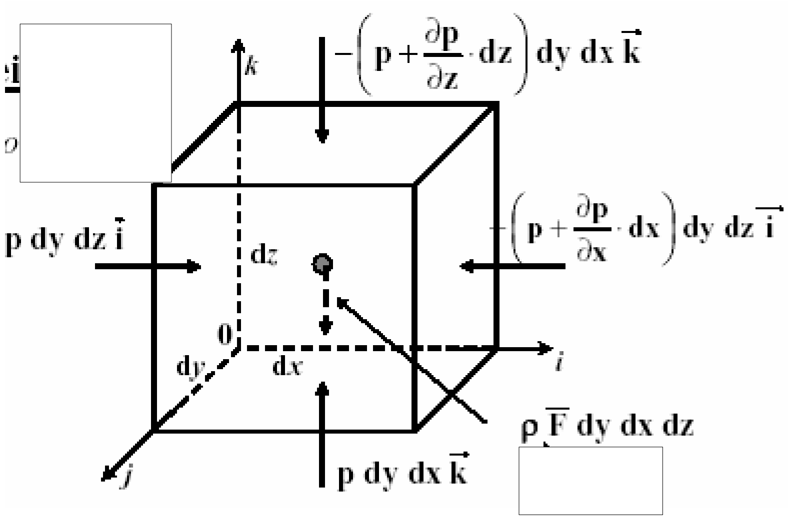
Idraulica
Equazione globale eq. statico

armando carravetta

Equazione indefinita

- Consideriamo l'equilibrio di un prismetto elementare di fluido in quiete
- La risultante delle forze agenti sulle facce opposte del prisma è rappresentata da:

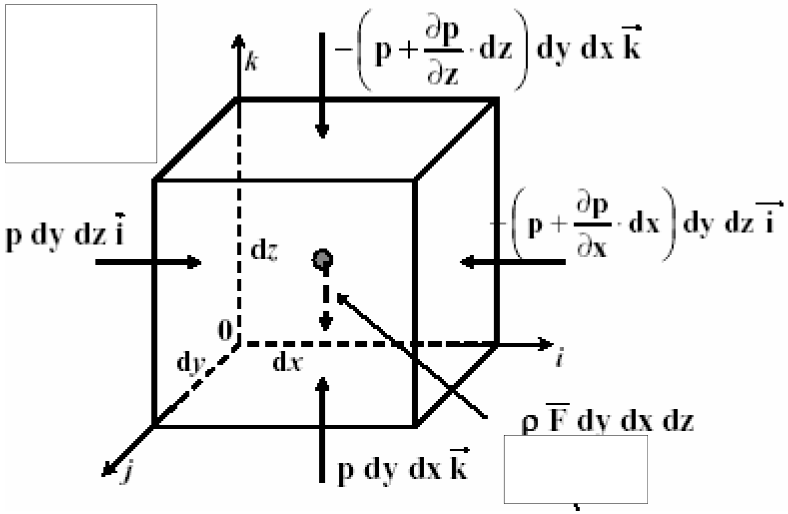


$$-\frac{\partial p}{\partial x}\cdot dx\, dy\, dz\, \bar{i}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}\cdot dx\, dy\, dz\, \bar{j}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}\cdot dx\, dy\, dz\, \bar{k}$$

Equazione indefinita



- Per effetto della forza peso il prismetto è soggetto alla forza di massa:

$$\rho\, \overline{\mathrm{F}}\, \mathrm{dx\, dy\, dz}$$

- F è una forza di massa per unità di massa ed è, pertanto, una accelerazione. Nel campo gravitazionale è indicata con g

