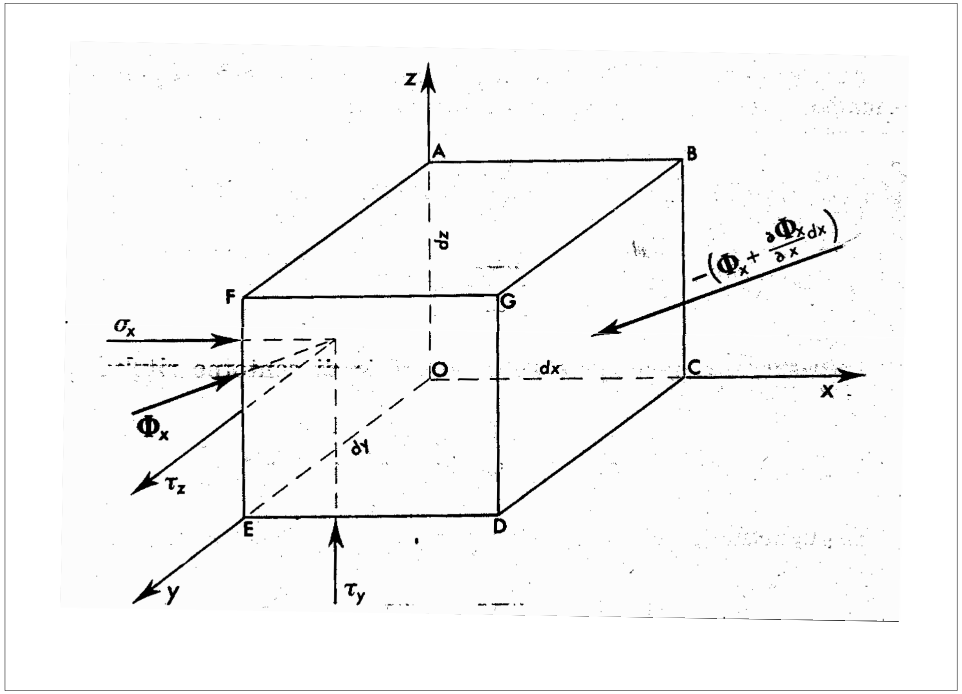
Idraulica

Equazione Indefinita
Teorema di Bernoulli

armando carravetta

Equazione indefinita del movimento

- Consideriamo l’equilibrio di un prismetto elementare di fluido in movimento



- Per l’equilibrio del prisma deve essere rispettata la prima equazione cardinale della dinamica

$$d\,\overline{\quad} = \overline{\mathbf{A}}\,dm$$

Equazione indefinita del movimento

$$d\overline{} = \overline{\mathbf{A}}\,dm$$

- *dm*=ρ dxdydz è la massa elementare contenuta nel prismetto.
- $d\overline{}$ è la risultante delle forze agenti sulla massa fluida, cioè :
  - delle forze di massa ρ**F***dm*,
  - degli sforzi agenti attraverso il contorno del prisma.
- $\overline{\mathbf{A}}$ è l'accelerazione cui detta massa è soggetta.

Equazione indefinita del movimento

- La risultante degli sforzi agenti sulle coppie di faccie ortogonali a ciascun asse è data dai tre termini:

$$\frac{\partial \overline{\Phi}_x}{\partial x} \qquad \frac{\partial \overline{\Phi}_y}{\partial y} \qquad \frac{\partial \overline{\Phi}_z}{\partial z}$$

- di conseguenza la relazione di equilibrio si scrive:

$$\rho\left(\overline{F} - \overline{A}\right) = \frac{\partial \overline{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\Phi}_z}{\partial z}$$

- Equazione indefinita del movimento

Fluido ideale

- Per un fluido ideale, nel quale il movimento non da luogo a sforzi tangenziali, l’equazione indefinita del movimento si scrive:

$$\rho\left(\overline{F}-\overline{A}\right)=\frac{\partial p}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\overline{k}=\operatorname{grad}(p)$$

- Equazione di Eulero

Ipotesi del teorema di Bernoulli

- Per un fluido ideale:

$$\rho \left(\overline{\mathrm{F}} - \overline{\mathrm{A}}\right) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{p})$$

