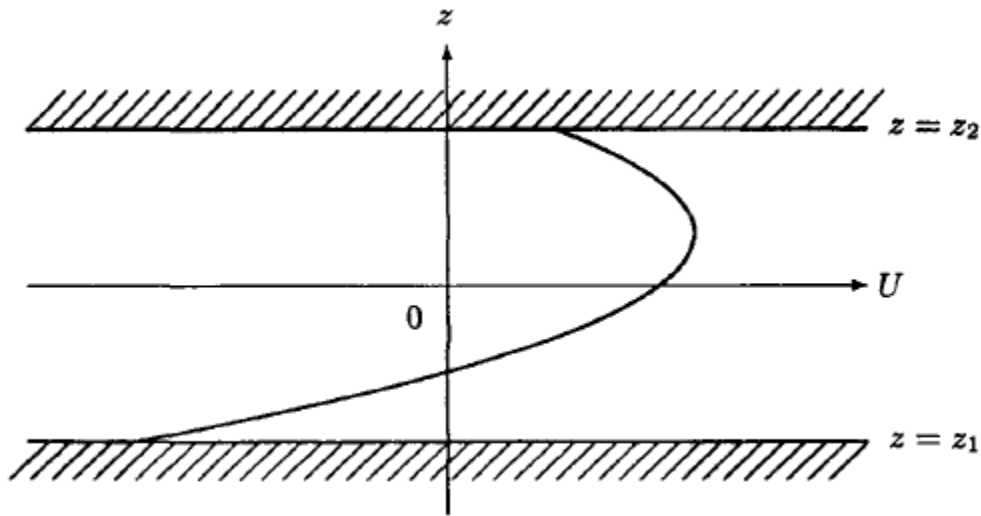
## Stabilità di flussi paralleli non viscosi

In questa lezione proseguiamo lo studio della stabilità di flussi invarianti rispetto a traslazioni lungo la coordinata nella direzione del moto nell'ipotesi di trascurabilità degli effetti viscosi. A dispetto di questa assunzione si fa riferimento ad un profilo di velocità non uniforme del moto base. In altri termini, essendo l'andamento della velocità variabile nella direzione ortogonale al moto, potremo trarre comunque delle conclusioni la cui validità può essere estesa ai flussi viscosi nel limite asintotico del numero di Reynolds che tende all'infinito. Nel seguito si avrà modo di evidenziare un effetto non intuitivo della viscosità rispetto alla stabilità di un flusso.

Per flussi di questo tipo, in base alla formulazione del teorema di Squire non viscoso, i disturbi più gravosi sono quelli 2D, quindi è possibile riformulare il problema introducendo la funzione di corrente. Si è pervenuti in questo modo all'equazione della stabilità di Rayleigh:

$$(\bar{U} - c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - \bar{U}'' \phi = 0 \quad (1)$$

dove  $\bar{U} = \bar{U}(z)$  è il moto base.



**Fig.1: Profilo di velocità del moto base**

Poiché il flusso è non viscoso le condizioni al contorno riflettono la circostanza che le pareti del canale sono linee di corrente, quindi non deve esserci penetrazione del moto in direzione ortogonale ad esse:

$$\phi(z_1) = \phi(z_2) = 0 \quad (2)$$

Si ricorda in questa sede che, assegnato un moto base e l'altezza del canale, il metodo dei modi normali conduce ad una relazione di dispersione del tipo:

$$\mathcal{F}[\bar{U}(z); z_1, z_2; \alpha; c_i] = 0 \quad (3)$$

L'evoluzione asintotica del disturbo di numero d'onda  $\alpha$  segue l'andamento di  $\exp(\alpha c_i t)$ . Sono utili le seguenti osservazioni:

