

Esercizio 1

Scrivere delle **equazioni parametriche** della retta passante per il punto $P(1, 2, 3)$ e parallela al vettore $\mathbf{v}(-1, 2, 2)$.

- In generale, le **equazioni parametriche** della retta passante per il punto (x_1, y_1, z_1) e di **numeri direttori** (l, m, n) sono

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt \end{cases} .$$

- I **numeri direttori** di r sono semplicemente le componenti di \mathbf{v} :

$$(l, m, n) = (-1, 2, 2)$$

(o terne proporzionali).

Esercizio 1

Scrivere delle **equazioni parametriche** della retta r passante per il punto $P(1, 2, 3)$ e parallela al vettore $\mathbf{v}(-1, 2, 2)$.

Quindi possiamo rispondere

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} .$$

Esercizio 2

Scrivere delle **equazioni parametriche** della retta r passante per i punti $P(2, 0, -1)$, $Q(3, 2, 3)$.

- il vettore \overrightarrow{PQ} è ovviamente parallelo ad r ;
- $\overrightarrow{PQ} (3 - 2, 2 - 0, 3 - (-1)) = (1, 2, 4)$;
- quindi i **numeri direttori** sono $(1, 2, 4)$ (o proporzionali).
- Un punto della retta è $P(2, 0, -1)$ (o Q).

Possiamo rispondere

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases} .$$

Esercizio 3

Scrivere delle **equazioni cartesiane** della retta passante per il punto $P(1, 0, -3)$, e di numeri direttori $(5, -2, 4)$.

C'è la formula bell'e pronta:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

Quindi, nel nostro caso

$$\frac{x - 1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z + 3}{4}$$

Già così può andare, ma se vogliamo metterla nella forma (usuale) di sistema, basta scrivere:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} \\ \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{4} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -2x - 5y + 2 = 0 \\ 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4

Scrivere delle **equazioni cartesiane** della retta passante per i punti $P(-1, 2, 0)$ e $Q(-1, 1, 2)$.

I **numeri direttori** si ottengono considerando

$$\overrightarrow{PQ} (-1 - (-1), 1 - 2, 2 - 0) = (0, -1, 2):$$

$$(l, m, n) = (0, -1, 2) \quad (\text{o proporzionali}).$$

Se applichiamo la “formula bell’e fatta” di prima, otteniamo

$$\frac{x + 1}{0} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z}{2},$$

che è un po' brutto perché c'è un denominatore nullo.

[Zanella] dice che va interpretata come “doppia proporzione”, e spiega come ricavare anche in questo caso il sistema nella forma usuale.

Esercizio 4

Scrivere delle **equazioni cartesiane** della retta passante per i punti $P(-1, 2, 0)$ e $Q(-1, 1, 2)$.

Per evitare di ricordare una regola a memoria in più, suggerisco di ricordare semplicemente che

$$\frac{x + 1}{0} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z}{2}$$



$$\text{rk} \begin{pmatrix} x + 1 & y - 2 & z \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

Esercizio 4

Scrivere delle **equazioni cartesiane** della retta passante per i punti $P(-1, 2, 0)$ e $Q(-1, 1, 2)$.

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

Basta allora considerare due orlati di un elemento non nullo (nella seconda riga):

$$\begin{pmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{cases} -x - 1 = 0 \\ 2y + z - 4 = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 5

Scrivere delle **equazioni parametriche** e delle **equazioni cartesiane** della retta passante per i punti $P(0, 0, 1)$ e $Q(1, 3, 1)$.

Parametriche: $\overrightarrow{PQ} = (1, 3, 0)$, quindi

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 1 \end{cases} .$$

Esercizio 5

Scrivere delle **equazioni parametriche** e delle **equazioni cartesiane** della retta passante per i punti $P(0, 0, 1)$ e $Q(1, 3, 1)$.

Le cartesiane, oltre che con la formula diretta

$$\begin{pmatrix} x & y & z - 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ -z + 1 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z - 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

possono anche essere ricavate dalle parametriche con il metodo “di eliminazione del parametro”.

Esercizio 5

Scrivere delle **equazioni parametriche** e delle **equazioni cartesiane** della retta passante per i punti $P(0, 0, 1)$ e $Q(1, 3, 1)$.

Eliminazione del parametro:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = x \\ y = 3x \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 6

Scrivere delle **equazioni parametriche** e un'**equazione cartesiana** del piano passante per il punto $P(1, 0, 2)$ e parallelo ai vettori (non proporzionali) $(1, 1, 1)$, $(3, 1, 0)$.