- Soggetto al solo campo gravitazionale:

$$\overline{\mathrm{F}} = -\,\mathrm{g}\;\mathrm{grad}\,(\mathrm{z})$$

- Incomprimibile

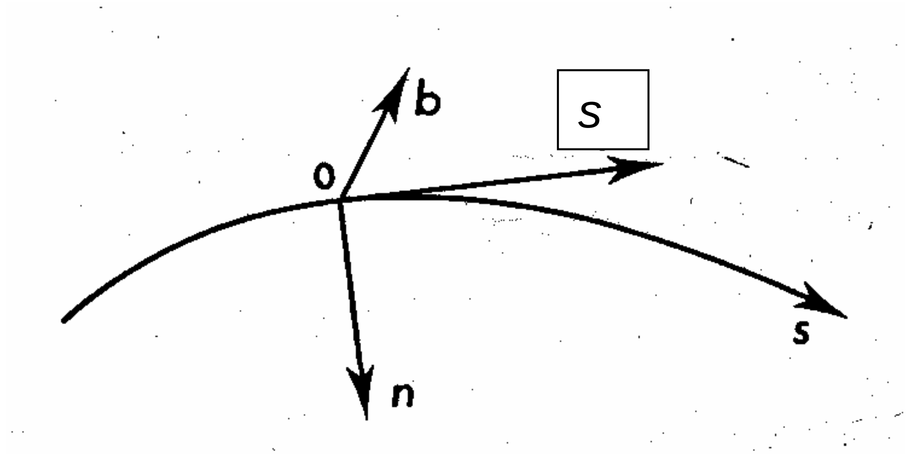
$$\rho\,\overline{\mathrm{F}} = -\,\rho\,\mathrm{g}\;\mathrm{grad}\,(\mathrm{z}) = -\,\mathrm{grad}\,(\gamma\,\mathrm{z})$$

Terna intrinseca

- L'equazione di Eulero si scrive:

$$-\frac{\overline{\mathrm{A}}}{g} = -\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{V}}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{grad}\left[\mathrm{z} + \frac{\mathrm{p}}{\gamma}\right]$$

- Introduciamo la terna intrinseca:



Proiezione sulla terna intrinseca

- A partire dalla proiezione lungo s si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\mathrm{z}+\frac{\mathrm{p}}{\gamma}\right]=-\frac{1}{g}\frac{d\mathrm{v}}{dt}$$

$$\mathrm{v}=\mathrm{v}(t,\mathrm{s}(t))$$

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt}=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial s}\frac{ds}{dt}=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+\mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial s}=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\mathrm{z}+\frac{\mathrm{p}}{\gamma}\right]=-\frac{1}{g}\frac{d\mathrm{v}}{dt}=-\frac{1}{g}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{2g}\right)$$

Variabilità della quota piezometrica

- Per la: $\frac{\partial}{\partial b}\left[z+\frac{p}{\gamma}\right]=0$ la quota piezometrica

  lungo la binormale è costante.

