Svolgimento di vecchi esercizi (Esercizi5.pdf)

Esercizio

Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare data da

$$(x, y, z) \stackrel{f}{\longmapsto} (\, x + 2y - z \,,\, 3y + z \,,\, x + 5y \,,\, x + 8y + z \,) \,.$$

Trovare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

Determiniamo il nucleo

I vettori del nucleo sono gli $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che
$f(x, y, z) = \mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$:

$$\begin{array}{l} f(x,y,z) \\ \quad || \\ (\, x + 2y - z\,,\; 3y + z\,,\; x + 5y\,,\; x + 8y + z\,) \end{array}$$

Quindi:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ x + 5y = 0 \\ x + 8y + z = 0 \end{cases} .$$

Determiniamo il nucleo

Risolviamo il sistema (omogeneo):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathbf{a}_3 \mapsto \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_4 \mapsto \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathbf{a}_3 \mapsto \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_4 \mapsto \mathbf{a}_4 - 2\mathbf{a}_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases} \to \begin{array}{l} x = -2y + z = \frac{5}{3}z \\ y = -\frac{1}{3}z \end{array}$$

Base del nucleo

Dunque

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \left(\frac{5}{3}z \, , \, -\frac{1}{3}z \, , \, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}$$

e come sua base possiamo prendere

$$\left(\left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \right) \right)$$

(o anche ovviamente $(\,(5, -1, 3)\,)$).

Base dell'immagine

Per trovare una base di $\operatorname{Im} f$ conviene ricordare che, denotata con $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ la matrice associata ad f rispetto a due basi, allora

> le colonne di $M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ forniscono le componenti in $\mathcal{B}'$ di un sistema di generatori di $\operatorname{Im} f$.

Per avere una base, basta quindi selezionare un sistema massimale indipendente di colonne e calcolare i corrispondenti vettori (nel caso la base $\mathcal{B}'$ sia naturale non c'è bisogno di calcoli: le colonne selezionate costituiscono già la base).

Base dell'immagine

Nel nostro caso, l'espressione esplicita di f fornisce subito la matrice associata ad f rispetto (addirittura) alle basi naturali:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Per trovare un sistema massimale di colonne indipendenti si può usare il teorema degli orlati, ma poiché abbiamo già determinato il nucleo, possiamo subito dire che

$$\dim \operatorname{Im} f = 2.$$

(basta usare la formula $\dim \operatorname{Im} + \dim \operatorname{Ker} = \dim [\text{dominio}]$, oppure osservare che la matrice è proprio la matrice dei coefficienti del sistema usato per determinare il nucleo).

Base dell'immagine

Due colonne indipendenti si trovano subito (siccome sono 2, basta che non siano proporzionali):

$$(\, (1,0,1,1) \, , \, (2,3,5,8) \,) \; .$$

E così abbiamo trovato una base dell'immagine.

Esercizio

Risolvere, prima col metodo di Gauss e poi col metodo "Rouché-Capelli e Cramer", il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 3y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathbf{a}_2 \mapsto \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \mapsto \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ \mathbf{a}_3 \mapsto \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ \\ y - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{array}{l} x = 2y + 1 = 3 \\ \\ y = 1 \end{array}$$

Quindi:

Il sistema ha un'unica soluzione (sistema compatibile e determinato):

$$(x, y) = (3, 1)\ .$$

Vediamo ora con l'altro metodo.
Calcoliamo (contemporaneamente) il rango delle due matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \color{blue}{-1} \\ 2 & -3 & \color{blue}{-3} \\ 1 & -1 & \color{blue}{-2} \end{pmatrix}$$

Minore di ordine non nullo di ordine 1:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & -2 & \color{blue}{-1} \\ 2 & -3 & \color{blue}{-3} \\ 1 & -1 & \color{blue}{-2} \end{pmatrix}$$

Orliamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

L'orlato preso è non nullo (il determinante è $-3+4=1$).

Ripartiamo dal minore

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Nella matrice dei coefficienti non si può più orlare $\Rightarrow$ rango $r = 2$.
Nella matrice completà c'è anche l'orlato

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Questo orlato è nullo (il determinante è
$1 \cdot (6-3) + 2 \cdot (-4+3) - 1 \cdot (-2+3) = 3 - 2 - 1 = 0$).
Non ci sono altri orlati da controllare $\Rightarrow$ anche il rango della matrice completa è $r' = 2$.

Il teorema di Rouché-Capelli assicura che il sistema è compatibile. Dobbiamo allora determinare le soluzioni.

Poiché il minore fondamentale coinvolge le prime due righe, basta considerare le prime due equazioni:

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

Poiché il minore fondamentale coinvolge tutte le (due) colonne, possiamo ricavare direttamente le due incognite x e y (non ci sono variabili libere).

Metodo con orlati, Rouché-Capelli e Cramer

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}}{1} = 3 \\[2em] y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{1} = 1 \end{array}$$

(il denominatore 1 è dato dal minore fondamentale).
Quindi, troviamo ancora che

il sistema ha un'unica soluzione (sistema compatibile e determinato):

$$(x, y) = (3, 1) \ .$$

Esercizio

Trovare autovalori ed autovettori dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ dato da

$$(x, y, z) \mapsto (\, x + 2y - z \,,\, y + z \,,\, 3x + 4y - 5z \,)$$

e dire se è diagonalizzabile (motivando la risposta).