In generale, le **equazioni parametriche** del piano π passante per il punto (x_1, y_1, z_1) e parallelo ad (l, m, n) , (l', m', n') sono

$$\begin{cases} x = x_1 + lt + l't' \\ y = y_1 + mt + m't' \\ z = z_1 + nt + n't' \end{cases} .$$

Quindi, nel nostro caso:

$$\begin{cases} x = 1 + t + 3t' \\ y = t + t' \\ z = 2 + t \end{cases} .$$

Esercizio 6

Scrivere delle **equazioni parametriche** e un'**equazione cartesiana** del piano π passante per il punto $P(1, 0, 2)$ e parallelo ai vettori (non proporzionali) $(1, 1, 1)$, $(3, 1, 0)$.

Per le **equazioni cartesiane** possiamo utilizzare (tra gli altri) uno dei due metodi

- formula pronta;
- eliminazione dei parametri.

Esercizio 6

Scrivere delle **equazioni parametriche** e un'**equazione cartesiana** del piano π passante per il punto $P(1, 0, 2)$ e parallelo ai vettori (non proporzionali) $(1, 1, 1)$, $(3, 1, 0)$.

La formula pronta è

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

Nel nostro caso

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante si ottiene

$$\pi : -x + 3y - 2z + 5 = 0 .$$

Esercizio 6

Scrivere delle **equazioni parametriche** e un'**equazione cartesiana** del piano π passante per il punto $P(1, 0, 2)$ e parallelo ai vettori (non proporzionali) $(1, 1, 1)$, $(3, 1, 0)$.

Eliminazione dei parametri:

$$\begin{cases} x = 1 + t + 3t' \\ y = t + t' \\ z = 2 + t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + z - 2 + 3t' \\ y = z - 2 + t' \\ t = z - 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -1 + z + 3(y - z + 2) \\ t' = y - z + 2 \end{cases} \rightarrow x - 3y + 2z - 5 = 0.$$

Qui l'eliminazione è fatta un po' "ad occhio": un metodo migliore è con la riduzione di Gauss (cfr. [Zanella, cap. 11, par. 8.1, soluzione 11]).

Esercizio 7

Scrivere un'equazione cartesiana del piano π passante per i punti $P(0, 1, 0)$, $Q(1, 1, 0)$, $R(2, 5, -1)$.

Due vettori paralleli a π sono $\overrightarrow{PQ}(1, 0, 0)$ e $\overrightarrow{QR}(1, 4, -1)$ (notiamo che non sono proporzionali: i punti non sono quindi allineati ed il piano π è univocamente determinato).

$$\begin{vmatrix} x & y - 1 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

↓

$$\pi : y + 4z - 1 = 0 .$$

Esercizio 8

Scrivere un'equazione cartesiana del piano π passante per i punti $P(1, 1, 1)$, $Q(2, 2, 1)$ e parallelo al vettore $(0, 3, 2)$.

Un altro vettore parallelo è $\overrightarrow{PQ}(1, 1, 0)$ (notiamo che non è proporzionale all'altro vettore $(0, 3, 2)$).

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

↓

$$\pi : -2x + 2y - 3z + 3 = 0 .$$

Esercizio 9

Trovare i numeri direttori della retta

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 5t \\ z = 3 + 2t \end{cases} .$$

$$(l, m, n) = (-1, -5, 2) \quad (\text{o proporzionali}) .$$

Esercizio 10

Trovare i numeri direttori della retta

$$r : \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 2 = 0 \end{cases} .$$

Formula bell'e pronta ([Olanda, secondo volume] oppure [Zanella, cap. 11, par. 6 (6.4)]) sono i tre minori, a segno alterno, della matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10

Trovare i numeri direttori della retta

$$r : \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 2 = 0 \end{cases} .$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} ,$$

+ - +

da cui:

$$(l, m, n) = (1, -7, -3) \quad (\text{o proporzionali}) .$$

Esercizio 11

Stabilire se le rette

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = 21 - t \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2} + t \\ z = -3t \end{cases}$$

sono o no parallele.

I **numeri direttori** sono

$$(l, m, n) = (-2, 3, -1), \quad (l', m', n') = (1, 1, -3).$$

Sono proporzionali?

No \Rightarrow r ed r' non sono parallele.

Esercizio 12

Stabilire se la retta

$$r : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2t \\ z = t - 5 \end{cases}$$

è o no parallela alla retta passante per $P(1, 1, 2)$ e $Q(3, -1, 1)$.