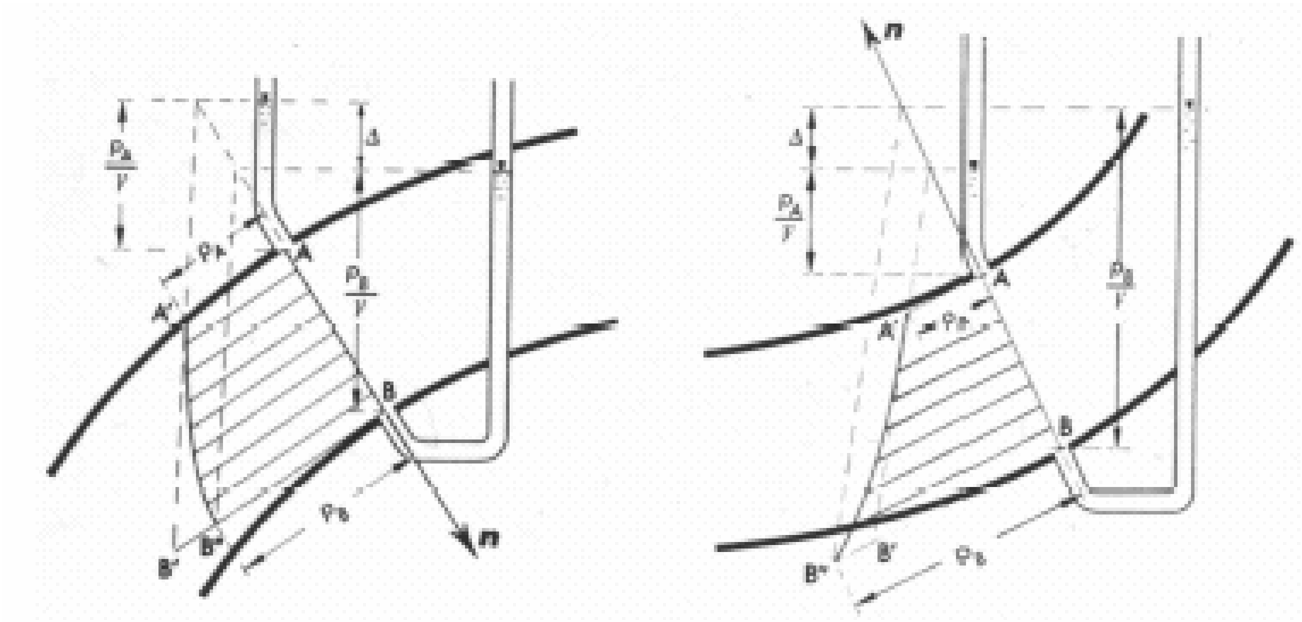
- Per la: $\frac{\partial}{\partial n}\left[z+\frac{p}{\gamma}\right]=-\frac{v^2}{gr}$ la quota piezometrica

  lungo la normale è generalmente variabile, tale variabilità dipende dal modulo della velocità e dal raggio di curvatura delle traiettorie.

Variabilità della quota piezometrica

- Per la: $$\frac{\partial}{\partial n}\left[z+\frac{p}{\gamma}\right]=-\frac{v^2}{gr}$$

$$\Delta=\left[z_B+\frac{p_B}{\gamma}\right]-\left[z_A+\frac{p_A}{\gamma}\right]=-\int_A^B\frac{v^2}{gr}\,dr$$



Correnti gradualmente variate

- Per la: $$\frac{\partial}{\partial n}\left[z+\frac{p}{\gamma}\right]=-\frac{v^2}{gr}$$ se il raggio di curvatura

  è molto grande risulta: $$\left[z+\frac{p}{\gamma}\right]_n \cong \text{costante}$$

- Nel caso in cui i filetti fluidi siano sensibilmente rettilinei e paralleli la corrente si dice gradualmente variata e la pressione varia con legge idrostatica lungo la normale *n* ai filetti.

Teorema di Bernoulli

- Nell'ulteriore ipotesi di moto permanente, v=v(x, y, z), introducendo il carico totale:

$$H = \mathrm{z} + \frac{\mathrm{p}}{\gamma} + \frac{\mathrm{v}^2}{2g}$$

Significato energetico

- Otteniamo il teorema di Bernoulli:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = 0$$

