Corso di Calcolatori Elettronici I
A.A. 2011-2012

Algebra di Boole: forme NAND e NOR

Lezione 8

Prof. Antonio Pescapè

Università degli Studi di Napoli Federico II
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Funzioni NAND e NOR

NAND $x \uparrow y = \overline{x \cdot y} \qquad = \overline{x} + \overline{y}$

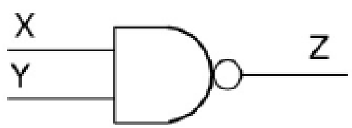
NOR $x \downarrow y = \overline{x + y} \qquad = \overline{x} \cdot \overline{y}$

De Morgan

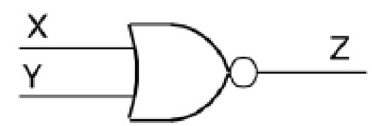
$$x_1 \uparrow x_2 \uparrow \ldots \uparrow x_n = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \qquad = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \ldots \overline{x_n}$$

$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow \ldots \downarrow x_n = \overline{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \qquad = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \ldots \cdot \overline{x_n}$$

Porte NAND e NOR



x	y	z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Figura 3.14 - Simboli delle porte NAND e NOR e relative tabelle di verità.

Non associatività di NAND e NOR

- NAND e NOR ***non*** godono della proprietà associativa

NAND $$(x_1 \uparrow x_2) \uparrow x_3 \neq x_1 \uparrow (x_2 \uparrow x_3) \neq x_1 \uparrow x_2 \uparrow x_3$$

NOR $$(x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3 \neq x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_3) \neq x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3$$

AND, OR e NOT da NAND e NOR

- E' possibile ottenere una AND e una OR tramite NAND e NOR

$$x \cdot y = \overline{x \uparrow y} = \overline{x} \downarrow \overline{y}$$

$$x + y = \overline{x \downarrow y} = \overline{x} \uparrow \overline{y}$$

- E' possibile ottenere una NOT tramite NAND e NOR

NAND $x \uparrow 1 = \overline{x \cdot 1} = \overline{x}$

NOR $x \downarrow 0 = \overline{x + 0} = \overline{x}$

AND, OR e NOT da NAND e NOR

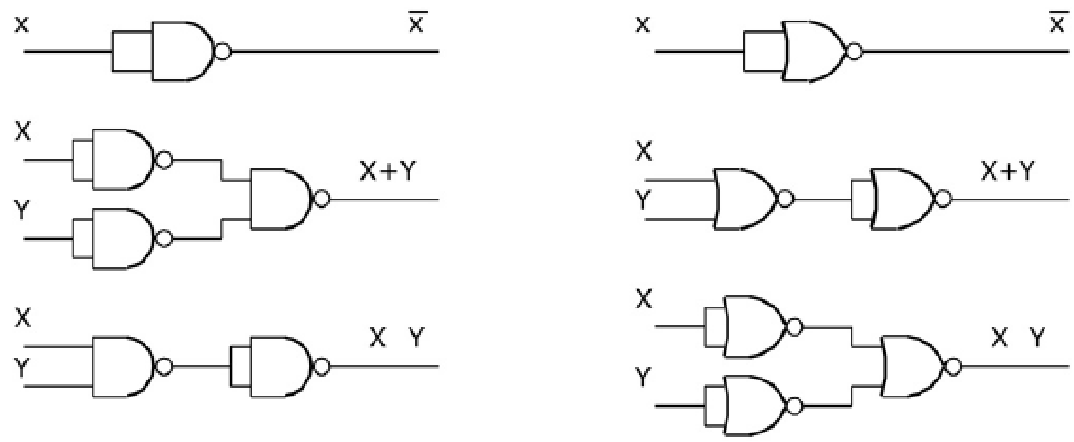


Figura 3.15 - Costruzione delle operazioni di NOT, OR e AND dalle porte NAND e NOR.

Funzioni NAND e NOR

- Riassumendo, le NAND permettono di ottenere una NOT, una AND ed una OR
- Similmente per la NOR
- Ricordiamo che {AND,OR,NOT} è un insieme funzionalmente completo, quindi →

{NAND} e {NOR} sono due insiemi funzionalmente completi

NAND e NOR

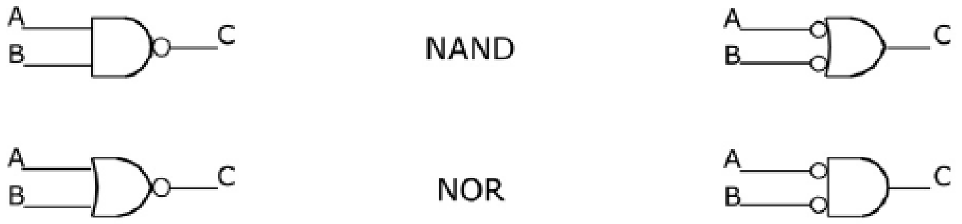


Figura 3.17 - Simboli equivalenti per le porte NAND e NOR.

