

RANGO DI UNA MATRICE

Sia $A=[a_{ij}]$ una matrice di dimensioni $n \times p$ si definisce **rango o caratteristica** di una matrice uno scalare pari al più piccolo numero di righe e di colonne linearmente indipendenti.

Se $r = \min(n, p)$ si dice che la matrice ha rango pieno.

Es. Quanto vale il rango di questa matrice? $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$r=1$. Perché? Perché i suoi vettori riga (e/o colonna) sono linearmente dipendenti

Se una matrice quadrata di ordine n è non singolare allora il suo rango è n .

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

A è una matrice 3×3 e $\det(A) \neq 0 \rightarrow$ il rango è 3

Esercizio. Determinare il rango della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \operatorname{rg}(A) \leq 4$$

In primo luogo calcolo $\det(A)$



La matrice non ha rango uguale a 4

Quindi osservo che $\det(A)=0$

Come procedo?

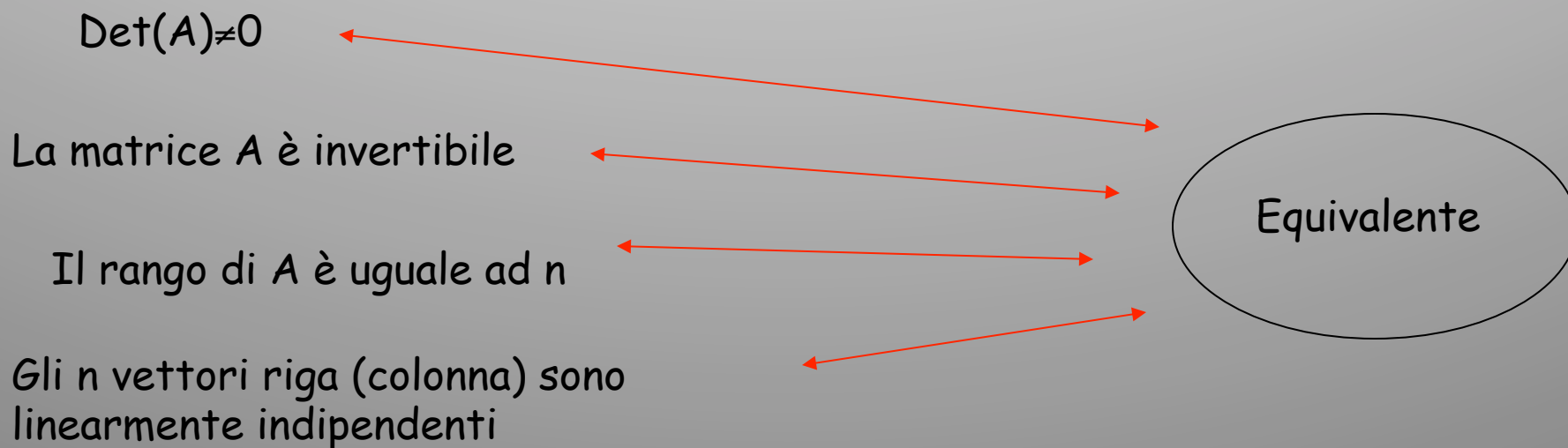
Vado a considerare le sottomatrici di ordine inferiore a 4 e ne calcolo il det., appena ne trovo uno diverso da zero affermo che quello è il rango.

Conclusione: in questo caso il rango è 3

Schema riassuntivo:

"Relazioni tra rango, inversa e determinante"

In una matrice quadrata A di ordine n esistono delle relazioni tra la sua inversa, il suo determinante ed il suo rango. Schematizziamo, pertanto le relazioni equivalenti.



Sistemi di equazioni lineari

Un sistema di equazioni lineari si definisce come l'insieme di due o più equazioni lineari che presentano le stesse incognite e le cui soluzioni soddisfano contemporaneamente ciascuna di esse.

Un sistema di n equazioni lineari in p incognite è del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_p \end{cases}$$

o in forma compatta

$$Ax=b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Matrice $n \times p$
dei
coefficienti
incognite

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Vettore $p \times 1$
delle incognite

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Vettore $n \times 1$
dei termini
noti

È comodo raccogliere i coefficienti dell'equazione in una matrice.