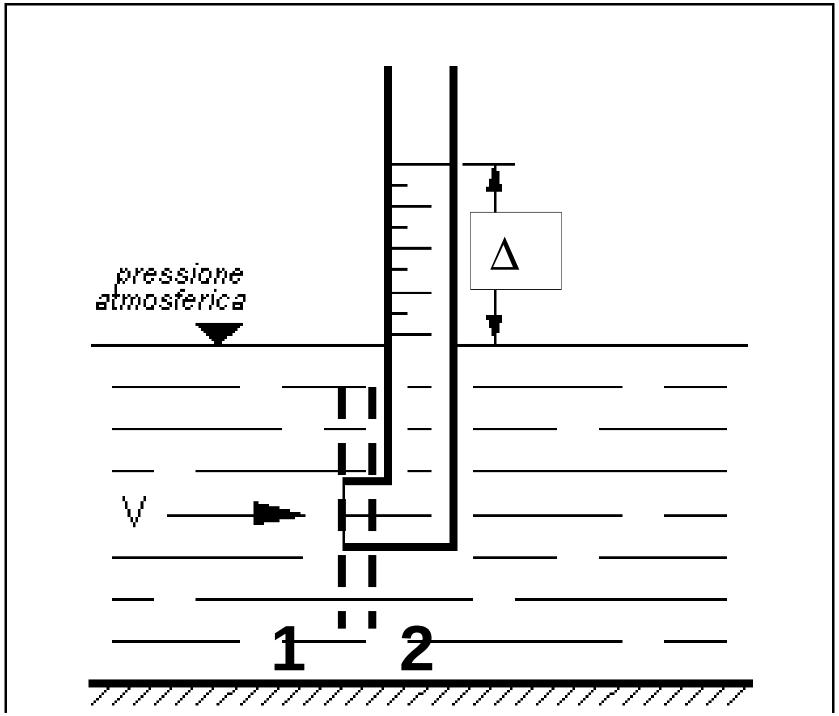
Teorema di Bernoulli

- Nel moto permanente di un fluido perfetto pesante incomprimibile il carico totale si mantiene costante lungo ogni traiettoria

$$\frac{\partial H}{\partial s} = 0$$

Applicazione – Tubo di Pitot

- Per un fluido perfetto il carico totale è costante: $$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost}$$



- Lo sarà anche tra le sezioni 1 e 2 del dispositivo

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

essendo $z_1=z_2$ e $v_2=0$ si ha:

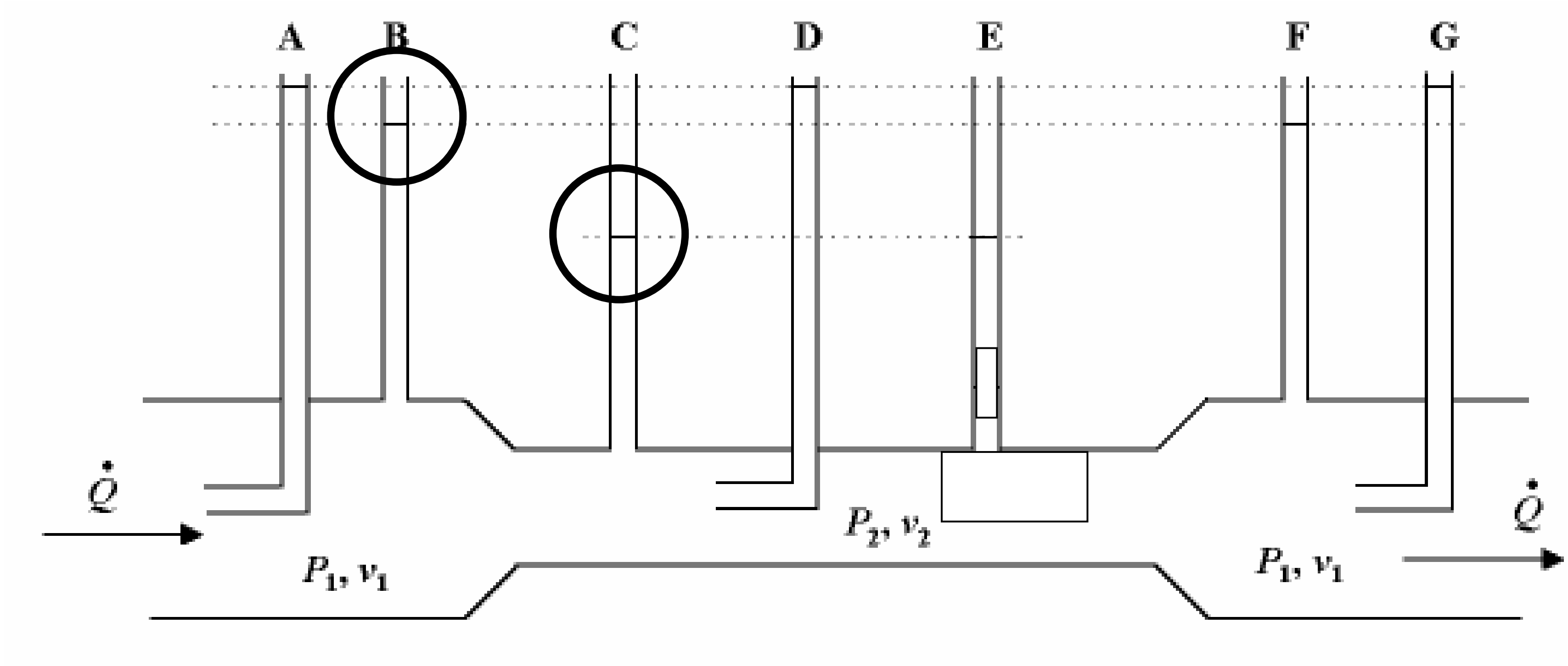
$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma}$$