Proprietà di NAND e NOR

- Una NAND di prodotti è uguale alla NAND delle variabili indipendenti. (***Duale***) Una NOR di somme è uguale alla NOR delle variabili indipendenti

$$(ab)\uparrow(cd)=\overline{(ab)\cdot(cd)}=a\uparrow b\uparrow c\uparrow d$$

$$(a+b)\downarrow(c+d)=\overline{(a+b)+(c+d)}=a\downarrow b\downarrow c\downarrow d$$

- Una OR di NAND è uguale alla NAND delle variabili indipendenti. (***Duale***) Una AND di NOR è uguale alla NOR delle variabili indipendenti

$$(a\uparrow b)+(c\uparrow d)=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}=a\uparrow b\uparrow c\uparrow d$$

$$(a\downarrow b)\cdot(c\downarrow d)=\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{d}=a\downarrow b\downarrow c\downarrow d$$

- Una AND è uguale ad una NOR di NAND. (***Duale***) Una OR è uguale ad una NAND di NOR

$$(a\uparrow b)\downarrow(c\uparrow d)=abcd$$

$$(a\downarrow b)\uparrow(c\downarrow d)=a+b+c+d$$

Forme NAND e NOR di una funzione

- Una forma elementare di tipo P si trasforma in una forma NAND a due livelli operando come segue:
  - tutti gli operatori si trasformano in NAND, rispettando le priorità;
  - le clausole costituite da un solo letterale vengono negate.

$$f = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = \overline{\overline{\gamma_1} \cdot \overline{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot \overline{\gamma_n}} = \overline{\gamma_1} \uparrow \overline{\gamma_2} \uparrow \ldots \uparrow \overline{\gamma_n}$$

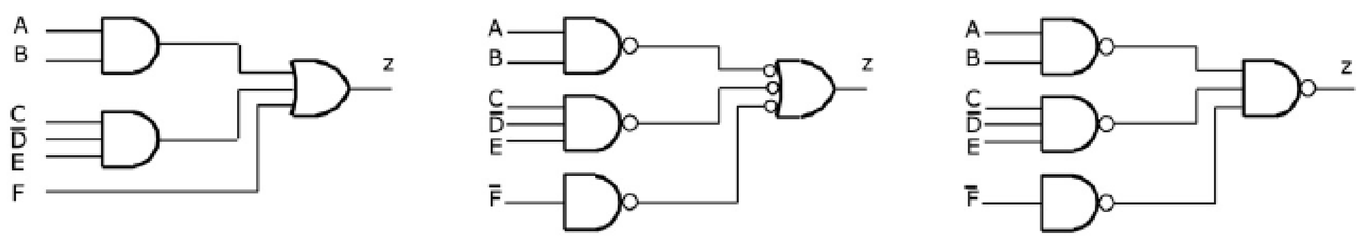
- Dualmente per la forma di tipo S

Da rete AND-OR a rete NAND

a) Rete di partenza

b) Rete equivalente

Figura 3.16 - Passaggio da rete SP a rete NAND. In questo caso, il passaggio richiede solo la sostituzione di porte AND e OR con porte NAND.