In particolare, si distingue tra la matrice incompleta

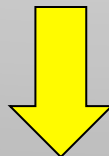
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1p} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \cdots & \mathbf{a}_{np} \end{pmatrix}$$

E la matrice completa ottenuta dalla precedente aggiungendo la colonna delle componenti di $\mathbf{b}$.

$$\mathbf{A}_C = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1p} & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2p} & \mathbf{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \cdots & \mathbf{a}_{np} & \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$$

✓ Risoluzione sistemi di n equazioni in p incognite

Risolvere un sistema che presenta molte equazioni e molte incognite è un procedimento alquanto laborioso :



È utile stabilire a priori la risolubilità dei sistemi lineari, attraverso la sola analisi dei coefficienti e dei termini noti del sistema, raccolti nelle matrici A ed A_c .

Teorema di Rouché-Capelli

Un sistema lineare è compatibile *se e solo se* la matrice dei coefficienti e la matrice completa hanno lo stesso rango.

Occorre quindi effettuare una preliminare ricerca del rango delle matrici A ed A_c .

In particolare, siano $r = \text{rango}(A)$ $r' = \text{rango}(A_c)$

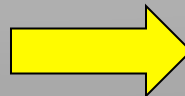
$r = r' = n \quad \Rightarrow \quad$ sistema compatibile determinato

- $r = r' < n \quad \Rightarrow \quad$ sistema compatibile indeterminato (∞^{n-r} soluzioni, cioè $n-r$ incognite giocano il ruolo di parametri)

- $r \neq r' \quad \Rightarrow \quad$ sistema incompatibile

Un sistema di equazioni lineari di n equazioni in p incognite:
 $Ax = b$ (con $n < p$) si dice **normale** se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al numero n delle equazioni, dunque se $r=n$

In tal caso, qualunque sia il vettore b , anche la matrice completa ha rango r' pari ad n



un sistema normale è sempre compatibile

✓ Metodo di Eliminazione di Gauss

Def. Si definisce *operazione elementare*, una qualunque delle seguenti operazioni che è possibile effettuare sulle equazioni di un sistema lineare:

- 1) Scambiare fra loro due equazioni.
- 2) Moltiplicare ambo i membri di una equazione per uno stesso numero diverso da zero.
- 3) Sostituire ad una equazione, la sua somma con una qualsiasi combinazione lineare di altre.

Il metodo di Gauss è basato sulla seguente proprietà :

Se si applicano a un sistema lineare una o più operazioni elementari si ottiene un sistema equivalente (cioè con le stesse soluzioni) al precedente.

Metodo di Eliminazione di Gauss

➤ Si considera la prima variabile x_j che compare in un'equazione, la i -esima, del sistema con coefficiente diverso da zero. Si scambia la prima equazione con la i -esima e nel sistema, che si ottiene, si sottrae alle altre equazioni la prima equazione moltiplicata per a_{ij} / a_{1j} .

Con queste operazioni si elimina x_j dalla seconda, terza, ..., p -esima equazione.

➤ Si applica poi lo stesso procedimento alle altre incognite che compaiono nelle rimanenti equazioni (escludendo la prima).

➤ Se durante il procedimento si ottiene l'equazione:

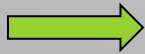
$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_p = b_k \neq 0$$

il sistema è **incompatibile**. Altrimenti si giunge ad un sistema del tipo :

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{1q_1} x_{q_1} + \dots = b'_1 \\ a'_{2q_2} x_{q_2} + \dots = b'_1 \\ \dots = \dots \\ a'_{sq_s} x_{q_s} + \dots = b'_s \end{array} \right.$$

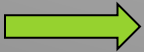
Esempio

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 1 \\ x - 2y + z = 4 \\ x + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{l} r_2 \rightarrow r_2 - r_1 \\ r_3 \rightarrow r_3 - r_1 \end{array} \begin{cases} x + 3y + 4z = 1 \\ -5y - 3z = 3 \\ -3y - 3z = -1 \end{cases}$$



$$r_3 \rightarrow r_3 - \frac{3}{5}r_2$$

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 1 \\ -5y - 3z = 3 \\ -\frac{6}{5}z = -\frac{14}{5} \end{cases}$$



**Sostituendo a
ritroso**

$$\begin{cases} x = -\frac{7}{3} \\ y = -2 \\ z = +\frac{7}{3} \end{cases}$$

✓ Risoluzione sistemi di n equazioni in n incognite

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di n equazioni in n incognite ammetta soluzione e che essa sia unica è che la matrice incompleta abbia determinante diverso da zero.

Analogamente nel caso di n equazioni in n incognite: $Ax = b$ si dice *normale* se il rango della matrice di coefficienti è uguale ad n , ma in questo caso oltre ad esistere sempre la soluzione è anche unica.

