INTORNI (VENTESIMA LEZIONE)

Nello spazio topologico (S, $\mathcal{A}$), sia x $\in$ S.

I $\subseteq$ S si dice intorno di x $\Leftrightarrow$ $\exists$ A $\in \mathcal{A}$: x $\in$ A e A $\subseteq$ I, ovvero

I $\subseteq$ S si dice intorno di x $\Leftrightarrow$ x $\in \overset{o}{I}$, dove si ricorda che $\overset{o}{I} = \bigcup_{A \subseteq I} A$ con A $\in \mathcal{A}$.

ESEMPI

- In ($\mathbb{R}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$),

  intorni di 0 sono:

  $]-1,1[$;

  $[-1,1[$;

  $]-\infty, 4] \cup \mathbb{N}$.

  $\mathbb{Z}$ non è un intorno di 0 .
- In ($\mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$),

  intorni di x = (2,1) sono tutti i cerchi del tipo C(x,r) e $\overline{C(x, r)}$.

  Inoltre il semipiano in cui x > 0 e y > 0 è un intorno di x, essendo un aperto contenente x.

  In generale, se A è un aperto contente x, allora A è un intorno di x.
- In ($\mathbb{R}$, $\mathcal{A}_S$),

  un intorno di 0 è $]-\infty, 4] \cup \mathbb{N}$.

  $]-1,1[$ non è un intorno di 0 .

*

Un criterio per capire se un insieme è un intorno di un dato punto x, è stabilire se l'insieme contenga il punto stesso al suo interno.

Sistema fondamentale di intorni

Presi x $\in$ S e la famiglia H(x) = {I_x : intorni di x }, si dice che H(x) è un sistema fondamentale di intorni di x $\Leftrightarrow$ $\forall$A aperto : x $\in$ A, $\exists$ I $\in$ H(x): I $\subseteq$ A.

ESEMPIO:

Nello spazio metrico (S, $\mathcal{A}_d$), si può scrivere: A $\in \mathcal{A}_d$ $\Leftrightarrow$ A è unione di cerchi aperti.

Preso quindi y $\in$ S, per costruire H(y) , si considera la famiglia {C(y,r) : r $\in \mathbb{R}^+$ }, che è un sistema fondamentale di intorni di y.

Infatti, sia A un aperto tale che y $\in$ A, allora A è unione di cerchi aperti e, in particolare, i cerchi aperti di centro y formano A.

*

Nello spazio metrico (S, $\mathcal{A}_d$), si può considerare la famiglia formata dai cerchi aperti

H´(y) = {C(y,q) : q $\in \mathbb{Q}^+$} e si prova che è un sistema fondamentale di intorni.

Infatti, se A è un aperto, A è unione di cerchi aperti a raggio reale.

Quindi, preso y : y $\in$ A, esiste C(y,r) contenuto in A con r > 0.

Poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, $\exists$ q $\in \mathbb{Q}$: 0 < q < r per cui C(y,q) $\subseteq$ C(y,r) $\subseteq$ A .

*

In particolare, in ($\mathbb{R}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$), preso x = 1, come sistema fondamentale di intorni di x si possono considerare le famiglie

H(x) = {$]1-r, 1+r[$: r $\in \mathbb{R}^+$ } e

H´(x) = {$]1-q, 1+q[$: q $\in \mathbb{Q}^+$ } .

Infatti, gli elementi della famiglia H(x)

- sono intorni, perché sono aperti che contengono il punto,
- formano un sistema fondamentale, perché un qualunque aperto è unione di intervalli aperti e $\forall$]a,b[: 1 $\in$]a,b[, $\exists$ r : $]1-r, 1+r[\subseteq$]a,b[
  per cui ogni aperto che contiene 1, contiene un elemento di H(x).

Infine, ragionando come prima, avendo visto che $\exists$ r : $]1-r, 1+r[\subseteq$]a,b[e poichè $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$,

$\exists$ q : q < r, per cui $]1-q, 1+q[\subseteq]1-r, 1+r[\subseteq$]a,b[.

*

Ogni proprietà che si deve verificare usando gli intorni di x, può essere verificata usando solo un sistema fondamentale di intorni di x .

In particolare, tra i sistemi fondamentali di intorni si può considerare $\mathcal{A}$(x) = { aperti contenenti x}.

Infatti, x $\in$ I $\forall$ I $\in \mathcal{A}$(x) e, viceversa, $\forall$ I $\in \mathcal{A}$(x), I $\subseteq$ I (ogni aperto che contiene x contiene un elemento della famiglia).

Se $\mathcal{B}$ è una base per (S, $\mathcal{A}$), un altro sistema fondamentale di intorni che si può considerare è

$\mathcal{B}$(x) = { B $\in \mathcal{B}$: x $\in$ B}.

Punti interni a un insieme e punti di aderenza per un insieme

Nello spazio topologico $(S, \mathcal{A})$, presi $X \subseteq S$ e $x \in S$,

x si dice interno a X $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, I_x \subseteq X$, cioè $\exists$ un aperto A : $x \in A$ e $A \subseteq X$.

x si dice aderente a X (o di aderenza per X) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\, I_x$, $I_x \cap X \neq \Phi$.