1. L'equazione è invariante rispetto al segno di  $\alpha$ , quindi ci si può limitare ad analizzare solo i disturbi con numero d'onda  $\alpha > 0$ , in modo che la condizione di instabilità o di stabilità risieda unicamente nel segno di  $c_i$ .
2. L'equazione e le sue C.C. appaiono reali nonostante il problema sia stato posto per delle grandezze complesse (autovalori  $c$  e autofunzioni  $\phi$ ). E' perciò possibile affermare che gli autovalori, così come le autofunzioni, sono quantità *complesse coniugate*. Quindi, se nello spettro è presente un certo autovalore  $c = c_r + c_i$ , deve essere presente anche il suo complesso coniugato  $c = c_r - c_i$ . In altri termini, se dall'equazione si ottiene un autovalore complesso, per ogni modo stabile se ne avrà uno instabile e viceversa. Questa circostanza era stata già riscontrata nel corso dell'analisi dell'instabilità di Kelvin-Helmholtz. In definitiva, se esistono autovalori complessi, il flusso è sempre instabile, ovvero ancora, condizione necessaria per la stabilità è che lo spettro sia reale,  $c = c_r$ . In questo caso, essendo  $c_i = 0$ , non avremo una stabilità asintotica, ma una stabilità neutra. Si noti anche che, non esistendo un parametro di controllo, non si può infatti propriamente parlare di stabilità marginale.

La precedente osservazione 2 è tipica dei flussi non viscosi.

Passiamo ora a formulare una condizione necessaria per l'instabilità nota come *criterio del punto di inflessione di Rayleigh*. Questo criterio afferma che condizione necessaria (non sufficiente) per avere instabilità è che il profilo di velocità presenti un punto di flesso. Se un profilo di velocità ha un punto di flesso è probabile che il flusso sia instabile, quindi si dovrà avere almeno un autovalore (complesso) con  $c_i > 0$ . Prima di fornire una classica dimostrazione del criterio del punto di flesso, è opportuno osservare che, in generale, lo spettro dell'equazione di Rayleigh è costituito da una parte discreta e da una continua. Quest'ultima è rappresentata da tutti i numeri reali  $c_r$  tali che  $\overline{U}(z) = c_r$ . A tal proposito si osservi che, essendo  $\overline{U}(z)$  sicuramente reale, i valori di  $c$  che soddisfano la precedente relazione saranno anch'essi reali  $c = c_r$ . L'insieme di tali valori  $c_r$  varia con continuità fra  $\overline{U}(z_1)$  e  $\overline{U}(z_2)$  e rende l'equazione di Rayleigh singolare. Sono proprio questi valori che forniscono la parte continua dello spettro.

E' ovvio che in caso di instabilità la parte dello spettro con autovalori instabili è quella discreta e si può anche mostrare che il numero di tali autovalori è pari al numero di punti di flesso del profilo, in generale uno o realisticamente al massimo due (caso delle scie).

Si procede, ora, ad una classica derivazione del criterio di Rayleigh.

Si riconsideri l'eq. (1) e, nell'ipotesi di instabilità, la si divida per  $\overline{U} - c \neq 0$ :

$$\phi'' - \alpha^2 \phi - \frac{\overline{U}''}{\overline{U} - c} \phi = 0 \quad (4)$$

Abbiamo precedentemente detto che se esiste un modo instabile, deve esistere anche un modo stabile visto che gli autovalori e le autofunzioni sono complessi coniugati:

$$c = c_r + c_i \Rightarrow c^* = c_r - c_i \quad (5)$$

$$\phi = \phi_r + \phi_i \Rightarrow \phi^* = \phi_r - \phi_i$$

Nell'ipotesi, dunque, che l'equazione di Rayleigh (4) sia scritta per un determinato autovalore instabile ed una determinata autofunzione, poiché esiste l'autofunzione coniugata, si moltiplichi tutta l'equazione per quest'ultima e si integri fra  $z_1$  e  $z_2$ :

$$\int_{z_1}^{z_2} [\phi'' \phi^* - \alpha^2 \phi \phi^*] dz - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\bar{U}''}{\bar{U} - c} \phi \phi^* dz = 0 \quad (6)$$

dove è opportuno subito notare che la quantità  $\phi \phi^* = |\phi|^2$  è il quadrato del modulo dell'autofunzione.

Sviluppiamo il primo termine del primo integrale utilizzando l'integrazione per parti:

$$\int_{z_1}^{z_2} \phi'' \phi^* dz = \int_{z_1}^{z_2} \phi^{*'} \phi' dz - [\phi' \phi^*]_{z_1}^{z_2} = \int_{z_1}^{z_2} |\phi'|^2 dz \quad (7)$$

in quanto per le C.C.  $\phi(z_1) = \phi(z_2) = 0 \Rightarrow \phi(z_1)^* = \phi(z_2)^* = 0$ .