I **numeri direttori** sono

$$(l, m, n) = (-2, 2, 1), \quad (l', m', n') = (2, -2, -1) \text{ (vettore } \overrightarrow{PQ}\text{)}.$$

Sono proporzionali?

Si \Rightarrow le due rette sono parallele .

Esercizio 13

Stabilire se le rette

$$r : \begin{cases} x = 10 - 6t \\ y = 5 + 4t \\ z = 21 - 2t \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} x + 3y + 3z - 11 = 0 \\ -x + 3z + 8 = 0 \end{cases}$$

sono o no parallele.

I **numeri direttori** sono

$$(l, m, n) = (-6, 4, -2), \quad (l', m', n') = (9, -6, 3) \text{ (regola dei minori) .}$$

Sono proporzionali?

Si \Rightarrow r ed r' sono parallele .

Esercizio 14

Stabilire se la retta

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

ed il piano

$$\pi : 2x + y - z + 4 = 0$$

sono o no paralleli.

La **condizione di parallelismo** tra una retta di **numeri direttori** (l, m, n) ed un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è

$$al + bm + cn = 0.$$

Esercizio 14

Stabilire se la retta

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

e il piano

$$\pi : 2x + y + z + 4 = 0$$

sono o no paralleli.

Nel nostro caso

$$(l, m, n) = (-1, 1, 1), \quad (a, b, c) = (2, 1, 1).$$

$$al + bm + cn = -2 + 1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r \text{ e } \pi \text{ sono paralleli.}$$

Esercizio 14

Stabilire se la retta

$$r : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

e il piano

$$\pi : x + y + 4z + \sqrt{5} = 0$$

sono o no paralleli.

Abbiamo $(l, m, n) = (1, 1, 1)$, $(a, b, c) = (1, 1, 4)$

(la regola dei minori dà $(l, m, n) = (3, 3, 3)$, ma visto che vanno bene anche le terne proporzionali, è più comodo $(1, 1, 1)$).

$$al + bm + cn = 1 + 1 + 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r \text{ e } \pi \text{ non sono paralleli.}$$

Esercizio 15

Stabilire se i piani

$$\pi : 10x + 15y - 5z + 1 = 0, \quad \pi' : 6x + 9y - 2z = 0$$

sono o no paralleli.

La **condizione di parallelismo** tra piani di equazioni

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

è

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$$

(cioè (a, b, c) e (a', b', c') proporzionali).

Esercizio 15

Stabilire se i piani

$$\pi : 10x + 15y - 5z + 1 = 0, \quad \pi' : 6x + 9y - 2z = 0$$

sono o no paralleli.

Nel nostro caso

$$(a, b, c) = (10, 15, -5), \quad (a', b', c') = (6, 9, -2).$$

Sono proporzionali?

No \Rightarrow π e π' non sono paralleli .

Esercizio 16

Scrivere un'equazione cartesiana del piano π' passante per $P(3, -2, 4)$ e parallelo al piano $\pi : 2x + 5y + 3z - 8 = 0$.

Siccome π' deve essere parallelo a π i coefficienti (a, b, c) devono essere proporzionali a quelli dell'equazione di π : in particolare, gli stessi (a, b, c) vanno bene.

Possiamo semplicemente scrivere

$$2(x - 3) + 5(y + 2) + 3(z - 4) = 0$$

↓

$$\pi' : 2x + 5y + 3z - 8 = 0$$

È venuto $\pi' = \pi$! Niente di male: π è (impropriamente) parallelo a sé stesso. Ovviamente è un caso: anche se (a, b, c) sono gli stessi, la d in generale viene diversa.

Esercizio 17

Stabilire se le rette

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -2t \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} x + 3y + 3z = 0 \\ -x + 3z + 8 = 0 \end{cases}$$

sono o no ortogonali.

I **numeri direttori** sono

$$(l, m, n) = (-2, 3, -2), \quad (l', m', n') = (3, -2, 1).$$

(regola dei minori, con semplificazione finale).

La **condizione di ortogonalità** tra rette di **numeri direttori** (l, m, n) ed (l', m', n') è

$$ll' + mm' + nn' = 0.$$

Esercizio 17

Stabilire se le rette

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -2t \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} x + 3y + 3z = 0 \\ -x + 3z + 8 = 0 \end{cases}$$

sono o no ortogonali.