a) Rete di partenza

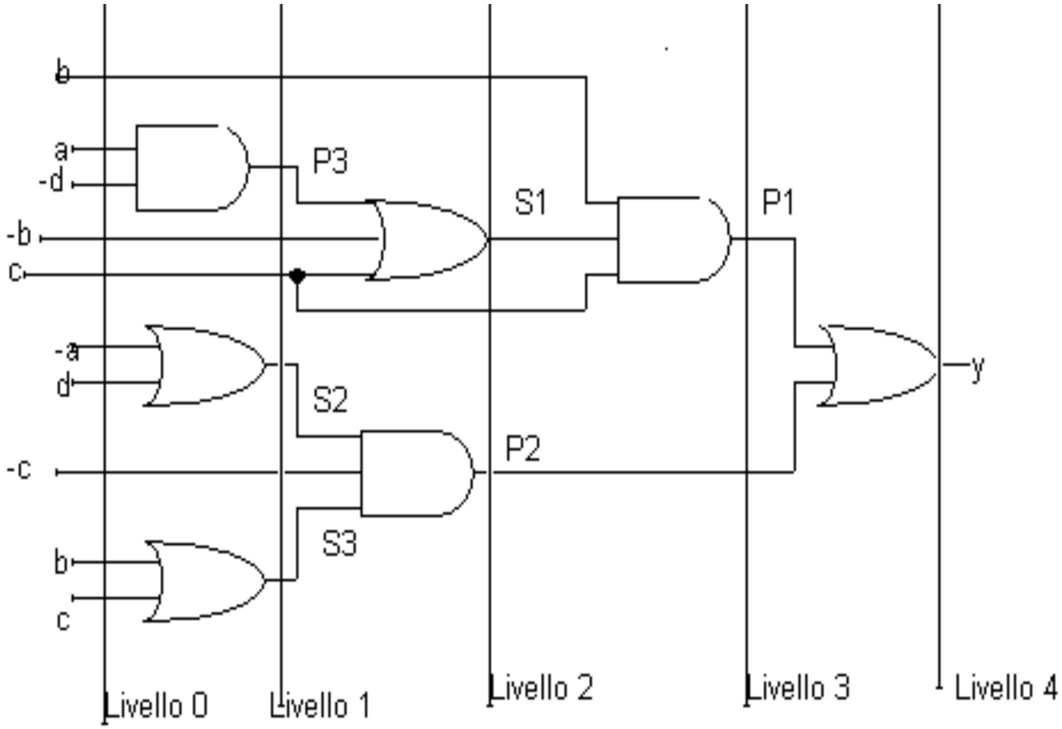
b) Inserimento negatori

c) Rete di NAND equivalente

Figura 3.18 - Passaggio da rete SP a rete di NAND.

Un esempio di rete logica: livelli

$$y = b \cdot c \cdot (a \cdot \overline{d} + \overline{b} + c) + \overline{c} \cdot (d + \overline{a}) \cdot (b + c)$$



Generalizzando…

- Se le γ_n sono funzioni invece che letterali, la proprietà precedente può essere generalizzata
- Una forma con operatori AND e OR a *n* livelli che abbia come ultimo livello una OR (*AND*) si trasforma in una forma **NAND** (*NOR*), operando come segue:
  - tutti gli operatori si trasformano in NAND (*NOR*) rispettando le priorità;
  - tutti i letterali che costituiscono variabili di funzioni di livello complementare dispari si negano.

Forme NAND e NOR di una funzione

- Una forma con operatori AND e OR a *n* livelli che abbia come ultimo livello una OR (AND) si trasforma in una forma **NOR** (NAND) ad n+1 livelli, operando come segue:
  - si aggiunge una NOR (NAND) finale che complementa le uscite;
  - tutti gli operatori si trasformano in NOR (NAND) rispettando le priorità;
  - tutti i letterali che costituiscono variabili di funzioni di livello complementare dispari si negano.

$$f = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = (\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n) \cdot 1 = (\gamma_1 \downarrow \gamma_2 \downarrow \ldots \downarrow \gamma_n) \downarrow 0$$

Esempio 1

Dalla funzione a 2 livelli in forma P:

$$f = ab + \bar{a}\bar{b} + c$$

si ottiene la forma NAND

$$f = (a \uparrow b) \uparrow (\bar{a} \uparrow \bar{b}) \uparrow \bar{c}$$

ove c è negato perché singolo letterale (livello complementare 1) oppure quella NOR

$$f = ((\bar{a} \downarrow \bar{b}) \downarrow (a \downarrow b) \downarrow c) \downarrow 0$$

ove a,b sono negate in entrambe le clausole perché diventate di livello 3 e c non lo è più perché di livello 2.

Esempio 2

Dualmente dalla funzione in forma S

$$f = (a+b)\cdot(\overline{a}+\overline{b})\cdot c$$

si ottiene la forma NOR

$$f = (a \downarrow b) \downarrow (\overline{a} \downarrow \overline{b}) \downarrow \overline{c}$$

oppure quella NAND

$$f = ((\overline{a} \uparrow \overline{b}) \uparrow (a \uparrow b) \uparrow c) \uparrow 1$$

Esempio 3

La funzione a 4 livelli

$$f = b \cdot \left(c + \bar{c} \cdot \left(\bar{a} + d\right)\right)$$

si trasforma nella forma NOR ancora a 4 livelli

$$f = \bar{b} \downarrow \left(c \downarrow \left(c \downarrow \left(\bar{a} \downarrow d\right)\right)\right)$$

dove b e $\bar{c}$ sono negate rispettivamente ai livelli complementari 1 e 3, oppure nella forma NAND a 5 livelli

$$f = \left(b \uparrow \left(\bar{c} \uparrow \left(\bar{c} \uparrow \left(a \uparrow \bar{d}\right)\right)\right)\right) \uparrow 1$$

ove $\bar{c}$ al livello 3 e $\bar{a}$,d al livello 5 sono negati.