In un sistema ridotto in forma normale, la soluzione è legata all'esistenza dell'inversa della matrice dei coefficienti.

Dim.

Dato il sistema $Ax=b$



$$A^{-1}Ax=A^{-1}b$$



$$Ix=A^{-1}b$$



$$x=A^{-1}b$$

E se i termini noti sono nulli???

Def. Un sistema di equazioni lineari si dice omogeneo se il vettore dei termini noti è nullo.



$$A_{(n,p)} x_{(p,1)} = 0_{(n,1)}$$

Un sistema di equazioni lineari omogeneo di n equazioni in n incognite è del tipo $A_{(n,n)} x_{(n,1)} = 0_{(n,1)}$

- Tale sistema ammette sempre la sol. **banale** $x=0$
- ammette soluzioni proprie se e solo se la matrice dei coefficienti è singolare ($\text{rg}(A) < n$ cioè il $\det(A)=0$)
- se ammette una soluzione non nulla ne ammette anche una proporzionale.



Esempio

$$\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -y + 5z = 0 \end{cases}$$



$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Il $\text{rg}(A) \leq 3$, calcoliamo $\det(A)$.

Ma $\det(A)=0$, quindi $\text{rg}(A) \leq 2$.



Cerchiamo un minore di ordine 2 diverso da zero.

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\text{Det}(B)=10-9=1 \neq 0$. Quindi $\text{rg}(A)=2$.

N.b. Il sistema iniziale si trasforma in un sistema ad esso equivalente costituito da 2 equazioni in 2 incognite. Ma quali variabili saranno scelte?

$$\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = z \end{cases}$$

Ora poiché, $\det(B) \neq 0$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$ il sistema ridotto ammetterà un'unica soluzione ed in particolare:

$$\begin{array}{ll} \text{se } z=0 & \text{se } z \neq 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ 5z \end{pmatrix} \end{array}$$

Di conseguenza, il sistema completo ammetterà soluzioni:

$$\begin{array}{ll} \text{se } z=0, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \\ \text{se } z \neq 0, & (x, y, z) = (3z, 5z, z) \end{array}$$



In questo caso, il sistema completo ammetterà infinite soluzioni date da tutte le terne di valori proporzionali a $(3, 5, 1)$

Che cosa è un autovalore? E.....un autovettore?

Sia $A=[a_{ij}]$ una matrice di ordine n , sotto quali condizioni esistono un vettore x ed uno scalare λ tali che il vettore risultante dal prodotto Ax sia proporzionale a x secondo il numero λ , ovvero valga la seguente relazione?

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$


autovettore autovalore

Oss. La precedente relazione è sempre soddisfatta dal vettore $x=0$.

Oss. Per determinare gli autovalori, bisogna imporre che :

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0$$

ossia risolvere l'equazione caratteristica

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Oss. Per determinare gli autovettori bisogna risolvere il seguente sistema omogeneo

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Esempio.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &\longrightarrow |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| \longrightarrow \left| \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &\longrightarrow \left| \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| \longrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \end{aligned}$$

L'equazione caratteristica ammette 2 sol. $\lambda_1 = 1$ & $\lambda_2 = 6$

Gli autovettori corrispondenti a tali autovalori si ottengono
risolvendo i seguenti sistemi

$$\begin{aligned} &\begin{aligned} &\swarrow \quad \searrow \\ &\left(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \left(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ &\downarrow \quad \searrow \\ &\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_1 = -\boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{x}_2 = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{x}_1 = 4\boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{x}_2 = \boldsymbol{\beta} \end{cases} \end{aligned} \end{aligned}$$

Esempio.

Sia R la matrice di correlazione tra due variabili X e Y

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow |\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}| = \left| \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right|$$
$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & r \\ r & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - r^2 = \lambda^2 - 2\lambda + (1-r^2) = 0$$

L'equazione caratteristica ammette 2 sol. $\lambda_1 = 1-r, \quad \lambda_2 = 1+r$

Ma.....quando una matrice quadrata di ordine n presenta n autovettori linearmente indipendenti?

Una matrice quadrata A di ordine n presenta n autovettori linearmente indipendenti



È simile ad una matrice diagonale.

Def. Due matrici quadrate A e B si dicono *simili* se esiste una matrice non singolare P tale che :

$$B = P^{-1}AP$$

Oss. Due matrici simili hanno lo stesso spettro.