Possiamo ora riscrivere la (6) moltiplicando e dividendo il secondo integrale per  $\bar{U} - c^*$  nel seguente modo:

$$\int_{z_1}^{z_2} [|\phi'|^2 - \alpha^2 |\phi|^2] dz - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\bar{U}''}{\bar{U} - c} \frac{\bar{U} - c^*}{\bar{U} - c^*} |\phi|^2 dz = 0 \quad (8)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} [|\phi'|^2 - \alpha^2 |\phi|^2] dz - \int_{z_1}^{z_2} \bar{U}'' \frac{(\bar{U} - c_r + ic_i)}{|\bar{U} - c|^2} |\phi|^2 dz = 0$$

Il primo integrale è una quantità tutta reale, mentre nel secondo è presente una parte reale e una immaginaria: Infatti sviluppando il prodotto otteniamo:

$$- \int_{z_1}^{z_2} \bar{U}'' |\phi|^2 \frac{(\bar{U} - c_r)}{|\bar{U} - c|^2} dz - ic_i \int_{z_1}^{z_2} \bar{U}'' \frac{|\phi|^2}{|\bar{U} - c|^2} dz \quad (9)$$

Affinché l'eq. (9) sia soddisfatta occorre che siano nulle sia la parte reale che quella immaginaria. Nell'ipotesi di instabilità risulta  $c_i \neq 0$ , e la parte immaginaria si annulla se e solo

se  $\int_{z_1}^{z_2} \bar{U}'' \frac{|\phi|^2}{|\bar{U} - c|^2} dz = 0$ . Affinché tale integrale sia nullo occorre e basta che l'integrando cambi

segno nell'intervallo di integrazione, cioè deve esistere un punto  $z = z_s$  tale che:

$$\bar{U}''(z_s) = 0 \quad (10)$$

il che equivale alla presenza di un punto di flesso nel profilo di velocità in  $z = z_s$ .

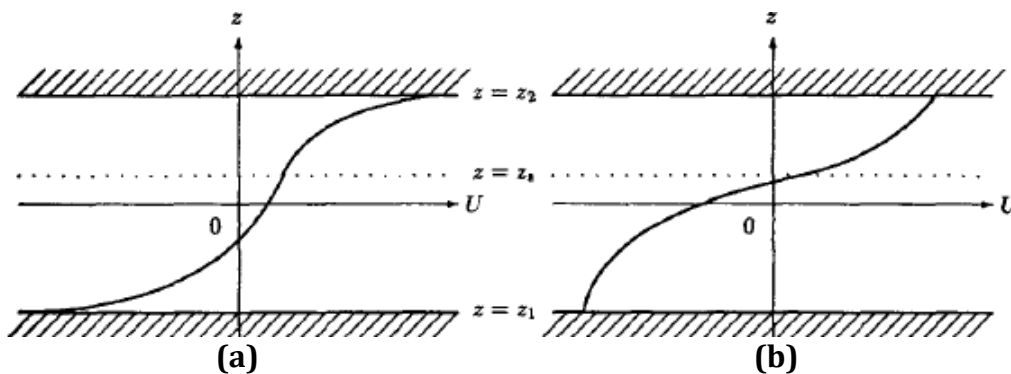
Di conseguenza, ad esempio, un profilo di velocità come quello parabolico è chiaramente stabile perché non presenta punti di flesso. Questa teoria trova riscontro anche nella transizione dello strato limite perché a valle della stazione dove il profilo di velocità mostra un flesso si ammette si ha la transizione.

Esiste un ulteriore criterio, più forte di quello di Rayleigh, che porta ad una condizione necessaria per l'instabilità, il *criterio di Fjørtoft*:

$$\exists z_s : \begin{cases} \bar{U}''(z_s) = 0 \\ \bar{U}''(\bar{U} - \bar{U}_s) < 0 \end{cases} \quad (11)$$

dove  $\bar{U}_s = \bar{U}(z_s)$ .