e in definitiva

$$\Delta = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_1^2}{2g}$$

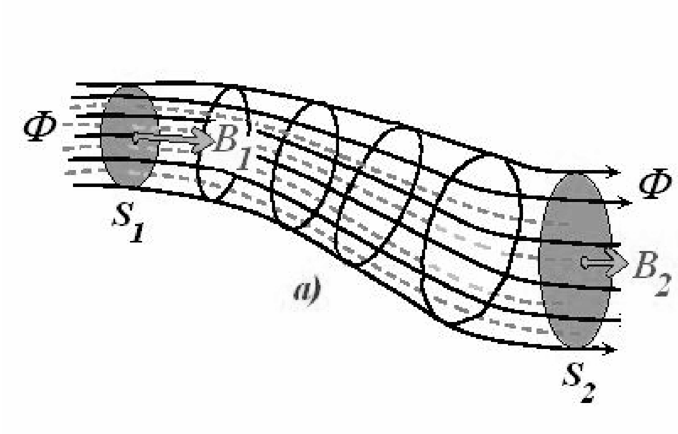
Significato del teorema di Bernoulli

- Ad ogni incremento di altezza cinetica corrisponde una riduzione di quota piezometrica



Estensione ad una corrente

- La potenza della corrente, energia che detta corrente fa passare nell'unità di tempo, deve essere costante



$$P = \int_Q \gamma H \; dQ = \int_A \gamma H \; \mathrm{v} \; dA = \gamma \int_A \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\mathrm{v}^2}{2g} \right) \mathrm{v} \; dA$$

- Nell'ipotesi di corrente gradualmente variata è possibile integrare i primi due termini, ottenendo:

$$P = \left(z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) Q$$

Estensione ad una corrente

- Si è introdotto il coefficiente di Coriolis:

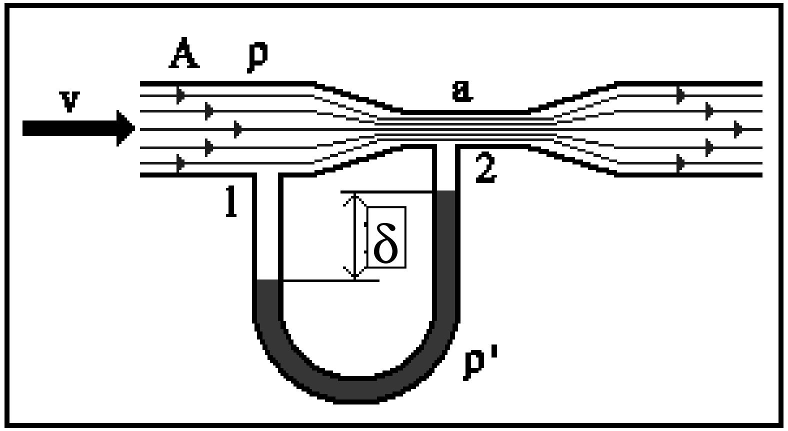
$$\alpha = \frac{\int_A \mathrm{v}^2 \mathrm{v} \, dA}{V^3 A}$$

- Con questo artificio abbiamo evitato di svolgere il terzo integrale che dipende dalla distribuzione delle velocità puntuali nella sezione trasversale.
- Per la costanza di P e di Q dovrà risultare:

$$H = \mathrm{z} + \frac{\mathrm{p}}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} = \mathrm{costante}$$

