

# MODELLI AFFLUSSI DEFLUSSI

Al tecnico si presentano molti casi in cui non è sufficiente la determinazione delle massime portate tramite i criteri di similitudine idrologica, precedentemente esposti.

Si citano, a titolo di esempio i seguenti casi:

- 1- la valutazione, per il singolo bacino, dell'effetto dei particolari valori assunti dai fattori che determinano, a parità di pioggia, la diversa portata di piena (determinazione della portata indice);
- 2- il caso della ricostruzione dell'intera onda di piena, e per piogge di durate anche diverse da quella critica, necessarie per la progettazione delle vasche di laminazione;
- 3- la valutazione delle portate critiche per bacini per i quali mancano sufficienti dati per determinare la portata di piena per similitudine, (progettazione di reti fognarie); ecc.

In tutti questi casi bisognerà ricorrere a modelli di trasformazione delle piogge in portate (Modelli afflussi-deflussi).

Nella figura sono riportate tutte fasi da sviluppare per determinare, tramite un modello afflussi-deflussi, per un generico bacino, l'idrogramma di piena, con assegnato periodo di ritorno.

## 1. Determinazione delle curve di probabilità pluviometrica.

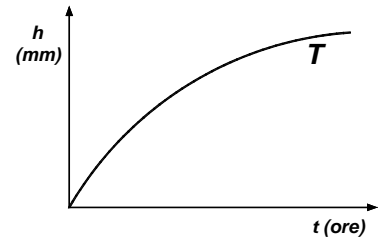
La determinazione delle curve di probabilità pluviometrica, con assegnato periodo di ritorno  $T$ , per un qualsiasi punto, è stata trattata quando si è parlato di come elaborare i dati delle piogge brevi.

Occorre solo osservare che, in linea di principio, non è detto che i tempi di ritorno delle piogge e delle piene da queste generate coincidano; infatti il tempo di ritorno delle piene dipende dalla probabilità combinata delle piogge che le generano e delle altre variabili che intervengono nella formazione delle piene (infiltrazione, tempo critico ecc.).

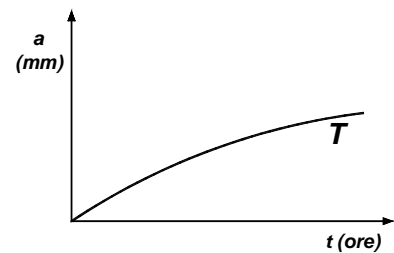
Tuttavia nella pratica si assume che: **facendo riferimento, per tutte le altre variabili, ai valori medi, il tempo di ritorno  $T$  delle piene coincida con quello delle piogge che le hanno generate.**

# FASI DELLA COSTRUZIONE DI UN MODELLO AFFLUS- SI-DEFLUSSI

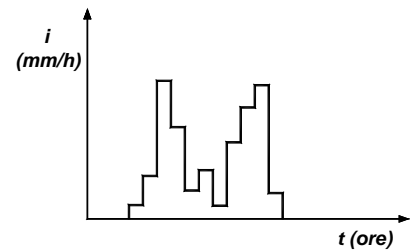
Individuazione della piovosità sul bacino.  
(Determinazione delle leggi di probabilità pluviometrica)



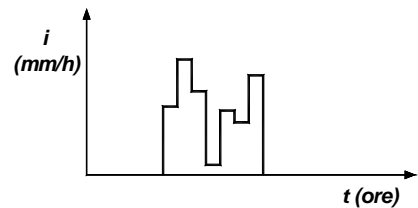
Determinazione degli afflussi sul bacino.  
(Ragguaglio, in relazione alle superfici, del C.P.P.)



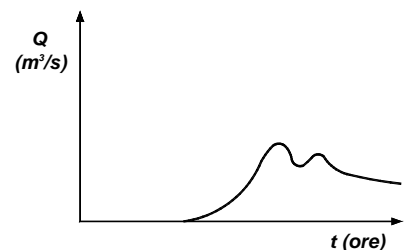
Posizione di un pluviogramma di progetto compatibile.



Determinazione del pluviogramma netto.  
(Mediante i modelli d'infiltrazione e ritenzione superficiale)



Costruzione dell'idrogramma di piena.  
(Mediante i modelli afflussi-deflussi)



## **2. Determinazione degli afflussi su di un bacino.**

La determinazione degli afflussi su di un bacino, in relazione alla durata  $t$ , al periodo di ritorno  $T$  e alla superficie del bacino è stata già trattata quando si è parlato di come elaborare i dati delle piogge brevi.

## **3. Determinazione del pluviogramma di progetto.**

La distribuzione temporale delle intensità di pioggia durante un evento (pluviogramma) è una informazione che, come si è detto allorché si è parlato della elaborazione delle piogge brevi, è completamente persa. D'altra parte ben difficilmente si sarebbero potuti ricavare, da questi, criteri generali applicabili agli eventi futuri.

Pertanto i pluviogrammi che si montano sono da considerarsi unicamente come delle posizioni ipotetiche del singolo progettista.

Tuttavia si possono fare due considerazioni:

1. L'esperienza ha evidenziato che, normalmente, gli eventi di pioggia si presentano "nidificati"; questo significa che in uno stesso evento le altezze di pioggia sono critiche per molte durate;
2. Nel costruire un idrogramma di progetto occorre rispettare la congruenza che, qualsiasi sia l'intervallo temporale  $d$  che si considera, l'altezza di pioggia complessiva non sia superiore a  $h(d)$ .