Nella figura seguente vengono riportati due profili con un punto di flesso per un moto completamente sviluppato in un canale, uno stabile, l'altro instabile secondo Fjørtoft.



**Fig.2: Profili di velocità con punto di flesso. (a) Stabilità; (b) possibile instabilità**

Il punto di flesso,  $z_s$ , si localizza dove il profilo cambia concavità.

Per la fig. 2(a) si ha :  $\left. \begin{array}{l} z > z_s \rightarrow \bar{U} > \bar{U}_s ; \bar{U}'' > 0 \\ z < z_s \rightarrow \bar{U} < \bar{U}_s ; \bar{U}'' < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$  la condizione di Fjørtoft non è rispettata e quindi il flusso è stabile.

Per la fig. 2(b) si ha:  $\left. \begin{array}{l} z > z_s \rightarrow \bar{U} > \bar{U}_s ; \bar{U}'' < 0 \\ z < z_s \rightarrow \bar{U} < \bar{U}_s ; \bar{U}'' > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$  condizione di Fjørtoft è verificata: il flusso può essere instabile.

### Stabilità di flussi paralleli viscosi

Se in base alla teoria della stabilità dei flussi non viscosi si trova che un flusso è stabile, si potrebbe a prima vista ipotizzare che tale conclusione è confermata anche quando si considerano gli effetti della viscosità. La presenza della viscosità, infatti, corrisponde ad un effetto intrinsecamente smorzante. L'evidenza sperimentale, però, smentisce tale intuitiva conclusione. Si trova, infatti, che un flusso stabile nell'ipotesi non viscosa risulta instabile per numeri di Reynolds moderatamente elevati. Per tali condizioni, perciò, la viscosità ha un effetto destabilizzante, e questa è certamente una risultanza non prevedibile intuitivamente. Nel corso della seguente trattazione si mostrerà che l'effetto destabilizzante della viscosità si

verifica in corrispondenza degli *strati critici*, vale a dire gli strati di fluido per i quali l'equazione di Rayleigh è singolare.

Nell'ipotesi di moto viscoso e completamente sviluppato, il moto base deve soddisfare la seguente equazione:

$$\mu \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \quad (12)$$

Se il moto è non accelerante si ha che la velocità  $\bar{U}$  è funzione solo della coordinata  $z$ :

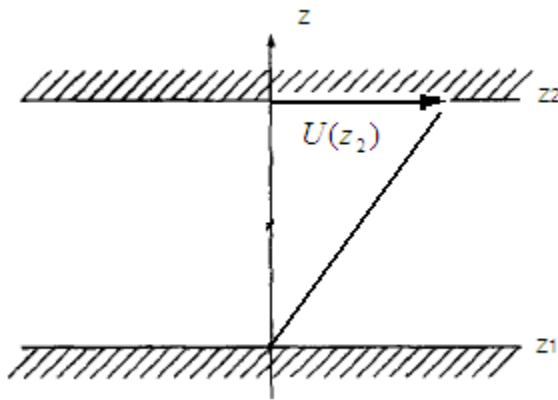
$$\bar{U} = \bar{U}(z) \quad (13)$$

Quindi si ottiene che  $\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2}$  non è funzione di  $x$ , ed il gradiente di pressione è costante lungo  $x$ :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \text{cost} \quad (14)$$

In definitiva il moto alla Poiseuille è caratterizzato da un profilo di velocità parabolico e da una pressione che decresce linearmente lungo  $x$ .

Questo discorso può essere esteso anche ai moti alla Couette. Tali moti si generano, quando uno dei bordi del canale è in moto relativo rispetto all'altro.



**Figura 3 - Profilo di velocità nel caso di moto alla Couette**

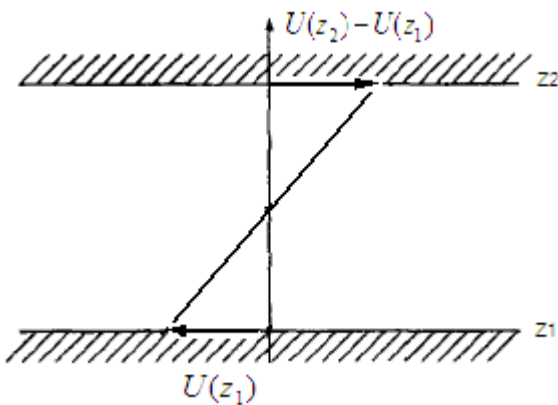
Nella figura 3 è rappresentato un moto alla Couette che si ha, quando la parete  $z_1$  è ferma, e la parete  $z_2$  è dotata di una velocità relativa  $U = U(z_2)$ .