Applicazione – Venturimetro

- Per un corrente di fluido perfetto il carico totale è costante: $$z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{V^2}{2g} = \text{cost}$$



- Tra le sezioni 1 e 2 del dispositivo $$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = \delta\,\frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

Per la continuità della massa fluida $$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$$

e in definitiva $$Q = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}}\sqrt{2\,g\,\delta\,\frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}}$$

Interpretazione energetica

- Il teorema di Bernoulli si presta alla seguente interpretazione:

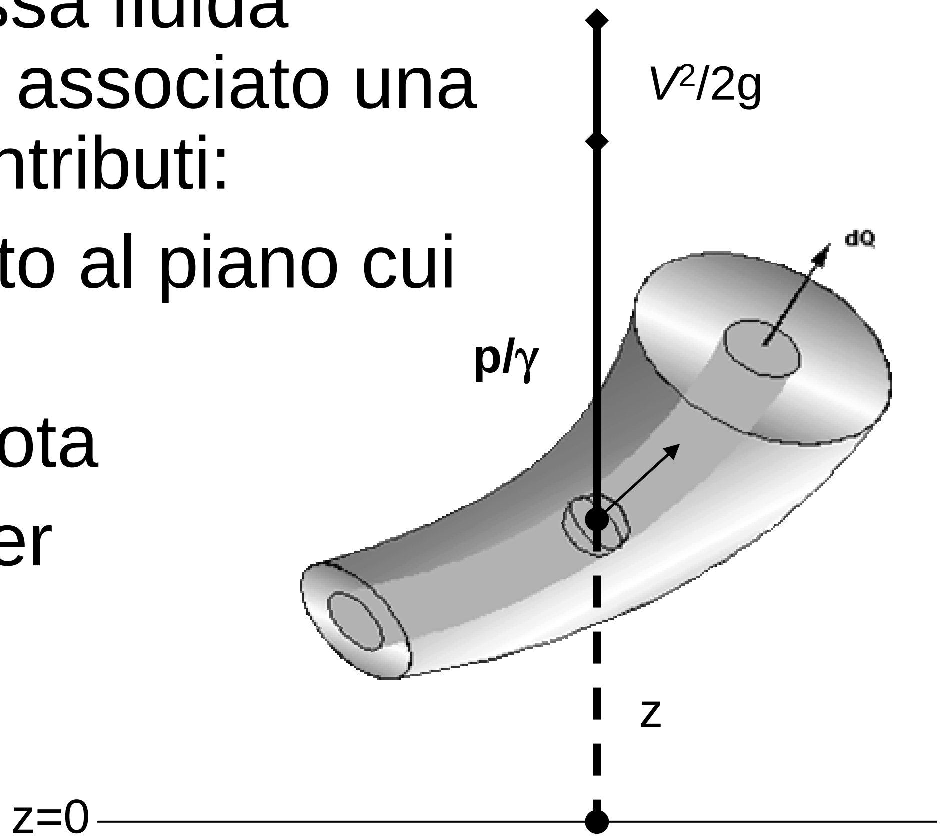
$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} = \text{costante}$$

- Al deflusso dQ della massa fluida all'interno del condotto è associato una energia somma di tre contributi:

  quota della massa rispetto al piano cui l'energia è riferita;

  altezza piezometrica (quota virtualmente raggiunta per effetto della pressione);

  energia cinetica.



Estensione a fluidi reali

- Nelle correnti costituite da fluidi reali, per la presenza delle dissipazioni, risulterà:

$$H = \mathrm{z} + \frac{\mathrm{p}}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} = \text{funzione decrescente}$$

  - Potremo peraltro scrivere una equazione di bilancio che tenga conto delle perdite di carico di tipo continuo o localizzato:

$$H(s_1) = H(s_0) - \int_{s_0}^{s_1} \mathrm{J}(s)\,ds - \sum_i \lambda_i$$

Perdite continue e localizzate

$$H(s) = H_0 - \int_0^s J(s)\, ds - \sum_i \lambda_i$$