Nel nostro caso:

$$(l, m, n) = (-2, 3, -2), \quad (l', m', n') = (3, -2, 1),$$

$$ll' + nn' + mm' = -6 - 6 - 2 \neq 0 \Rightarrow r \text{ ed } r' \text{ non sono ortogonali.}$$

Esercizio 18

Stabilire se i piani

$$\pi : x - 2y + 3z - 4 = 0, \quad \pi' : x - 4y - 3z + 2 = 0$$

sono o no ortogonali.

Abbiamo

$$(a, b, c) = (1, -2, 3), \quad (a', b', c') = (1, -4, -3).$$

La **condizione di ortogonalità** tra piani di equazioni

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

è

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

Esercizio 18

Stabilire se i piani

$$\pi : x - 2y + 3z - 4 = 0, \quad \pi' : x - 4y - 3z + 2 = 0$$

sono o no ortogonali.

Nel nostro caso:

$$(a, b, c) = (1, -2, 3), \quad (a', b', c') = (1, -4, -3).$$

$$aa' + bb' + cc' = 1 + 8 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi \text{ e } \pi' \text{ sono ortogonali.}$$

Esercizio 19

Stabilire se la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -2t \end{cases}$$

ed il piano

$$\pi : x + y + 4z + \sqrt{5} = 0$$

sono o no ortogonali.

La **condizione di ortogonalità** tra una retta di **numeri direttori** (l, m, n) ed un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{pmatrix} = 1$$

(cioè (a, b, c) ed (l, m, n) proporzionali).

Esercizio 19

Stabilire se la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -2t \end{cases}$$

ed il piano

$$\pi : x + y + 3z - 1 = 0$$

sono o no ortogonali.

Nel nostro caso:

$$(l, m, n) = (-2, 3, -2) \quad (a, b, c) = (1, 1, 3),$$

Sono proporzionali?

No \Rightarrow r e π non sono ortogonali .

Esercizio 20

Determinare il punto P d'intersezione tra la retta

$$r: \begin{cases} 3x - 2y + z - 1 = 0 \\ y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

ed il piano

$$\pi: x + 3z - 7 = 0.$$

Basta ovviamente risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y + z - 1 = 0 \\ y + 2z - 6 = 0 \\ x + 3z - 7 = 0 \end{cases} :$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 8 & -20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

Esercizio 20

Determinare il punto P d'intersezione tra la retta

$$r: \begin{cases} 3x - 2y + z - 1 = 0 \\ y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

ed il piano

$$\pi: x + 3z - 7 = 0.$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 8 & -20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & -10 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 20

Determinare il punto P d'intersezione tra la retta

$$r: \begin{cases} 3x - 2y + z - 1 = 0 \\ y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

ed il piano

$$\pi: x + 3z - 7 = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 3x - 2y + z - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2y - z + 1}{3} = 1 \\ y + 2z - 6 = 0 \rightarrow y = 6 - 2z = 2 \\ z - 2 = 0 \rightarrow z = 2 \end{array}$$

Quindi $r \cap \pi$:

$$P(1, 2, 2).$$

Esercizio 21

Determinare il punto P d'intersezione tra la retta

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

ed il piano

$$\pi : x + y - z - 1 = 0 .$$

Si potrebbero ricavare equazioni cartesiane di r e poi risolvere il sistema come nell'Esercizio 20, ma si fa molto prima a ricavare il parametro in modo che il corrispondente punto soddisfi l'equazione di π :

Esercizio 21

Determinare il punto P d'intersezione tra la retta

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

ed il piano

$$\pi : x + y - z - 1 = 0 .$$

$$(2 - t) + t - (3 - 2t) - 1 = 0 \rightarrow 2t - 2 = 0 \rightarrow t = 1 ,$$

da cui

$$r : \begin{cases} x = 2 - t = 1 \\ y = t = 1 \\ z = 3 - 2t = 1 \end{cases} \rightarrow P(1, 1, 1) .$$

Esercizio 22

Scrivere delle equazioni cartesiane della retta r d'intersezione tra i piani

$$\pi : x - 2y + 3z - 4 = 0, \quad \pi' : x - y - 3z + 2 = 0$$

Una volta osservato, per sicurezza, che i piani effettivamente non sono paralleli ($(1, -2, 3)$ e $(1, -1, -3)$ non sono proporzionali), basta scrivere

$$r : \begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ x - y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 22

Scrivere un'equazione cartesiana del piano π contenente la retta

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

ed il punto $P(1, 2, 1)$.