Nelle slides successive sono riportate molte proposte, avanzate da vari autori per la costruzione di pluviogrammi di progetto.

## **4. Determinazione del pluviogramma netto.**

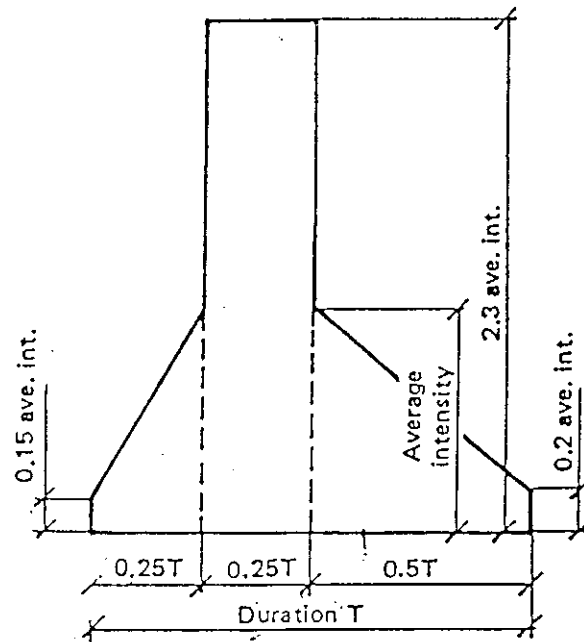
La distribuzione temporale delle intensità di pioggia efficace ai fini del deflusso (pluviogramma netto) va calcolata, partendo dal pluviogramma ipotizzato, tenendo conto delle sottrazioni per ritenzione superficiale e per infiltrazione, già trattate quando si è parlato dei bilanci delle piogge brevi.

## **5. Costruzione dell'idrogramma di piena.**

Tramite i modelli afflussi-deflussi, a questo punto, sarà possibile costruire l'idrogramma di piena relativo a quell'assegnato pluviogramma netto.

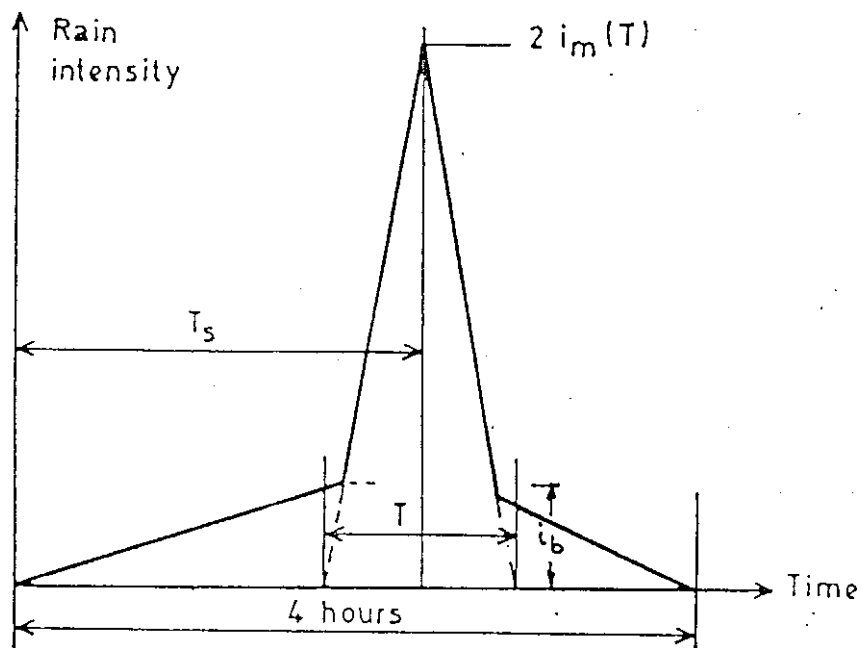
# PLUVIOGRAMMI DI PROGETTO

SIFALDA (1973)



# PLUVIOGRAMMI DI PROGETTO

DESBORDES (1978)