Def. Una matrice A si dice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale D , cioè se esiste una matrice non singolare P tale che:

$$D = P^{-1}AP$$

✓ Proprietà di autovalori e di autovettori

Data una matrice A di ordine n :

- $\lambda=0$ è un autovalore solo se $\det(A)=0$
- Essa possiede gli stessi autovalori della sua trasposta
- Se $v_1, v_2, \dots, v_t$ sono t autovettori associati a t autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ allora essi sono linearmente indipendenti
- se si moltiplica una matrice A per uno scalare k i suoi autovalori sono moltiplicati per quel valore.
- la somma degli autovalori è pari alla traccia di A :
- Il prodotto degli autovalori è pari al $\det(A)$:

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Def. L'insieme di autovalori di una matrice si dice **SPETTRO**

✓ Proprietà di autovalori e di autovettori per matrici simmetriche.

- Gli autovalori di una matrice simmetrica ad elementi reali sono reali.
- Gli autovettori di una matrice simmetrica ad elementi reali sono ortogonali a coppie.
- Una matrice simmetrica A è sempre diagonalizzabile e la matrice P che realizza tale diagonalizzazione è ortogonale , quindi :

$$D = P' A P$$

✓ Forme quadratiche

Def. Sia A una matrice simmetrica di ordine n ed x un vettore n -dimensionale si definisce forma quadratica lo scalare :

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j$$

Es. per $n=2$ si ha


$$Q(x) = \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Una forma quadratica si dice:
definita (semidefinita) positiva se

$$\longrightarrow x' A x > 0 (\geq 0) \forall x \neq 0$$

Una forma quadratica si dice:
definita (semidefinita) negativa se

$$\longrightarrow x' A x < 0 (\leq 0) \forall x \neq 0$$

✓ Forme Bilineari

Def. Sia M una matrice di ordine $n \times p$, x un vettore n -dimensionale y un vettore p -dimensionale si definisce forma bilineare :

$$Q(x) = x' M y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{ij} x_i y_j$$

Quando una forma bilineare si riduce ad una forma quadratica?

Qualora $x=y$ ed M è simmetrica di ordine n

Esempio.

La VARIANZA o la DEVIANZA possono esprimersi come forme quadratiche


$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 &\longrightarrow& \frac{1}{\mathbf{n}} \mathbf{x}' \mathbf{I} \mathbf{x} - \frac{1}{\mathbf{n}^2} \mathbf{x}' \mathbf{U} \mathbf{x} \\ &\longrightarrow \mathbf{x}' \left(\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{n}} - \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{n}^2} \right) \mathbf{x} &\longrightarrow& \mathbf{x}' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}\end{aligned}$$

analogamente la COVARIANZA può essere espressa come forma bilineare

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i - \bar{x} \bar{y}) &\longrightarrow& \frac{1}{\mathbf{n}} \mathbf{x}' \mathbf{I} \mathbf{y} - \frac{1}{\mathbf{n}^2} \mathbf{x}' \mathbf{U} \mathbf{y} \\ &\longrightarrow \mathbf{x}' \left(\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{n}} - \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{n}^2} \right) \mathbf{y} &\longrightarrow& \mathbf{x}' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{y}\end{aligned}$$

✓ Moltiplicatori di Lagrange

Il metodo dei **moltiplicatori di Lagrange** (così chiamati dal nome del matematico J. L. Lagrange) è utilizzato per cercare i massimi e i minimi di una funzione di più variabili soggetta ad uno o più vincoli (nell'ipotesi che questi siano espressi, algebricamente, da equazioni).

In particolare, consente di trasformare un problema di massimi e minimi di una funzione in n variabili soggetta a p vincoli in un problema di ricerca di massimi e i minimi di una funzione non vincolata in $n+p$ variabili:

- associando a ciascun vincolo, uno scalare incognito, detto appunto **moltiplicatore di Lagrange**;
- definendo una nuova funzione L (detta appunto Lagrangiana) che dipende dalla funzione originaria, dai vincoli e dai moltiplicatori di Lagrange.

Si consideri una funzione in n variabili $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soggetta ai p vincoli

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

E siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ gli scalari associati ai vincoli

Si definisce Lagrangiana, la funzione:

$$L(\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n}_n, \underbrace{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p}_p) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - \dots - \lambda_p g_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

n + p variabili

Moltiplicatori di Lagrange

Di tale funzione si ricercano i punti stazionari risolvendo il seguente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_p} = 0 \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \dots - \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} - \dots - \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} - \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_n} - \dots - \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial x_n} = 0 \\ g_1(x, y) = 0 \\ g_2(x, y) = 0 \\ \vdots \\ g_p(x, y) = 0 \end{array} \right.$$

Esempio.