Esistono due tipi di punti di aderenza :

- se $\exists\, I_x$: $I_x \cap X = \{x\}$, x è detto ISOLATO e l'insieme dei punti isolati di X si indica con I(X).
- se $\forall\, I_x$, $(I_x - \{x\}) \cap X \neq \Phi$, x è detto DI ACCUMULAZIONE per X e l'insieme dei punti di accumulazione si indica D(X) e si dice derivato di X.

È bene notare che $I(X) \subseteq X$, mentre D(X) può non essere contenuto in X.

Si deve ora provare che la chiusura coincide con l'insieme di aderenza,

ovvero $\bar{X}$ = {punti aderenti a X}.

Si deve dunque dimostrare che $y \in \bar{X} \Leftrightarrow$ y è aderente a X, ovvero, $y \notin \bar{X} \Leftrightarrow$ y non è aderente a X.

Sia $y \notin \bar{X} \Rightarrow y \in \mathcal{C}(\bar{X})$.

Ricordando che $\bar{X} = \bigcap_{\substack{C_i \in \mathcal{C} \\ X \subseteq C_i}} C_i$, $\mathcal{C}(\bar{X}) = A \in \mathcal{A}$.

Poiché $\mathcal{C}(\bar{X})$ è un aperto contenente y, è un intorno di y e, in particolare, $\mathcal{C}(\bar{X}) \cap X = \Phi$.

Quindi y non è di aderenza, altrimenti $\mathcal{C}(\bar{X}) \cap X \neq \Phi$.

Viceversa,

Sia y non aderente a X.

$\exists\, I_x = A \in \mathcal{A}$: $A \cap X = \Phi$.

Poiché $y \in A \Rightarrow y \notin \mathcal{C}(A) \in \mathcal{C}$, dove $X \subseteq \mathcal{C}(A)$ (essendo $A \cap X = \Phi$).

Quindi, $\bar{X} \subseteq \mathcal{C}(A) \Rightarrow y \notin \bar{X}$.

*

Poiché esistono due tipi di punti di aderenza, si può scrivere : $\bar{X} = I(X) \cup D(X)$.

Si prova ora che $\bar{X} = X \cup D(X)$.

Infatti, $\forall x \in X \Rightarrow x \in \bar{X}$ e $\forall x \in D(X) \Rightarrow x \in \bar{X}$; quindi $X \cup D(X) \subseteq \bar{X}$.

Viceversa, sia $x \in \bar{X}$;

caso a) $x \in D(X) \Rightarrow$ x è di aderenza caso b) $x \notin D(X) \Rightarrow x \in I(X) \subseteq X \Rightarrow x \in X$

Quindi $x \in X \cup D(X) \Rightarrow \bar{X} \subseteq X \cup D(X)$

*

Punti di frontiera per un insieme

Si dice frontiera di X, e si indica F(X), l'intersezione della chiusura di X con la chiusura del complementare di X , cioè $F(X) = \bar{X} \cap \overline{\mathcal{C}(X)}$ = {punti aderenti sia a X che a $\mathcal{C}(X)$ }.

Si prova quindi che $\bar{X} = X \cup F(X)$.

Infatti, sia $x \in X \cup F(X)$. Allora x è aderente a X, quindi $X \cup F(X) \subseteq \bar{X}$.

Viceversa, sia $x \in \bar{X}$;

caso a) $x \in X$

caso b) $x \notin X \Rightarrow x \in \mathcal{C}(X) \subseteq \overline{\mathcal{C}(X)} \Rightarrow x \in F(X)$

Quindi $x \in X \cup F(X) \Rightarrow \bar{X} \subseteq X \cup F(X)$

*

Pertanto si può scrivere:

$\bar{X} = I(X) \cup D(X) = X \cup D(X) = X \cup F(X)$.

Infine si può dare la seguente definizione:

$\forall X \subseteq S$, X si dice denso in S $\Leftrightarrow \bar{X} = S$,

ovvero

X si dice denso in S $\Leftrightarrow \forall x \in S$, x è aderente a X $\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall I_x \Rightarrow I_x \cap X \neq \Phi$ e,

in particolare, $\forall$ aperto $A : x \in A, A \cap X \neq \Phi$.

ESEMPI

1) In $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_N)$, dato $X = \{0\} \cup [2,3[$, si ha:

$\overset{o}{X} =]2,3[$;

$\bar{X} = \overline{\{0\} \cup [2,3[} = \{0\} \cup [2,3]$;

$D(X) = [2,3]$;

I(X) = {0} ;

F(X) = {0,2,3}.

2) In ($\mathbb{R}$, $\mathcal{A}_S$), dato X = {0} ∪ [2,3[, si ha:

$\bar{X} = \overline{\{0\} \cup [2,3[} = [0, +\infty[$;

$\overset{o}{X} = \Phi$;

In particolare, il punto 4 è di accumulazione per X,

perchè ∃ I_4 = $]-\infty, b]$ con b > 4 : $I_4 \cap X \neq \Phi$.

I(X) = {0} (Si può isolare considerando la semiretta $]-\infty, b]$ con b < 2);

D(X) = X − {0};

$\mathcal{C}$(X) = $]-\infty, 0[\ \cup\ ]0,2[\ \cup\ [3, +\infty[$.

Poiché non esistono semirette destre che contengono semirette sinistre, $\overline{\mathcal{C}(X)} = \mathbb{R}$;

F(X) = $\bar{X} \cap \overline{\mathcal{C}(X)} = \bar{X} = [0, +\infty[$.