Si potrebbero scegliere due punti su r e determinare il piano per tre punti (vedi Esercizio 7), ma si fa prima considerando il fascio di piani di asse r

$$\lambda(2x - y + z) + \mu(x + y + 1) = 0$$

e ricavando λ, μ in modo da ottenere un piano che passi per P :

$$\lambda(2 - 2 + 1) + \mu(1 + 2 + 1) = 0 \rightarrow \lambda + 4\mu = 0$$

Esercizio 22

Scrivere un'equazione cartesiana del piano π contenente la retta

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} .$$

ed il punto $P(1, 2, 1)$.

L'equazione

$$\lambda + 4\mu = 0$$

ha soluzione

$$(\lambda, \mu) = (-4, 1)$$

(o proporzionali).

Esercizio 22

Scrivere un'equazione cartesiana del piano π contenente la retta

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

ed il punto $P(1, 2, 1)$.

Quindi

$$\lambda(2x - y + z) + \mu(x + y + 1) = 0$$

$$\downarrow (\lambda, \mu) = (-4, 1)$$

$$-4(2x - y + z) + (x + y + 1) = 0$$

Svolgendo i conti:

$$\pi : -7x + 5y - 4z + 1 = 0 .$$

Un esercizio di geometria analitica (del primo anno), tipicamente, consiste nel determinare punti, rette, piani soddisfacenti assegnate condizioni, nella maggior parte dei casi riconducibili alle condizioni di parallelismo, ortogonalità, incidenza (intersezione); oppure a verificare se qualcuna di queste condizioni sia o meno verificata da dati punti, rette, piani. Dunque la soluzione consiste quasi sempre in una giusta combinazione degli esercizi elementari che abbiamo visto in questa lezione (con, ogni tanto, qualche scorciatoia a disposizione).

Andranno aggiunti però gli esercizi elementari riguardanti angoli e distanze.

Per comodità, riportiamo qui di seguito un quadro orientativo.

Quadro riassuntivo

Per determinare una retta r

Un punto $P(x_1, y_1, z_1) \in r$ e i numeri direttori (l, m, n)

oppure

Due piani che contengono r .

Per determinare un piano π

Un punto $P(x_1, y_1, z_1) \in \pi$ e

i coefficienti (a, b, c)

oppure

due vettori paralleli $\mathbf{v}(l, m, n), \mathbf{v}'(l', m', n')$.

oppure

Un fascio a cui π appartiene
ed una condizione che determina π tra i piani del fascio.

// = parallelismo, \perp = ortogonalità, \sim = proporzionalità:

Parallelismo

$$r // r' \iff (l, m, n) \sim (l', m', n')$$

$$\pi // \pi' \iff (a, b, c) \sim (a', b', c')$$

$$r // \pi \iff al + bm + cn = 0$$

Ortogonalità

$$r \perp r' \iff ll' + mm' + nn' = 0$$

$$\pi \perp \pi' \iff aa' + bb' + cc' = 0$$

$$r \perp \pi \iff (l, m, n) \sim (a, b, c)$$

Un esercizio che, pur potendo essere ricondotto agli esercizi elementari precedenti, è praticamente elementare anch'esso, riguarda la nozione di **rette sghembe**. Ricordiamo:

Definizione

r, r' rette:

r, r' sghembe $\iff r, r'$ non contenute in uno stesso piano.

(non complanari).

Due rette sghembe **non possono intersecarsi** in un punto P , altrimenti sarebbero contenute nel piano passante per P e parallelo alle due rette. Anche rette (propriamente) parallele non si intersecano, ma a differenza delle sghembe, sono contenute in uno stesso piano: quello passante per un punto dell'una, un punto dell'altra e parallelo ad un (solo) vettore parallelo ad entrambe. Deduciamo quindi

Caratterizzazione

r, r' rette:

r, r' sghembe $\iff r, r'$ non incidenti e non parallele.

(incidenti = ad intersezione non vuota).

Provate a costruire voi stessi degli esercizi (quasi) elementari che chiedono di controllare se due rette (date in forma parametrica o cartesiana) sono o meno sghembe. Si può usare quanto appreso in precedenza, ma ci sono anche due utili scorciatoie:

- Se le rette sono date in forma parametrica, vedere [Zanella, cap. 11, par. 6, formula (6.9)]
- Se le rette sono date in forma cartesiana, si costruisca il “sistemone” costituito dalle quattro equazioni: basta controllare se il determinante della matrice completa (4×4) è o no uguale a zero (esercizio facoltativo: perché?).

Attenzione però: se si usano le scorciatoie all'esame, è bene essere in grado (a richiesta) di spiegare perché funzionano.