Poiché il flusso è viscoso, devono essere imposte condizioni di *no slip* alla parete, che si traduce nell'imporre che la velocità del flusso sia nulla alla stazione  $z=z_1$  e pari a  $U(z_2)$  alla

stazione  $z_2$ . Il profilo di velocità sarà quindi lineare. Poiché allora risulta  $\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} = 0$ , imponendo

la (11) risulta anche che  $\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = 0$ . Il moto alla Couette è caratterizzato da un andamento lineare della velocità e da una pressione costante.

Se all'intero sistema si impartisce una velocità  $U(z_1)$  diretta verso sinistra si ottiene una situazione analoga, con un andamento delle velocità a farfalla:



**Figura 4 - Profilo di velocità alla Couette nel caso di pareti con velocità opposte.**

I moti alla Couette hanno una notevole importanza storica. Infatti, per la loro semplicità sono stati utilizzati per modellare moti con andamenti della velocità più complicati. Ad esempio il profilo di velocità alla Poiseulle o il profilo di velocità di un *mixing layer* può essere approssimato con un profilo lineare a tratti.

La teoria che si sta per esporre è valida per i flussi viscosi alla Couette e alla Poiseulle poiché questi sono rigorosamente paralleli. In realtà la teoria può essere estesa anche a flussi localmente paralleli, come ad esempio lo strato limite. Secondo, infatti, la teoria di Blasius si può scalare il profilo di velocità con due scale, una per la velocità, l'altra per la coordinata spaziale ortogonale al moto, entrambe funzione di  $x$ , forzandolo a diventare "simile"; in altri termini lo si vincola ad essere parallelo. Con questo artificio un profilo alla Blasius può essere studiato come un flusso reso di fatto parallelo. Un'altra complicanza nel caso dello strato limite è data dal fatto che il dominio di integrazione è illimitato, tuttavia poiché la velocità al di fuori di tale regione non varia, si può fissare come limite di integrazione lo stesso bordo dello strato limite e definire di fatto il dominio di integrazione limitato.

Poniamoci nelle ipotesi di flussi viscosi e rigorosamente paralleli, vale a dire immaginiamo di voler studiare il moto alla Poiseulle.

Le equazioni linearizzate del disturbo sono le seguenti:

$$\nabla \cdot \underline{V}' = 0 \quad (15)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) \underline{V}' + w' \frac{d\bar{U}}{dz} \underline{i} = -\nabla p' + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \underline{V}' \quad (16)$$

I disturbi sono decomposti in modi normali spaziali e temporali:

$$\begin{pmatrix} u'(t, x, y, z) \\ v'(t, x, y, z) \\ w'(t, x, y, z) \\ p'(t, x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}(z) \\ \hat{v}(z) \\ \hat{w}(z) \\ \hat{p}(z) \end{pmatrix} \cdot \exp[i(\alpha x + \beta y - \alpha ct)] \quad (17)$$

Sostituendo le posizioni (17) nelle equazioni (15) e (16) si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} i(\alpha \hat{u} + \beta \hat{v}) + D\hat{w} = 0 \\ \left\{ D^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - i\alpha \operatorname{Re}(\bar{U} - c) \right\} \hat{u} = \operatorname{Re} \cdot \bar{U}' \hat{w} + i\alpha \operatorname{Re} \hat{p} \\ \left\{ D^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - i\alpha \operatorname{Re}(\bar{U} - c) \right\} \hat{v} = i\beta \operatorname{Re} \hat{p} \\ \left\{ D^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - i\alpha \operatorname{Re}(\bar{U} - c) \right\} \hat{w} = \operatorname{Re} D\hat{p} \end{cases} \quad (18)$$

dove  $\bar{U}' = \frac{d\bar{U}}{dz}$ ,  $D = \frac{d}{dz}$ , e  $D^2 = \frac{d^2}{dz^2}$ .