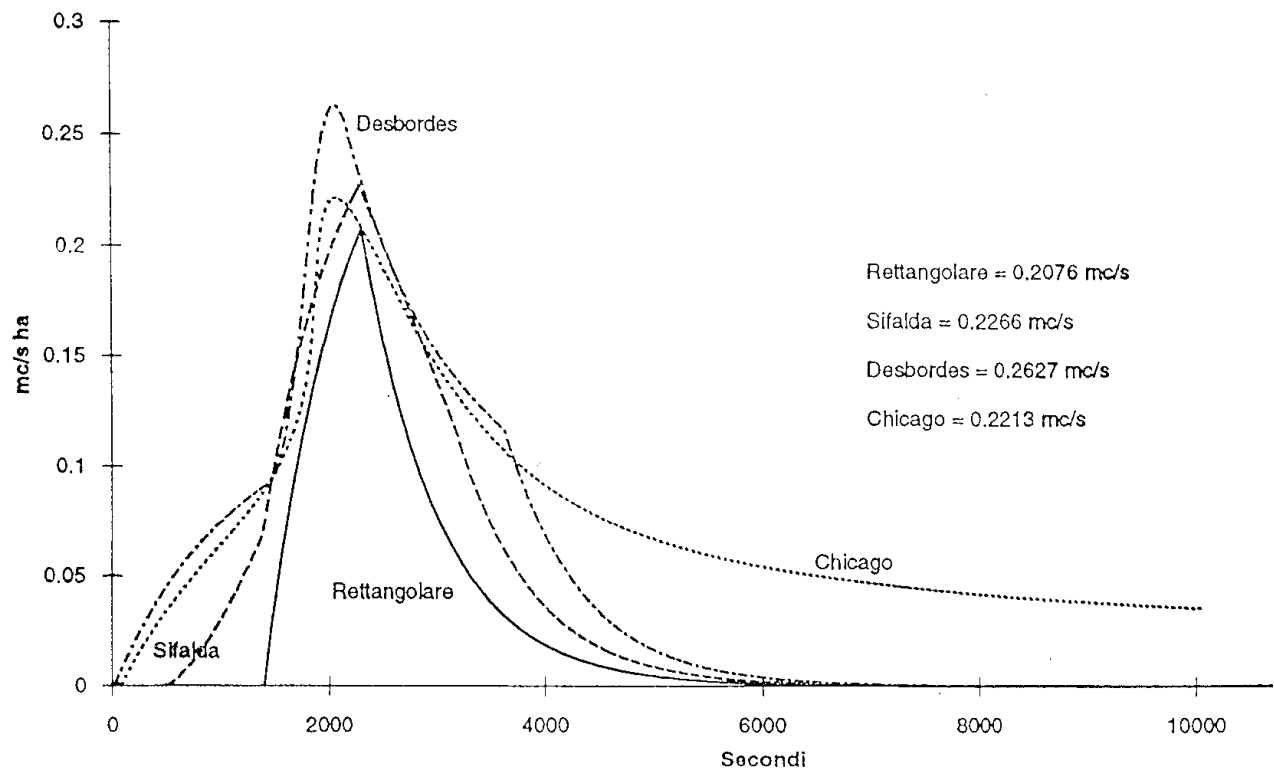


$$i_b = 2 \frac{h_{4h} - h_T}{4h - T}$$

# PLUVIOGRAMMI DI PROGETTO

## Confronto tramite serbatoio lineare

Serbatoio Lineare



# MODELLI LINEARI

Un modello si definisce lineare:

se è **stazionario**:

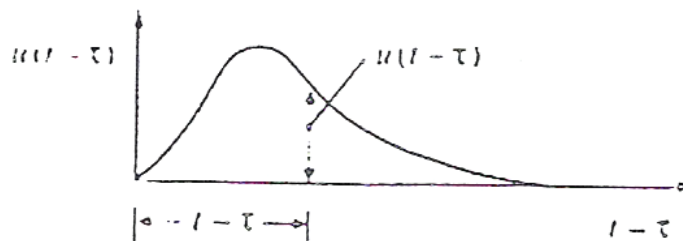
cioè se ad uguali impulsi di pioggia fornisce eguali risposte di piena, indipendentemente dalla storia pregressa;

se la **risposta della piena è linearmente dipendente dalla pioggia**: cioè se a pioggia doppia corrisponde portata doppia e a pioggia dimezzata corrispondono valori di piena dimezzati.

In questo caso varrà anche il principio della somma degli effetti.

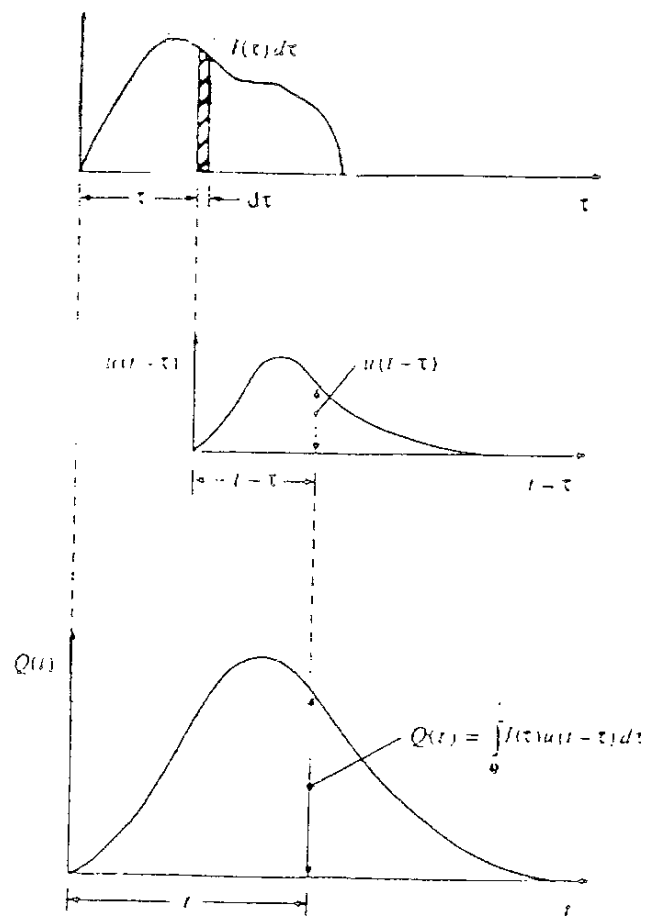
Tutti i modelli lineari possono rappresentare i singoli bacini con un **IUH (Idrogramma Istantaneo Unitario)**

L'IUH è la risposta, nel tempo, del bacino ad un afflusso istantaneo di volume unitario.



