

1) Posto $S = \{x \in \mathbb{N}: 1 \leq x \leq 10\}$, si consideri la seguente applicazione:

$$f: (x,y) \in S \times S \rightarrow \text{M.C.D.}(x,y) \in S,$$

(dove $\text{M.C.D.}(x,y)$ è l'unico massimo comun divisore positivo tra x e y).

i) Si studino iniettività e suriettività di f .

ii) Indicata con $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza associata ad f , si descriva $[(5,10)]_{\mathcal{R}}$ e si verifichi che, se $a \neq b$, allora risulta $|(a,b)]_{\mathcal{R}}| > 1$.

2) Siano $S = \{x \in \mathbb{N}: 0 \leq x \leq 100\}$ e $T = \{x \in \mathbb{N}: 0 \leq x \leq 9\}$. Indicato, per ogni elemento x di S , con $C(x)$ l'insieme delle cifre di x (in notazione decimale) e con $m(x)$ il massimo dell'insieme $C(x)$, si consideri l'applicazione

$$f: x \in S \rightarrow m(x) \in T.$$

i) Si studino iniettività e suriettività di f .

ii) Indicata con $\mathcal{R}_f$ la relazione di equivalenza associata ad f , si dica quante sono le relative classi di equivalenza distinte; si descriva la classe $[13]$; si dica quanti e quali sono gli x tali che $|[x]| = 1$ (giustificare la risposta).

3) Posto, per ogni sottoinsieme X di $\mathbb{Z}$, $\bar{X} = \{ |x|, x \in X \}$, si consideri l'applicazione

$$f: X \in \mathcal{P}(\{-1, 0, +1\}) \rightarrow \bar{X} \in \mathcal{P}(\{0, +1\}).$$

i) Si determini $f(\emptyset)$, e si studino iniettività e suriettività di f .

ii) Considerata la relazione di equivalenza $\mathcal{R}_f$ associata ad f , si descriva l'insieme quoziente $\mathcal{P}(\{-1, 0, +1\})/\mathcal{R}_f$, specificando gli elementi appartenenti a ciascuna classe di equivalenza.

4) Per ogni $x \in S = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, si indichi con $\Pi(x)$ l'insieme dei divisori primi positivi di x ; si consideri poi l'applicazione:

$$f: x \in S \rightarrow \min \Pi(x) \cdot \max \Pi(x) \in \mathbb{N}^*.$$

i) Si studino iniettività e suriettività di f .

ii) Indicata con $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza associata ad f :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y),$$

si determinino gli elementi di $[2]_{\mathcal{R}}$, $[6]_{\mathcal{R}}$, $[10]_{\mathcal{R}}$.

5) Si consideri la funzione $f: (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow x^y \in \mathbb{N}^*$.

i) Studiare iniettività e suriettività di f .

ii) Se $\mathcal{R}_f$ è la relazione di equivalenza determinata da f , si descrivano le relative classi di equivalenza $[(1,3)]$, $[(3,1)]$ e $[(2,3)]$.