Compito di Geometria 2, gruppo 1

luglio 2012 - Prof. Durante

Cognome: ______________________________ Nome: ______________________

matr.:____________________ Orale:____________________

1. Sia assegnata la seguente famiglia di quadriche $\mathcal{F} = \{Q : a(x^2 + xy + y^2) + 2bxt + 2cyt + 2dt^2 - 2zt = 0\}_{a,b,c,d \in \mathbf{R}}$ di $P_3(\mathbf{C})$.

   1.1 Si classifichino le quadriche della famiglia $\mathcal{F}$.

   1.2 Si determino le eventuali quadriche di $\mathcal{F}$ aventi il piano $z = 0$ come piano tangente.

   1.3 Si determini il piano polare del punto $O(0, 0, 0, 1)$ rispetto a tutte le quadriche non degeneri di $\mathcal{F}$.

2. Si munisca l'insieme $\mathbf{R}$ della topologia $\mathcal{A}$ i cui aperti sono $\emptyset, \mathbf{R},]2 - a, 2 + a[$ al variare di $a \in \mathbf{R}^+$.

   2.1 Si studino le proprietá topologiche di $(\mathbf{R}, \mathcal{A})$ (connesssione, compattezza, assiomi di separazione e di numerabilitá).

   2.2 Assegnati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}$:

   $$A = \{x : x^2 \geq 1\}, B = \{x : x > 0\}, C = \{x, x^2 < 4\}, D = \{x : x^2 > 4\}$$

   si deteminino la loro chiusura, interiore, punti di accumulazione e punti isolati in $(\mathbf{R}, \mathcal{A})$ e in $(\mathbf{R}, \mathcal{N})$.

   2.3 Si dica se la funzione $f : x \in \mathbf{R} \to x + 2 \in \mathbf{R}$ é continua, aperta da $\mathbf{R}$ con la topologia naturale o con $\mathcal{A}$ a $\mathbf{R}$ con la topologia naturale o con $\mathcal{A}$.

   2.4 Si determinino gli eventuali punti di convergenza della successione $\{2 + \frac{1}{n}\}$ in $\mathbf{R}$ con la topologia $\mathcal{A}$.

3. Rispondere, fornendo le opportune spiegazioni, alle seguenti domande:

   3.1 La topologia $\mathcal{A}$ del numero 2. é piú fine, meno fine o non confrontabile con la topologia naturale di $\mathbf{R}$? E con la topologia $\mathcal{A}'$ i cui aperti sono $\emptyset, \mathbf{R},\ ] - a, a[$ con $a \in \mathbf{R}^+$?

   3.2 Si determini una quadrica non degenere $Q' \notin \mathcal{F}$ che abbia il piano polare del punto $O(0, 0, 0, 1)$ coincidente con uno dei piani polari di $O(0, 0, 0, 1)$ del punto 1.3

   4.3 Si discuta la connessione e la compattezza, in $\mathbf{R}^3$ con la topologia naturale, della parte reale delle quadriche della famiglia $\mathcal{F}$ assegnata nel numero 1.