Pertanto le ordinate  $u(t)$  sono espresse in  $1/t$ ,  
e l'area sottesa è pari a 1.

# INTEGRALE DI CONVOLUZIONE



Nel primo diagramma è riportato l'andamento temporale degli affussi:

$$I(t) = \varphi a(t) S$$

Nel secondo diagramma è riportato l'andamento dell'IUH.

Dividiamo il pluviogramma in tanti successivi eventi di pioggia, istantanei, di durata  $dt$ , che pertanto avranno volume:

$$I(\tau)dt,$$

e indichiamo con  $\tau$  l'istante in cui si è verificata la pioggia.

La risposta del bacino, ad ogni singolo evento di pioggia, per il principio della linearità, sarà dato da:

$$dq(t) = I(\tau)u(t)dt.$$

Tuttavia, poiché l'IUH esprime la risposta, nel tempo, del bacino, a partire dall'istante  $\tau$  in cui si è verificata la pioggia, i singoli contributi di piena  $dq(t)$ , al comune istante  $t$ , saranno dati da:

$$dq(t) = I(\tau)u(t-\tau)dt.$$

Pertanto la portata all'istante  $t$ , somma di tutti i contributi, sarà data da:

$$Q(t) = \int_0^t I(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

che prende il nome d'integrale di convoluzione.

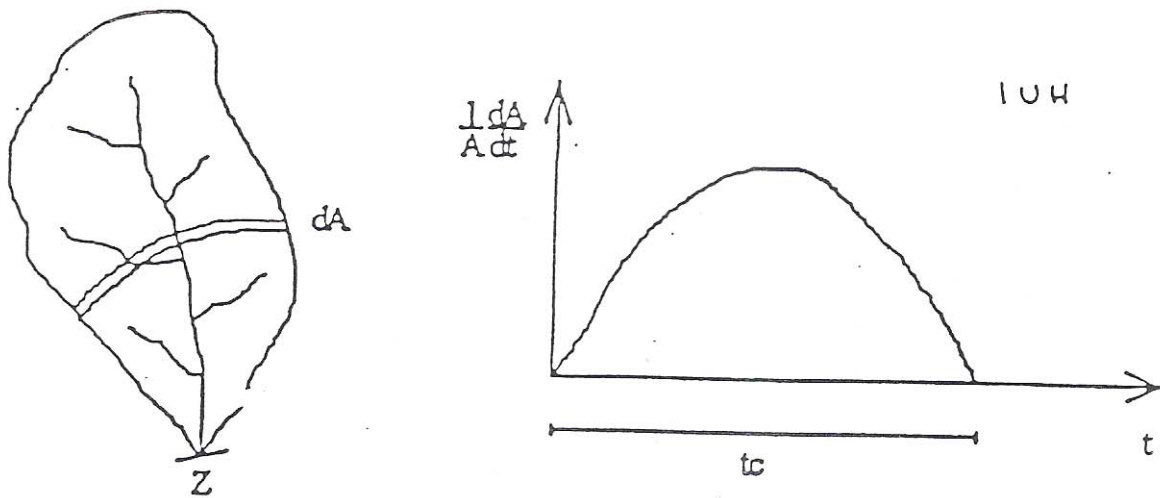
# MODELLO CINEMATICO

Il modello cinematico si basa sulle seguenti posizioni:

- gocce di pioggia, cadute contemporaneamente in punti diversi del bacino, impiegano tempi diversi per arrivare alla sezione di chiusura;
- - questo tempo (**tempo di corrivazione**) è caratteristico di ogni singolo punto ed invariante nel tempo, è, cioè, indipendente dalle singole condizioni di deflusso;
- 
- il contributo di ogni singolo punto alla portata di piena è direttamente proporzionale alla pioggia caduta nel punto;

Ne consegue che esiste un **tempo di concentrazione**  $t_c$ , caratteristico di ogni singolo bacino, necessario perché anche la pioggia caduta nel punto più lontano del bacino raggiunga la sezione di chiusura.

L'IUH del bacino sarà dato dal diagramma in figura:



In cui:

$dA/dt$  è l'area infinitesima con tempo di corrivazione pari a  $t$ .

L'IUH è il diagramma che riporta la distribuzione temporale di queste aree, adimensionalizzate rispetto all'area totale  $A$ .

L'IUH si può ricavare per derivazione della curva ipsografica del bacino, solo che si confonda l'asse delle quote  $h$  con l'asse dei tempi di corrivazione  $t$ .

Il metodo cinematico porta a determinare una pioggia critica:

$$t_p = t_c$$

e, per questa pioggia, una portata di piena:

$$Q = \varphi a A$$

che corrisponde alla **formula razionale** proposta da Lloyd-Davies, nel 1905.