Si consideri una funzione in due variabili $f(x, y) = x + y$ soggetta al vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

La Lagrangiana è dunque la funzione:

$$L(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

In questo modo, la ricerca dei massimi e minimi di una funzione in 2 variabili soggetta ad *un* vincolo si è trasformata nella ricerca di massimi e i minimi di una funzione non vincolata in $2+1=3$ variabili.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{2\lambda} \\ \lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Per la determinazione della natura dei punti stazionari si ricorre al determinante Hessiano relativo a $L(x,y,\lambda)$:

$$H = \begin{vmatrix} L''_{xx}(x,y,\lambda) & L''_{xy}(x,y,\lambda) & L''_{x\lambda}(x,y,\lambda) \\ L''_{yx}(x,y,\lambda) & L''_{yy}(x,y,\lambda) & L''_{y\lambda}(x,y,\lambda) \\ L''_{\lambda x}(x,y,\lambda) & L''_{\lambda y}(x,y,\lambda) & L''_{\lambda\lambda}(x,y,\lambda) \end{vmatrix}$$

E si può dimostrare che se $P(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto stazionario per la funzione di Lagrange, allora in tale punto si ha :

- un minimo vincolato se $H(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$
- un massimo vincolato se $H(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$

✓ Derivate di vettori e matrici

Se $f(x)$ è una funzione continua in x , la sua derivata rispetto ad x è il vettore delle derivate parziali rispetto a ciascuna x_i .

$$\frac{\delta f}{\delta \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1} \\ \frac{\delta f}{\delta x_2} \\ \vdots \\ \frac{\delta f}{\delta x_n} \end{pmatrix}$$

Sia x un vettore n -dimensionale si definisce operatore derivata del vettore x il vettore:

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x_1} \\ \frac{\delta}{\delta x_2} \\ \vdots \\ \frac{\delta}{\delta x_n} \end{pmatrix}$$

Un po' di Analisi Multidimensionale dei Dati ...

Sia X una matrice di dati (n,p) , il primo obiettivo dell'ACP è la determinazione di un asse u lungo il quale la somma delle proiezioni su esso sia massima. In particolare:

$$\begin{cases} (Xu)' Xu = u' X' Xu = \max \\ u' u = 1 \end{cases}$$

Come sappiamo, questo problema si traduce nella ricerca del massimo della Lagrangiana L data da:

$$L = u' X' Xu - \lambda(u' u - 1)$$

Qualche osservazione...

➤ la matrice $X'X$ è sempre simmetrica.

Per semplicità, consideriamo ancora una matrice (3,2) allora

$$\begin{aligned} X'X &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_{11}^2 + x_{21}^2 + x_{31}^2 & x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22} + x_{31}x_{32} \\ x_{12}x_{11} + x_{22}x_{21} + x_{32}x_{31} & x_{12}^2 + x_{22}^2 + x_{32}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

➤ $u'X'Xu$ è una forma quadratica associata alla matrice $A=X'X$

Dim. Per semplicità, sia X una matrice di dimensioni $(3,2)$ allora $X'X$ è quadrata di ordine 2 e la forma $u'X'Xu$ si può rappresentare nella forma:

$$u' X' Xu = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11}^2 + x_{21}^2 + x_{31}^2 & x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22} + x_{31}x_{32} \\ x_{12}x_{11} + x_{22}x_{21} + x_{32}x_{31} & x_{12}^2 + x_{22}^2 + x_{32}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

➤ $u'u$ è una forma quadratica associata alla matrice I

Dim. Per semplicità, sia u un vettore di $\mathbb{R}^2$ allora $u'u = u_1^2 + u_2^2$ si può rappresentare nella forma seguente :

$$u'u = u' I u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

✓ Qualche dimostrazione

Sia X una matrice (n,p) vogliamo dimostrare che la matrice $X'X$ può essere facilmente ricondotta ad una matrice nota se:

$$x_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sqrt{n}}$$

dove $\bar{x}_j$ rappresenta la media aritmetica del j -esimo vettore colonna.