Il termine  $D^2 - (\alpha^2 + \beta^2)$  deriva dall'operatore laplaciano  $\nabla^2$ .

E' utile notare che se si divide per il numero di Reynolds e si fa tendere questo ad infinito si ottengono le equazioni non viscoso di Rayleigh.

Al sistema di equazioni (18) vanno associate opportune condizioni al contorno. Essendo il moto viscoso si potrà imporre la condizione di *no slip* alla parete e quindi che la velocità alla parete sia nulla, ovvero in termini delle singole componenti:

$$\begin{cases} u(z_1, z_2) = 0 \\ v(z_1, z_2) = 0 \\ w(z_1, z_2) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Le equazioni (18) con le condizioni al contorno (19) costituiscono un problema omogeneo del secondo ordine nelle incognite  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  e  $\hat{p}$  con condizioni al contorno anch'esse omogenee.

Assegnato il campo di moto base, e quindi il tipo di moto (Poiseuille, Couette), ed assegnato il numero di Reynolds, si dovrà risolvere il problema agli autovalori, e quindi bisognerà determinare la relazione di dispersione che in forma implicita:

$$F(\bar{U}; \operatorname{Re}; \alpha, \beta, c) = 0 \quad (20)$$

Applicando la trasformazione di Squire, vale a dire proiettando le equazioni (19) del disturbo tridimensionale lungo la direzione del vettore numero d'onda, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} i \cdot \tilde{\alpha} \cdot \tilde{u} + D\tilde{w} = 0 \\ \left\{ D^2 - \tilde{\alpha}^2 - i\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\text{Re}}(\bar{U} - c) \right\} \tilde{u} = \tilde{\text{Re}} \cdot \bar{U}' \cdot \tilde{w} + i\tilde{\alpha} \text{Re} \tilde{p} \\ \left\{ D^2 - \tilde{\alpha}^2 - i\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\text{Re}}(\bar{U} - c) \right\} \tilde{w} = \tilde{\text{Re}} D\tilde{p} \end{cases} \quad (21)$$

dove  $\tilde{\text{Re}} = \frac{\alpha}{\tilde{\alpha}} \text{Re}$ .

La seconda equazione rappresenta il bilancio di quantità di moto lungo la direzione del numero d'onda.

Le equazioni (21) scritte per un disturbo tridimensionale nella direzione del vettore numero d'onda, sono formalmente uguali alle equazioni che si ottengono dal sistema (18) nel caso di disturbo bidimensionale ( $\beta = 0, \hat{v} = 0$ ):

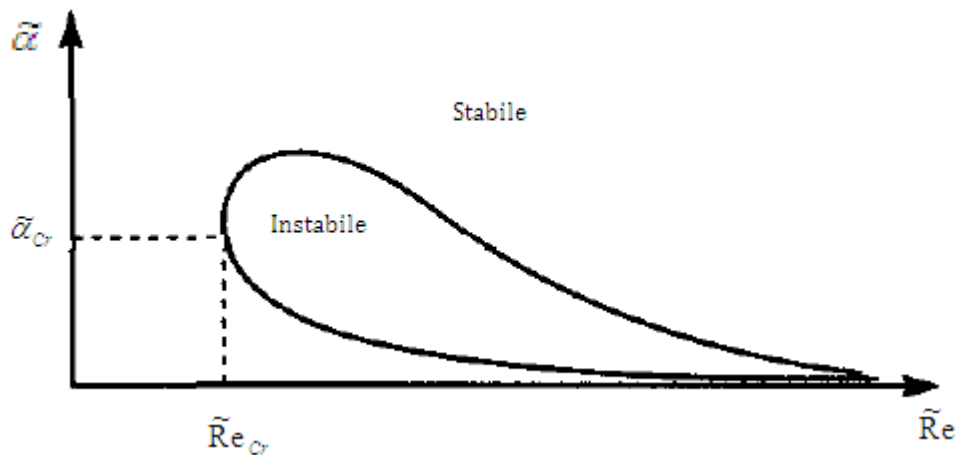
$$\begin{cases} i \cdot \alpha \cdot \hat{u} + D\hat{w} = 0 \\ \left\{ D^2 - \alpha^2 - i\alpha \cdot \text{Re}(\bar{U} - c) \right\} \hat{u} = \text{Re} \cdot \bar{U}' \cdot \hat{w} + i\alpha \text{Re} \hat{p} \\ \left\{ D^2 - \alpha^2 - i\alpha \cdot \text{Re}(\bar{U} - c) \right\} \hat{w} = \text{Re} D \cdot \hat{p} \end{cases} \quad (22)$$