# TEMPO DI CONCENTRAZIONE

Moltissime sono le formule empiriche disponibili in bibliografia che mettono in relazione il tempo di corrivazione  $T_c$  con le caratteristiche del bacino:

- Formula di Giandotti

$$T_c = \frac{4\sqrt{A} + 1.5L}{0.8\sqrt{H_m}} ;$$

- Formula di Kirpich

$$T_c = 0.066 L^{0.77} \left[ \frac{1000L}{0.8(H_{max} - H_0)} \right]^{0.385} ;$$

- Formula di Pasini

$$T_c = 0.108 \frac{(AL)^{1/3}}{0.8\sqrt{i}} ;$$

- Formula di Pezzoli

$$T_c = 0.055 \frac{L}{\sqrt{i}} ;$$

- Formula di Tournon

$$T_c = 0.369 \frac{L}{\sqrt{i}} \left[ \frac{A}{L^2 \sqrt{i/i_v}} \right]^{0.72} ;$$

- Formula di Puglisi

$$T_c = 6L^{2/3} (H_{max} - H_0)^{-1/3} ;$$

in cui:

$T_c$  in ore,

$A$  area del bacino, in  $\text{km}^2$ ,

$i$  pendenza media dell'asta principale,

$L$  lunghezza dell'asta principale in km,

$H_m$  altitudine media del bacino, rispetto alla sezione di chiusura, in m,

$H_{\max}$  altitudine massima del bacino, in m s.l.m.m.,

$H_o$  altitudine della sezione di sbarramento, in m s.l.m.m.,

$V$  velocità media di scorrimento, in m/s,

$i_v$  pendenza media dei versanti.

## U.S. Navy e Texas Highway Departements

Per piccoli bacini è molto usata la seguente formula :

$$T_c = \frac{L}{V}$$

$T_c$  = Tempo di corrivazione;

$L$  = Lunghezza dell'asta principale;

$V$  = Velocità di riferimento dell'acqua in m/s secondo la seguente tabella di valori:

$i_m$	%	1.5	3.0	5.0	8.0	25
$V$	m/s	0.6	0.9	1.2	1.5	3.0

che corrispondono alla relazione:

$$V = 0.47i_m^{0.57}$$

con:  $i_m$  = pendenza media, in %;

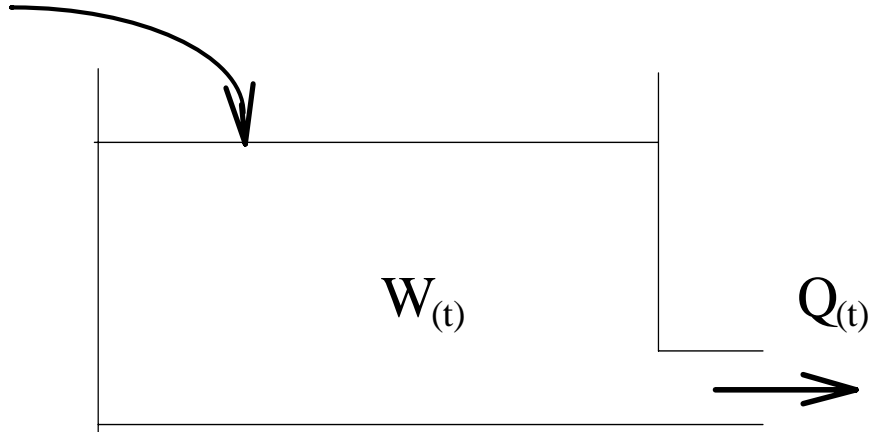
o alla relazione:

$$V = 6.49i_m^{0.57}$$

con:  $i_m$  = pendenza media, in m/m;

## MODELLO DEL SERBATOIO LINEARE

$$I(t) = \varphi S i(t)$$

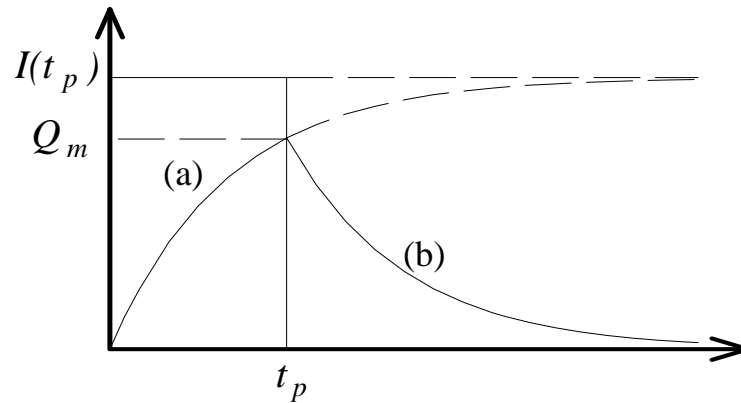


$$Q(t) = \frac{W(t)}{K} \quad (1)$$

$K$  = costante d'invaso lineare [t];

eq. continuità  $dW(t) = [I(t) - Q(t)] dt \quad (2)$

## Pluviogramma costante



$$0 \leq t \leq d_p$$

eq. continuità  $dW(t) = [I - Q(t)] dt$

facendo sistema con la (1):

$$K dQ(t) = [I - Q(t)] dt$$

$$\frac{dQ(t)}{[I - Q(t)]} = \frac{dt}{K}$$

$$\frac{d[I - Q(t)]}{[I - Q(t)]} = -\frac{dt}{K}$$

Ipotesi: rete inizialmente vuota:  $t = 0, Q_0 = 0$

$$\ln \frac{I - Q(t)}{I} = -\frac{t}{K}$$

$$1 - \frac{Q(t)}{I} = e^{-\frac{t}{K}}$$

a)