Equazione indefinita

- Per l'equilibrio dovrà risultare:

$$\rho\,\overline{F}\,dx\,dy\,dz=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\,\overline{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\,\overline{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\,\overline{k}\right)dx\,dy\,dz=$$

$$\mathrm{grad}\,(p)\,dx\,dy\,dz$$

- L'equazione indefinita dell'equilibrio statico è:

$$\rho\,\overline{F}=\mathrm{grad}\,(p)$$

Equazione globale dell'equilibrio statico

- La equazione indefinità dell'equilibrio statico, sia pure con maggiore rigore formale, fornisce informazioni analoghe alla legge di Stevino
- E', in molti casi, utile poter applicare una equazione di equilibrio ad un volume di fluido non infinitesimo, W, avente superficie esterna A.
- Ciò può essere fatto tramite integrazione dell'equazione indefinita:

$$\int_W \rho \, g \, dW = \int_W \mathrm{grad}\,(p) \, dW$$

Equazione globale dell'equilibrio statico

$$\int_W \operatorname{grad}(p)\, dW = -\int_A p\, \mathbf{n}\, dA$$

- Questa eguaglianza si deduce dalla relazione esistente tra integrale di volume ed integrale di superficie:

$$\int_W \operatorname{grad}(p)\, dW = \int_W \left(\frac{\partial p}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\bar{k} \right) dW =$$

$$-\int_A p\, \left[\mathbf{i}\cos(nx) + \mathbf{j}\cos(ny) + \mathbf{k}\cos(nz)\right] dA = -\int_A p\, \mathbf{n}\, dA$$

Equazione globale dell'equilibrio statico

$$\int_W \rho \, g \, dW$$

- E' la risultante delle forze di massa agenti sul volume di fluido W, ed è indicata con il termine **G**

$$\int_A p \, \mathbf{n} \, dA$$

- E' la risultante delle forze agenti sulla superficie laterale ed è indicata con il termine Π

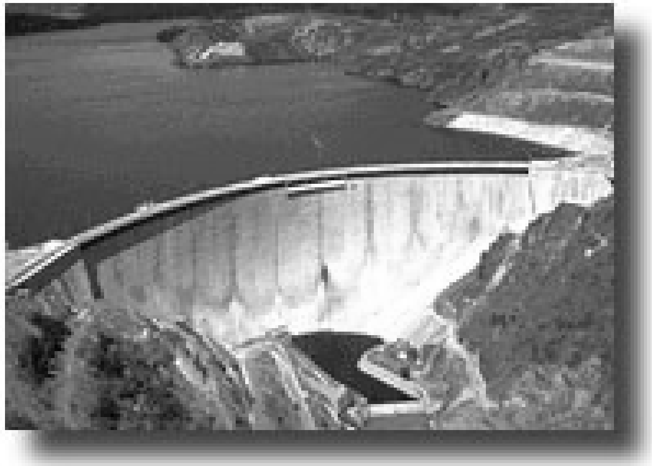
- In forma abbreviata, pertanto: $\overline{G} + \overline{\Pi} = \overline{0}$

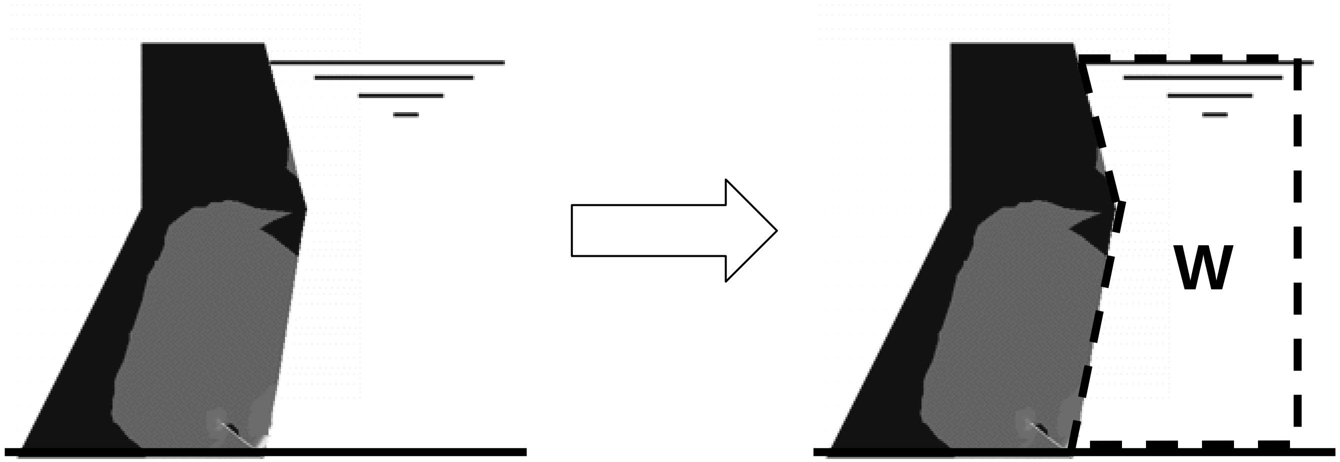
Utilità della equazione globale dell'equilibrio statico