Il problema "trasformato" agli autovalori ammette, perciò, una relazione di dispersione formalmente identica a quella che si ottiene risolvendo il problema bidimensionale. Ai fini della stabilità, si dovrà quindi verificare se esistono degli autovalori tali che  $\tilde{\alpha} c_i > 0$ . Contrariamente al caso non viscoso, qui va considerato anche l'effetto del numero di Reynolds.

E' utile notare che per bassi numeri di Reynolds certamente la viscosità ha un effetto stabilizzante e quindi il flusso è stabile  $\forall \tilde{\alpha}$  ( $\forall \alpha$  nel caso bidimensionale), anche in accordo con il teorema di Serrin che esclude biforcazioni; per valori del numero di Reynolds maggiori di un valore critico, si avrà che  $c_i > 0$  per un intervallo di valori di  $\tilde{\alpha}$  (di  $\alpha$  nel 2D).

Le precedenti considerazioni possono servire a giustificare, in questa sede preliminare, che un tipico andamento della curva di stabilità marginale è quello rappresentato nella figura di seguito riportata.

Gli autovalori ricavati, infatti, dipendono dal numero di Reynolds, e per ogni numero di Reynolds nel diagramma si rappresentano gli autovalori (in genere una coppia) con  $c_i = 0$ . Si osservi, inoltre, che il caso riportato in figura fa riferimento ad un moto base stabile nel limite non viscoso, infatti per Reynolds asintoticamente grande l'intervallo di numeri d'onda instabili si riduce a zero. Ed è anche opportuno osservare che per valori di Reynolds moderatamente grandi la viscosità ha chiaro effetto destabilizzante che, come si è discusso in precedenza, è un risultato certamente non atteso su basi intuitive.



**Figura 1 - Diagramma di stabilità marginale per il moto alla Poiseulle.**

Le curve nel caso bidimensionale e nel caso tridimensionale sono formalmente uguali, ma sugli assi si avrà  $(Re, \alpha)$  nel caso bidimensionale e  $(\tilde{Re}, \tilde{\alpha})$  nel caso tridimensionale. Di conseguenza, una volta ottenuto il parametro  $\tilde{Re}_{cr}$ , il corrispondente valore del numero di

Reynolds fisico critico sarà  $Re_{cr} = \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha} \tilde{Re}_{cr}$ , dove generale risulta  $Re_{cr} > \tilde{Re}_{cr}$ . Solo nel caso di disturbo bidimensionale, con  $\alpha = \tilde{\alpha}$ , si avrà  $\tilde{Re}_{cr} = Re_{cr}$ .

In conclusione, a parità di ampiezza di valore del numero di Reynolds fisico, si trova che il numero di Reynolds (fisico) critico nel caso bidimensionale è minore del numero di Reynolds critico nel caso tridimensionale. Si può perciò concludere che i disturbi bidimensionali sono più gravosi dei disturbi tridimensionali anche in presenza degli effetti viscosi. Questa è la cosiddetta formulazione viscosa del Teorema di Squire. Questo è spesso riformulato nel seguente enunciato: se un flusso è instabile ad un determinato numero di Reynolds rispetto ad un disturbo tridimensionale, allora il flusso risulta instabile ad un numero di Reynolds più basso rispetto ad un disturbo bidimensionale.

Quindi ai fini della stabilità ci si può limitare a studiare i disturbi bidimensionali nella direzione del moto.

Riformulando il problema in termini di funzione di corrente si ottiene un'equazione di stabilità analoga all'equazione di Rayleigh, ricavata nelle ipotesi di flusso non viscoso, detta equazione di Orr-Sommerfeld.