$$Q_t = I \left( 1 - e^{-\frac{t}{K}} \right)$$

massimo per  $t = d_p$

$$Q_m = I \left( 1 - e^{-\frac{d_p}{K}} \right)$$

$t \geq d_p$

eq. continuità

$$dW(t) = - Q(t) dt$$

$$K dQ(t) = - Q(t) dt$$

$$\frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{dt}{K}$$

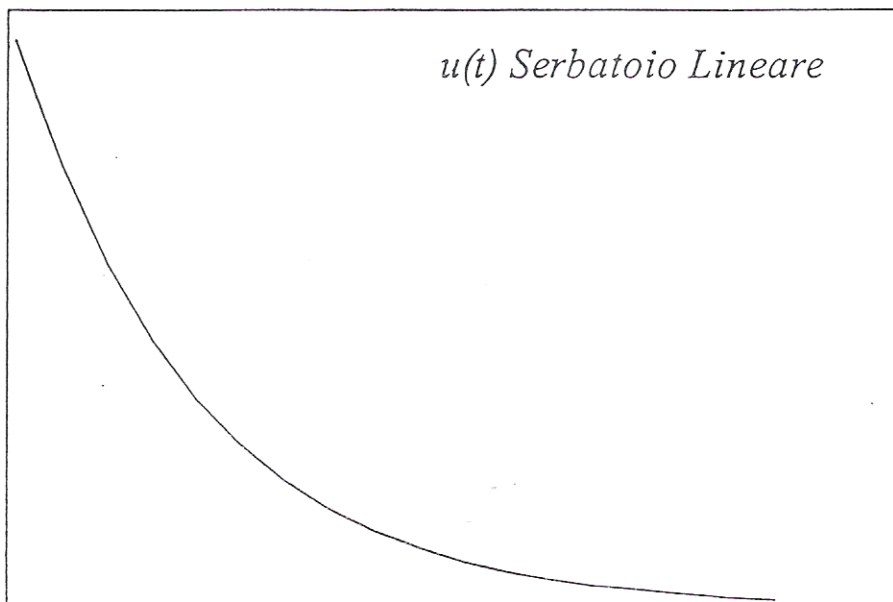
Ipotesi  $t = 0, Q = Q_m$

$$\ln \frac{Q_t}{Q_m} = -\frac{t}{K}$$

b) 
$$Q_t = Q_m e^{-\frac{t}{K}}$$

Per la definizione di IUH, al tempo  $t = 0$  il volume invaso-  
to passerà, istantaneamente, al valore  $W_0 = 1$  e la portata  
uscente al valore  $Q_0 = 1/K$ , ne deriva il seguente IUH:

$$u(t) = \frac{1}{K} e^{-\frac{t}{K}}$$



Per ogni pioggia la **portata al colmo** si avrà al tempo  $t=d_p$  e sarà data da:

$$Q_m = \varphi i(t_p) S \left( 1 - e^{-\frac{d_p}{K}} \right)$$

che è funzione unicamente di  $d_p$ , per cui, assunta la curva di probabilità pluviometrica  $i = a d^{n-1}$ , si potrà calcolare la pioggia critica  $d_c$  che rende massima la portata al colmo considerando:

$$\frac{dQ_m}{dt_p} = 0$$

$$Q_m = \varphi a t_p^{n-1} S \left( 1 - e^{-\frac{t_p}{K}} \right)$$

posto  $r=d_p/K$  avremo:

$$Q_m = \varphi a S K^{n-1} r^{n-1} (1 - e^{-r})$$

$$\frac{dQ_m}{dt_p} = \frac{dQ_m}{dr} \cdot \frac{dr}{dt_p} = \frac{1}{K} \frac{dQ_m}{dr} =$$

$$= \frac{1}{K} \varphi a S K^{n-1} \left[ (n-1)r^{n-2}(1-e^{-r}) + r^{n-1}e^{-r} \right] = 0$$

$$\frac{dQ_m}{dt} = 0 \quad \text{se} \quad \left[ (n-1)r^{n-2}(1-e^{-r}) + r^{n-1}e^{-r} \right] = 0$$

(vedi tabella)

<b>n</b>	<b>r</b>	<b>z</b>
0.3	0.67	0.78
0.4	0.95	0.79
0.5	1.26	0.81
0.6	1.62	0.84

## TEMPO DI RITARDO $T_R$

La costante d'invaso  $K$  rappresenta il ritardo tra il baricentro del pluviogramma e quello dell'idrogramma.

Questo intervallo di tempo, che è circa la metà del tempo di corrivazione  $T_c$ , viene chiamato **tempo di ritardo**.

In bibliografia esistono molte relazioni empiriche che mettono in relazione il tempo di ritardo  $T_R$  con le caratteristiche del bacino e molte sono ricavate ne più ne meno che dal dimezzamento del tempo di corrivazione  $T_c$ . Qui di seguito sono riportate alcune di queste formule:

### **Snyder (1938)**

$$T_R = C_t (L_{ca} L)^{0.3}$$

essendo:

- $T_R$  il tempo di ritardo in ore;
- $L_{ca}$  la distanza, misurata sull'asta principale, tra la sezione di chiusura ed il punto più vicino al baricentro del bacino in Km;
- $L$  la lunghezza dell'asta principale in Km;

- $C_f$  un coefficiente che varia geograficamente dipendente dalla pendenza del bacino che per bacini di grosse dimensioni varia tra 1.4 e 1.7.