- L'equazione globale dell'equilibrio statico è fondamentale per determinare la spinta di un fluido in quiete su di una parete curva.
- Tramite una opportuna scelta del volume di controllo è possibile ottenere come unica incognita la risultante delle forze al contorno tra fluido e parete.
- E', in molti casi, utile proiettare l'equazione globale secondo una terna di assi cartesiani per ottenere le componenti di tale risultante.

Esempio

- Supponiamo di voler calcolare la spinta alle spalle di una diga ad arco in cemento armato.
- Scegliamo il volume di controllo





Esempio

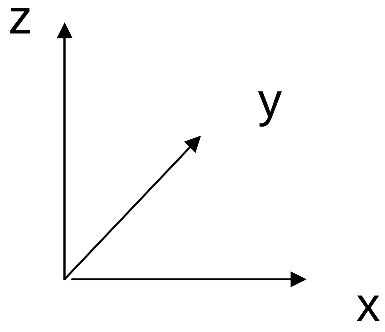
- Applichiamo l'eq. globale dell'equilibrio statico, proiettiamo lungo i tre assi:

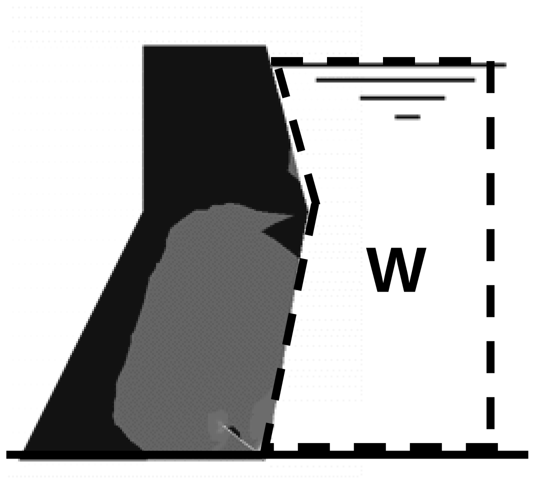
  $G_x+\Pi_x=0$

