

Idraulica e Controllo delle Acque Sotterranee

Equazioni indefinite

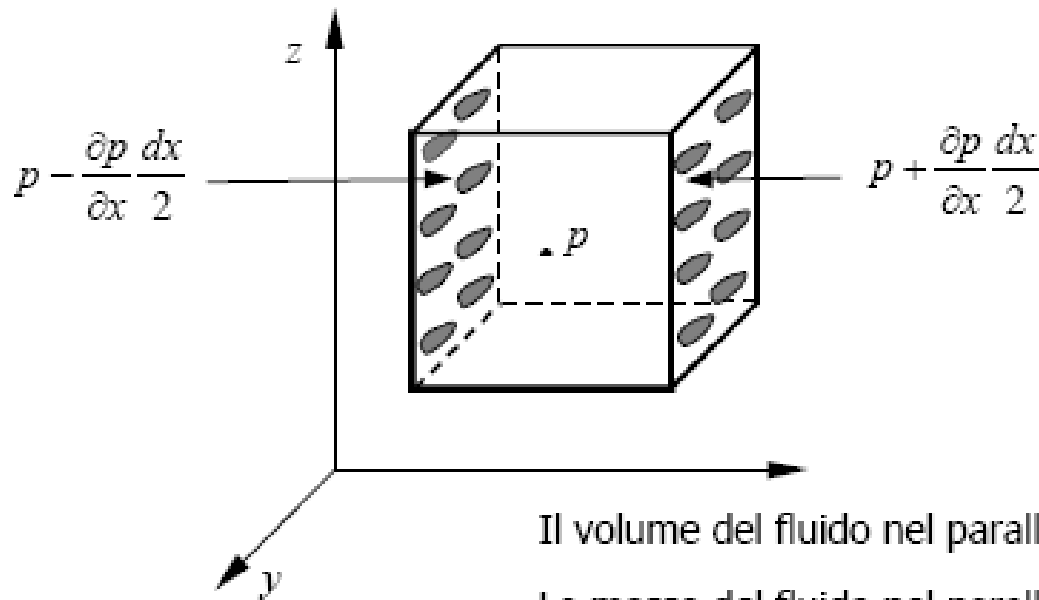
armando carravetta

Equazione globale dell'equilibrio dinamico

Ipotesi:

fluido incomprimibile

mezzo indeformabile



Il volume del fluido nel parallelepipedo è: $n \, dx \, dy \, dz$

La massa del fluido nel parallelepipedo è: $n \, \rho \, dx \, dy \, dz$

La pressione media al centro del parallelepipedo è: p

Forze di superficie

- a sinistra azione del fluido sui pori $n_s \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz$

azione delle superfici dei granuli sul fluido

$$(1 - n_s) \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz$$

azione totale $\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz$

- a destra analogamente $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz$

Per cui l'azione globale (lungo l'asse x) delle forze di superficie su sezioni normali all'asse x è:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz =$$

$$= - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz (\bar{i})$$

Forze di volume

Diciamo \bar{F} la forza di massa per unità di massa di componenti X, Y, Z.

Lungo l'asse x si ha perciò:

$$n \rho X dx dy dz \quad (\rho = \text{densità del fluido})$$

Forze di trascinamento

Dette \bar{R} tali forze per unità di massa, (di componenti R_x, R_y, R_z), si è constatato sperimentalmente che esse sono funzione del numero di Reynolds

$$R_e = \frac{v l}{\nu}$$

dove l è una caratteristica lineare (ad es. il diametro dei granuli).

Nella direzione x si ha:

$$n \rho R_x dx dy dz$$

Forze inerziali

Siccome l'accelerazione media è la derivata della velocità media reale del fluido, lungo la direzione x l'accelerazione del fluido è:

$$\frac{1}{n} \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right)$$

moltiplicando per la massa del fluido si ha l'intera forza di inerzia lungo l'asse x ($-m\bar{a}$)

$$- \rho n dx dy dz \frac{1}{n} \frac{dv_x}{dt} = - \rho \frac{dv_x}{dt} dx dy dz$$

Equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + nX + nR_x \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + nY + nR_y \\ \frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + nZ + nR_z \end{cases} \quad \text{EQUAZIONE DEL MOTO}$$

Equazione di continuità

Si scrive al solito che la differenza fra la massa entrante e la massa uscente nell'intervallo di tempo dt deve essere uguale alla massa accumulatasi in detto intervallo.

massa entrante (lungo x) $\rho v_x dy dz dt$

massa uscente (lungo x) $\rho v_x dy dz dt + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dx dy dz dt$

massa presente $\rho n dx dy dz$

variazione della massa nel tempo (supposto il mezzo indeformabile)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} n dx dy dz dt$$

In definitiva:

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} n dx dy dz dt$$

cioè:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + n \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \underline{\text{EQUAZIONE DI CONTINUITA'}}$$

Calcolo della forza di trascinamento

Ipotesi:

- moto permanente
- moto gradualmente variato

Si consideri la forza di volume \bar{F} per unità di massa. Questa forza tiene conto delle spinte esercitate sul fluido dalle particelle solide che riempiono il volume elementare dW (avente forma di parallelepipedo). Si supponga che la filtrazione STAZIONARIA avvenga con traiettorie rettilinee e uniformi, sicché l'accelerazione media è nulla. Sui granuli agisce la spinta archimedeica, che vale

$$(1 - n) \gamma dW$$

uguale e contraria a quella che i granuli esercitano sul fluido.