### **Kirpich (1940)**

$$T_R = 0.0117 \frac{L^{0.77}}{S^{0.385}}$$

essendo:

- $T_R$  il tempo di ritardo in minuti;
- $L$  la lunghezza dell'asta principale in m;
- $S$  la pendenza media dell'asta principale in m/m.

### **Carter (1961)**

$$T_R = 0.098 \left(\frac{L}{S}\right)^{0.6}$$

essendo:

- $T_R$  il tempo di ritardo in ore;
- $L$  la lunghezza dell'asta principale in Km;
- $S$  la pendenza media dell'asta principale in m/m.

La relazione è stata ricavata con riferimento a bacini urbani aventi un'area inferiore a 51 Km<sup>2</sup>, una lunghezza dei canali inferiore a 17.7 Km ed una pendenza media dei canali inferiore a 0.5%.

### Fiorentino M. (1979)

$$T_R = 0.094 \left( \frac{L}{\sqrt{S}} \right)^{0.655}$$

essendo:

- $T_R$  il tempo di ritardo in ore;
- $L$  la lunghezza dell'asta principale in Km;
- $S$  la pendenza media dell'asta principale in m/m;
- $L/S^{0.5}$  è valutato secondo la relazione proposta da Taylor e Schwartz (1952):

$$\left( \frac{L}{\sqrt{P}} \right) = \sum_{i=1}^{NT} \frac{L_i}{\sqrt{P_i}}$$

in cui i valori di  $L_i$  e  $P_i$  indicano rispettivamente la lunghezza e la pendenza degli  $NT$  tratti in cui è suddiviso il profilo dell'asta.

# Metodo Italiano

Ipotesi:

$$K = \frac{W_t}{Q_t} = \frac{W_M}{Q_M} \quad (1)$$

avendo assunto la curva di probabilità pluviometrica a due parametri  $h=a d^n$  la massima portata al colmo sarà data dalla:

$$Q_M = \varphi a S K^{n-1} r^{n-1} (1 - e^{-r}) \quad (2)$$

con i valori di  $r=d_p/K$  esposti in tabella.

Sostituendo la (1) nella (2) avremo:

$$Q_M = \varphi a S \frac{W_M^{n-1}}{Q_M^{n-1}} r^{n-1} (1 - e^{-r})$$
$$Q_M = n(\varphi a S)^{1/n} W \frac{n-1}{n} \frac{1}{n} r \frac{n-1}{n} (1 - e^{-r})^{1/n}$$

posto

$$z = \frac{1}{n} r \frac{n-1}{n} (1 - e^{-r})^{1/n}$$

i valori di  $z$ , in funzione di  $n$ , riportati in tabella, mostrano che questi variano poco con  $n$ , con valore medio 0.78, da cui:

$$Q_M = 0.78n(\varphi a S)^{1/n} W^{\frac{n-1}{n}}$$

Introducendo due nuove variabili:

$u = \frac{Q_M}{S}$  = portata per unità di superficie (coefficiente udometrico)

$w = \frac{W}{S}$  = invaso specifico

avremo:

$$u = \frac{Q_M}{S} = 0.78n(\varphi a)^{1/n} \frac{S^{\frac{1}{n}-1}}{W^{\frac{1}{n}-1}}$$

$$u = 0.78 \frac{n(\varphi a)^{1/n}}{w^{\frac{1-n}{n}}}$$

Modificando le unità di misura e ponendo:

$$u = [l/s \cdot ha]$$

$$w = [m^3/m^2]$$

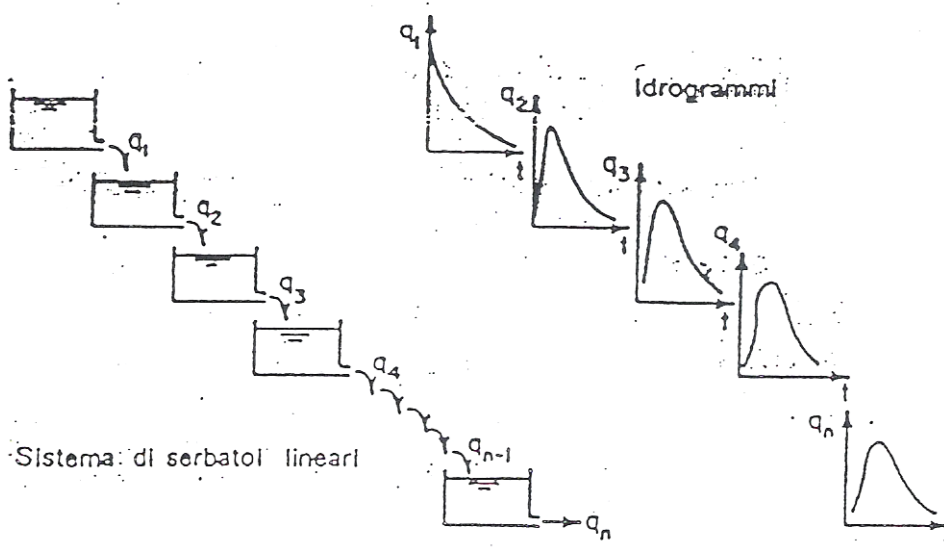
avremo:

$$u = 2168 \frac{n(\varphi a)^{1/n}}{w^n}$$

che è la relazione proposta dal Supino, nel 1933.

# MODELLO DI NASH

È un modello rappresentato da una serie di  $n$  serbatoi lineari.