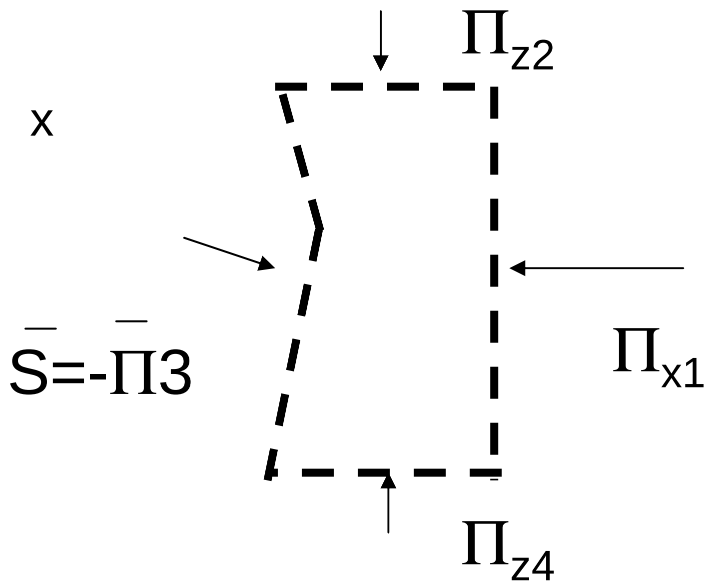
  $\cancel{G_y+\Pi_y=0}$

  $G_z+\Pi_z=0$

  e scomponiamo i termini Π_i lungo le diverse superfici





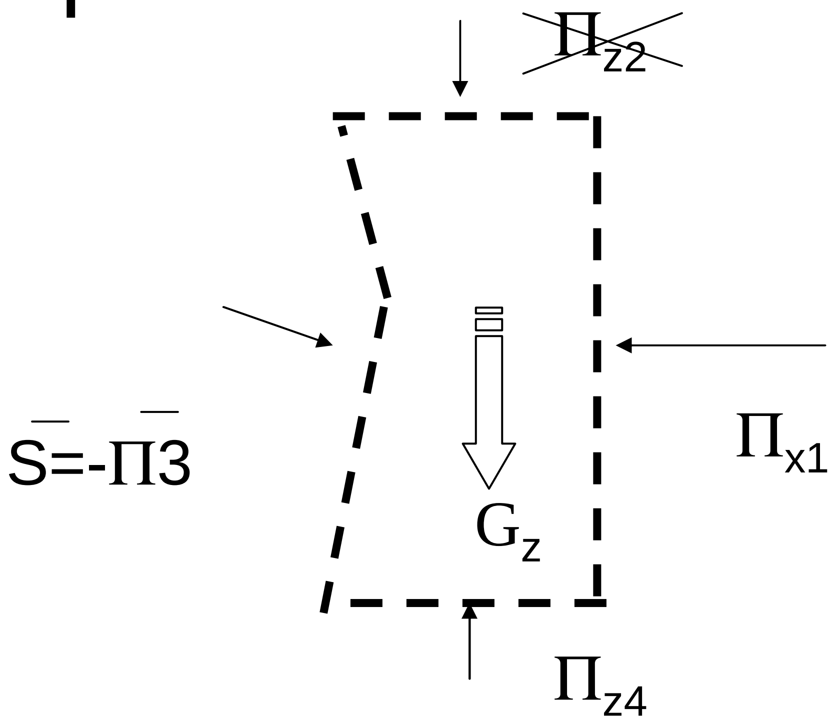


Esempio

- Scriviamo il bilancio dei soli termini non nulli dell'equazione globale:

  $\Pi_{x1} = S_x$

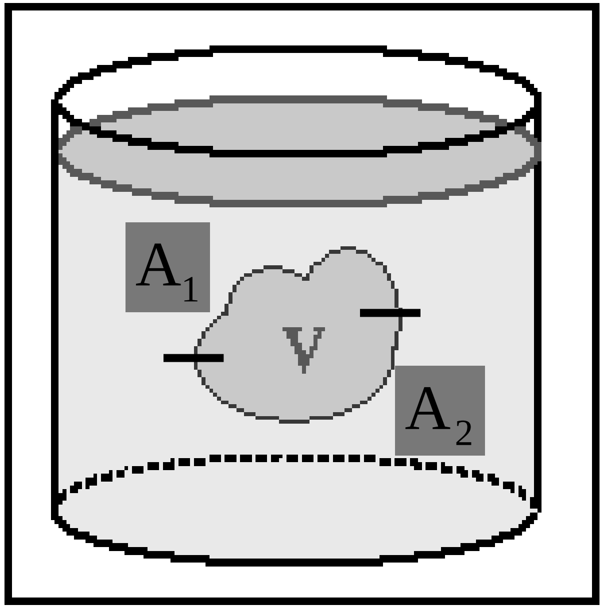
  $G_z + \Pi_{z4} = S_z$



- La prima conseguenza, di carattere generale, è che la componente orizzontale della spinta su una parete curva è uguale alla risultante degli sforzi sulla proiezione verticale della parete

Spinta di Archimede

- Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato



- Le componenti orizzontali della spinta si bilanciano.
- La differenza tra le componenti verticali della spinta sulle due superifici A_1 e A_2 è data da G_z