Il fluido è poi soggetto alla forza di gravità

$$n \gamma dW$$

quindi in totale, la forza verticale diretta verso il basso agente sul fluido è

$$(1 - n) \gamma dW + n \gamma dW = \gamma dW$$

e quindi la forza di volume \bar{F} per unità di massa (di fluido) ha modulo

$$F = \frac{\gamma dW}{n \rho dW} = \frac{g}{n}$$

Considerando un sistema cartesiano con l'asse z diretto verso l'alto ne consegue

$$\begin{cases} X = Y = 0 \\ Z = -\frac{g}{n} \end{cases}$$

e quindi le equazioni (3) diventano

$$\begin{cases} R_x - \frac{1}{n\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ R_y - \frac{1}{n\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ R_z = \frac{1}{n\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g}{n} \end{cases}$$

Introducendo la quota piezometrica:

$$h = z + \frac{p}{\gamma}$$

essendo $\gamma = \text{cost}$ (fluido incompressibile),

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z}$$

e quindi le (3') diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = \frac{g}{n} \frac{\partial h}{\partial x} \\ R_y = \frac{g}{n} \frac{\partial h}{\partial y} \\ R_z = \frac{g}{n} \frac{\partial h}{\partial z} \end{array} \right. \quad \text{cioè} \quad R = \frac{g}{n} \frac{dh}{ds}$$

essendo s la coordinata curvilinea lungo una linea di corrente

Si è così trovata l'espressione della forza di trascinamento per unità di massa. La cadente piezometrica è:

$$J = - \frac{dh}{ds}$$

Se ne deduce

$$R = - \frac{g}{n} J$$

Ovvero utilizzando la legge di Darcy (per campo omogeneo ed isotropo)⁵

$$\bar{R} = - \frac{g}{n k} \bar{v}$$

Le componenti della resistenza d'attrito per unità di massa sono:

$$R_x = - \frac{g}{nk} v_x; \quad R_y = - \frac{g}{nk} v_y; \quad R_z = - \frac{g}{nk} v_z$$

agenti in ogni punto del campo di filtrazione in direzione opposta a quella della velocità

Quindi la forza di trascinamento per unità di volume detta da Terzaghi FORZA DI FILTRAZIONE è

$$F_t = \frac{g}{n} J \ n \ \rho = \gamma J$$

Equazioni del moto gradualmente variato

Ipotesi:

➤ moto gradualmente variato

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Poiché le componenti della velocità di filtrazione e le loro derivate parziali rispetto allo spazio sono piccole, si possono trascurare i termini:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt}, \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt}, \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

le equazioni differenziali del moto filtrante possono essere scritte nella forma

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{g}{k} v_x$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{g}{k} v_y$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{g}{k} v_y$$

Ovvero introducendo la quota piezometrica

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v_x}{k} = 0$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{v_y}{k} = 0 \quad (11')$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{v_z}{k} = 0$$

Alle equazioni del moto così ottenute va aggiunta l'equazione di continuità (4) che per fluido pesante incompressibile ($\rho = \text{cost}$) ha la forma:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

Equazioni semplificate

Notevoli ulteriori semplificazioni al sistema di equazioni precedente possono essere effettuate in alcuni casi particolari che tratteremo:

- moto permanente
- moto piano
- moto a simmetria radiale

Equazioni del moto permanente

- Ipotesi:
moto permanente

Le velocità e le pressioni in condizioni di moto stazionario sono indipendenti dal tempo, e cioè:

$$v_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad v_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad v_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z}$$

Se si introducono nell'equazione di continuità si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0$$

che nel caso di mezzo isotropo si riduce all'EQUAZIONE DI LAPLACE

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Equazioni del moto permanente

- L'equazione di Laplace può essere risolta con svariate tecniche di risoluzione
- Di particolare importanza, per la semplicità formale delle soluzioni è il caso delle falde artesiane
- La teoria dei moti a potenziale di cui tratteremo in altra parte del corso è particolarmente idonea alla soluzione dell'equazione di Laplace in tali tipi di falde

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Moti piani

Vi sono numerosi casi importanti in cui le caratteristiche principali del moto di filtrazione (velocità e pressione) sono funzioni di due sole coordinate. In tal caso ogni particella fluida si muove in un piano, le linee di corrente sono linee curve contenute in un piano, e le superfici isopiezometriche sono superfici cilindriche con generatrici perpendicolari a tali piani.

Le equazioni del moto sono:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -k \frac{\partial h}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -k \frac{\partial h}{\partial y}$$

l'equazione di continuità è: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

Cioè in definitiva:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (16)$$

La soluzione dell'equazione differenziale (16) fornisce la funzione

$$h = f(x, y)$$

e le linee isopiezometriche hanno equazione

$$f(x, y) = \text{cost}$$

Moti assialsimmetrici

In coordinate polari, analogamente si ottiene:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -k \frac{\partial h}{\partial r} \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{k}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta}$$

e quindi:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = 0$$

Moti piani

Vi sono numerosi casi importanti in cui le caratteristiche principali del moto di filtrazione (velocità e pressione) sono funzioni di due sole coordinate. In tal caso ogni particella fluida si muove in un piano, le linee di corrente sono linee curve contenute in un piano, e le superfici isopiezometriche sono superfici cilindriche con generatrici perpendicolari a tali piani.

Le equazioni del moto sono:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -k \frac{\partial h}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -k \frac{\partial h}{\partial y}$$

l'equazione di continuità è: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

Cioè in definitiva:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (16)$$

La soluzione dell'equazione differenziale (16) fornisce la funzione

$$h = f(x, y)$$

e le linee isopiezometriche hanno equazione

$$f(x, y) = \text{cost}$$