Modello di Nash con  $n$  serbatoi lineari

La costante d'invaso  $K$  corrisponde al tempo di ritardo del bacino secondo la relazione:

$$K = T_R/n$$

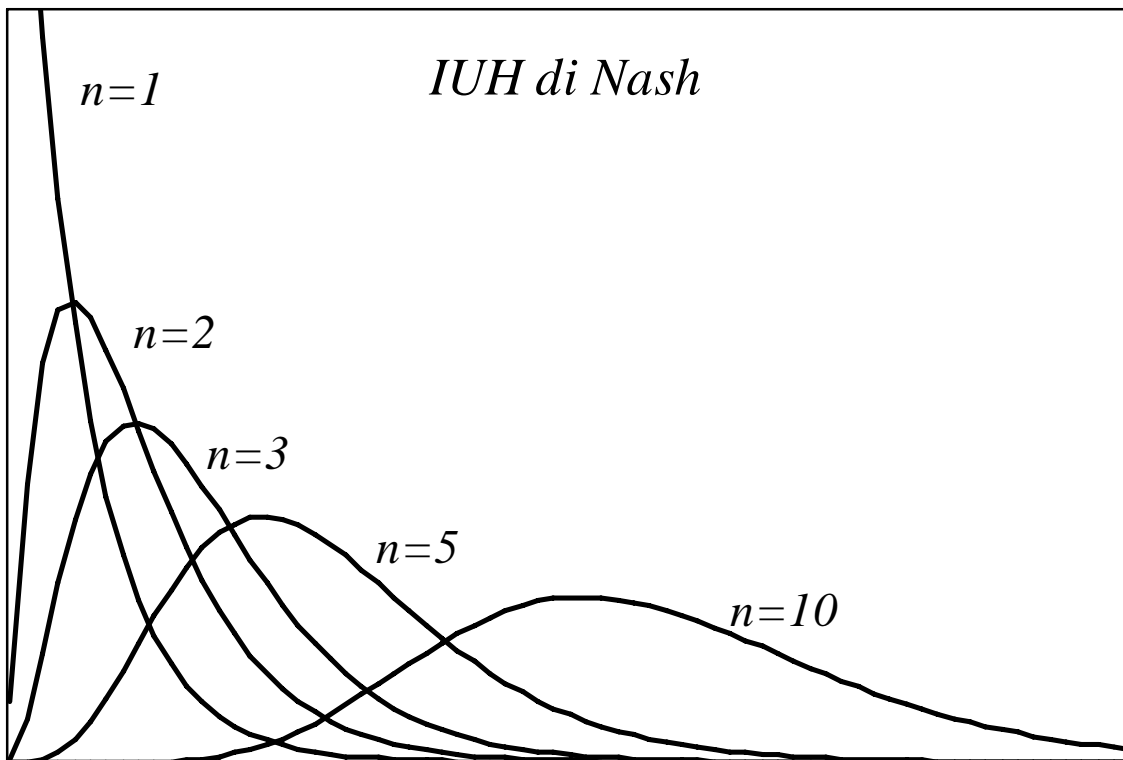
e il colmo si avrà all'istante:

$$t = T_R = (n-1)/K$$

# IUH dei modelli di NASH

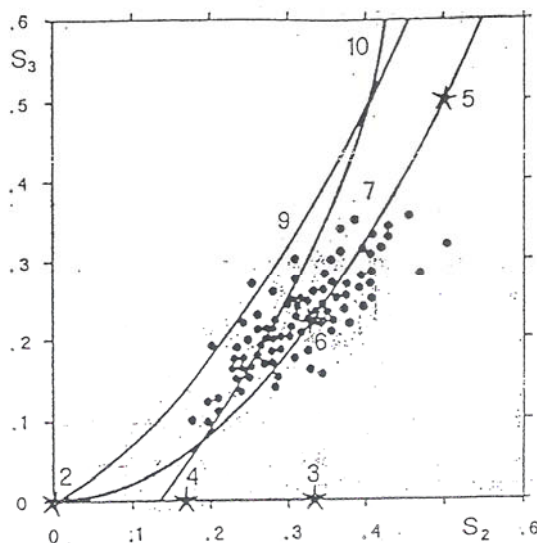
Modello di Nash con n serbatoi lineari

$$u(t) = \frac{1}{k(n-1)!} \frac{t^{n-1}}{k} e^{-t/k}$$



## CONFRONTO TRA VARI MODELLI

Dooge, nel 1974 effettuò un confronto tra i momenti dell'IUH di vari bacini naturali e quelli dei vari modelli.



Confronto fra i momenti di vari modelli concettuali  
(Da Dooge 1974)

$$S_R = \frac{M_R}{(M_I')^R}$$

$M_I'$  momento del 1° ordine rispetto all'origine  
 $M^R$  momento di ordine R rispetto al baricentro

Questo confronto ha fatto sì che molti facessero riferimento al modello di Nash con  $n = 3$ .

- 2 canale con immissione in testa
- 3 canale con afflusso uniforme distribuito
- 7 modello di Nash

5 Nasch n=2

6 Nasch n =3

9 canale con immissione in testa + Serbatoio Lineare

10 canale 3 + Serbatoio Lineare

Per n = 3

$$u(t) = \frac{1}{2K} \left( \frac{t}{K} \right)^2 e^{-\frac{t}{K}}$$