Per semplicità, sia X una matrice $(3,2)$: $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}$ allora

$$X = \begin{pmatrix} \frac{x_{11} - \bar{x}_1}{\sqrt{3}} & \frac{x_{12} - \bar{x}_2}{\sqrt{3}} \\ \frac{x_{21} - \bar{x}_1}{\sqrt{3}} & \frac{x_{22} - \bar{x}_2}{\sqrt{3}} \\ \frac{x_{31} - \bar{x}_1}{\sqrt{3}} & \frac{x_{32} - \bar{x}_2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{x_{11} - \bar{x}_1}{\sqrt{3}} & \frac{x_{21} - \bar{x}_1}{\sqrt{3}} & \frac{x_{31} - \bar{x}_1}{\sqrt{3}} \\ \frac{x_{12} - \bar{x}_2}{\sqrt{3}} & \frac{x_{22} - \bar{x}_2}{\sqrt{3}} & \frac{x_{32} - \bar{x}_2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Effettuando il prodotto righe per colonne di X' e X , si osserva che :

$$X'X = \begin{pmatrix} \frac{x_{11} - \bar{x}_1}{\sqrt{3}} & \frac{x_{21} - \bar{x}_1}{\sqrt{3}} & \frac{x_{31} - \bar{x}_1}{\sqrt{3}} \\ \frac{x_{12} - \bar{x}_2}{\sqrt{3}} & \frac{x_{22} - \bar{x}_2}{\sqrt{3}} & \frac{x_{32} - \bar{x}_2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_{11} - \bar{x}_1}{\sqrt{3}} & \frac{x_{12} - \bar{x}_2}{\sqrt{3}} \\ \frac{x_{21} - \bar{x}_1}{\sqrt{3}} & \frac{x_{22} - \bar{x}_2}{\sqrt{3}} \\ \frac{x_{31} - \bar{x}_1}{\sqrt{3}} & \frac{x_{32} - \bar{x}_2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1^2 & s_{12} \\ s_{12} & s_2^2 \end{pmatrix}$$

ossia $X'X$ rappresenta
la Matrice delle Varianze e Covarianze

Cosa accade invece, se sulla matrice X si effettua la seguente trasformazione

$$x_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j \sqrt{n}}$$

dove $\bar{x}_j$ e s_j rappresentano rispettivamente la media aritmetica e la deviazione standard del j -esimo vettore colonna?

Per semplicità, sia X una matrice (3,2) , allora in questo caso, si avrà:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{x_{11} - \bar{x}_1}{s_1 \sqrt{3}} & \frac{x_{12} - \bar{x}_2}{s_2 \sqrt{3}} \\ \frac{x_{21} - \bar{x}_1}{s_1 \sqrt{3}} & \frac{x_{22} - \bar{x}_2}{s_2 \sqrt{3}} \\ \frac{x_{31} - \bar{x}_1}{s_1 \sqrt{3}} & \frac{x_{32} - \bar{x}_2}{s_2 \sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X' = \begin{pmatrix} \frac{x_{11} - \bar{x}_1}{s_1 \sqrt{3}} & \frac{x_{21} - \bar{x}_1}{s_1 \sqrt{3}} & \frac{x_{31} - \bar{x}_1}{s_1 \sqrt{3}} \\ \frac{x_{12} - \bar{x}_2}{s_2 \sqrt{3}} & \frac{x_{22} - \bar{x}_2}{s_2 \sqrt{3}} & \frac{x_{32} - \bar{x}_2}{s_2 \sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Effettuando il prodotto righe per colonne di X' e X , si osserva che :

$$X'X = \begin{pmatrix} \frac{x_{11} - \bar{x}_1}{s_1\sqrt{3}} & \frac{x_{21} - \bar{x}_1}{s_1\sqrt{3}} & \frac{x_{31} - \bar{x}_1}{s_1\sqrt{3}} \\ \frac{x_{12} - \bar{x}_2}{s_2\sqrt{3}} & \frac{x_{22} - \bar{x}_2}{s_2\sqrt{3}} & \frac{x_{32} - \bar{x}_2}{s_2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_{11} - \bar{x}_1}{s_1\sqrt{3}} & \frac{x_{12} - \bar{x}_2}{s_2\sqrt{3}} \\ \frac{x_{21} - \bar{x}_1}{s_1\sqrt{3}} & \frac{x_{22} - \bar{x}_2}{s_2\sqrt{3}} \\ \frac{x_{31} - \bar{x}_1}{s_1\sqrt{3}} & \frac{x_{32} - \bar{x}_2}{s_2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{pmatrix}$$

ossia $X'X$ rappresenta
la Matrice di Correlazione