Matrice associata "naturalmente":

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$\begin{vmatrix} 1-t & 2 & -1 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 3 & 4 & -5-t \end{vmatrix}$$

$$= (1-t)\Big((1-t)(-5-t)-4\Big) - 2(-3) - 1(-3+3t)$$

$$= (1-t)(-9+4t+t^2) - 3t + 9 = -t^3 - 3t^2 + 10t \ .$$

Equazione caratteristica:

$$t^3 + 3t^2 - 10t = 0 \ .$$

t in evidenza:

$$t(t^2 + 3t - 10) = 0 \ .$$

Autovalori

$$t(t^2 + 3t - 10) = 0$$

ammette la soluzione

$$t = 0$$

e le soluzioni

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \begin{cases} \frac{-3+7}{2} = 2 \\ \frac{-3-7}{2} = -5 \end{cases} .$$

Abbiamo così trovato tre autovalori: $t = 0$, $t = 2$, $t = -5$.

Diagonalizzabilità

Anche prima di trovare gli autovettori, possiamo già affermare che

$$f \text{ è diagonalizzabile.}$$

Infatti, f ammette 3 autovalori distinti e 3 è la dimensione dello spazio $\mathbf{R}^3$: questa è una condizione sufficiente (ma non obbligatoria) per la diagonalizzabilità.

Autovettori

Gli autovettori di autovalore t qui sono semplicemente le soluzioni non nulle del sistema omogeneo che ha per matrice dei coefficienti la matrice

$$\begin{pmatrix} 1-t & 2 & -1 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 3 & 4 & -5-t \end{pmatrix}$$

già usata prima.

Qui la base scelta è quella naturale: in generale le soluzioni non nulle del sistema ci danno le componenti degli autovettori!

$t = 0$

Per $t = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

È facile usare la riduzione a gradini, ma si fa anche prima tenendo presente che il rango è per forza 2, e le prime due righe sono chiaramente indipendenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Regola dei tre minori $\Rightarrow (3, -1, 1)$.
Dunque gli autovettori di autovalore 0 sono

$$(3h, -h, h)\ , \quad h \neq 0$$

(nell'autospazio ci va anche $\mathbf{0}$, quindi è $V_0 = \{(3h, -h, h) : h \in \mathbb{R}\} = \langle(3, -1, 1)\rangle$, ma qui l'esercizio chiede gli autovettori, non l'autospazio).

Per $t = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Regola dei tre minori $\Rightarrow (1, 1, 1)$.
Dunque gli autovettori di autovalore 2 sono

$$(h, h, h)\ , \quad h \neq 0\ .$$

Mi raccomando!!! Questa scorciatoia non va bene sempre. Se non si è sicuri, meglio risolvere il sistema omogeneo passo passo.

Per $t = -5$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Regola dei tre minori $\Rightarrow (8, -6, 36) \Rightarrow (4, -3, 18)$.
Dunque gli autovettori di autovalore -5 sono

$$(4h, -3h, 18h)\ , \quad h \neq 0\ .$$

Mi raccomando!!! Questa scorciatoia non va bene sempre. Se non si è sicuri, meglio risolvere il sistema omogeneo passo passo.

Fine esercizio

Abbiamo esaminato tutti e tre gli autovalori, e dunque le tre famiglie di autovettori così trovate ci danno tutti i possibili autovettori di f, come richiesto.

Svolgimento di vecchi esercizi (Esercizi5.pdf)

Esercizio

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo dato da

$$x \mapsto (\, x \, , \, -x \, , \, \sqrt{2}\, x \,) \, .$$

Trovare la matrice associata ad f rispetto alle basi

$$\big(\, -2 \,\big) \qquad \text{e} \qquad \big(\, (2,1,0) \, , \, (1,1,1) \, , \, (0,1,0) \,\big) \, .$$

Basta

- calcolare le immagini dei vettori della prima base (qua è uno solo);
- calcolarne le componenti rispetto alla seconda base;
- scrivere in colonna i vettori delle componenti così ottenute.

Svolgiamo

Immagine:

$$f(-2) = \left(-2\,,\, 2\,,\, -2\sqrt{2} \right)\ .$$

Componenti:

$$\left(-2\,,\, 2\,,\, -2\sqrt{2} \right) = a(2,1,0) + b(1,1,1) + c(0,1,0)$$

$$= (\ 2a + b\,, a + b + c\,, b\ )$$

Quindi

$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ a + b + c = 2 \\ b = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

Risolvendo col metodo preferito:

$$(a, b, c) = \left(-1 + \sqrt{2}\,,\, -2\sqrt{2}\,,\, 3 + \sqrt{2} \right)$$

Matrice associata richiesta

Mettiamo in colonna:

$$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} \\ \\ -2\sqrt{2} \\ \\ 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Questa è la matrice richiesta.

Esercizio

Trovare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da

$$(2,1,2)\,,\ (1,-1,-1)\ .$$

Basta applicare Gram-Schimdt:

$$(1,-1,-1)-\frac{(1,-1,-1)\cdot(2,1,2)}{(2,1,2)\cdot(2,1,2)}(2,1,2)=(1,-1,-1)+\frac{1}{9}(2,1,2)$$

$$=\left(\frac{11}{9},-\frac{8}{9},-\frac{7}{9}\right)\ .$$

Otteniamo la base ortogonale

$$\left(\ (2,1,2)\,,\ \left(\frac{11}{9},-\frac{8}{9},-\frac{7}{9}\right)\ \right)\ .$$

Base ortonormale richiesta

Normalizzando

$$\left((2,1,2)\,, \left(\frac{11}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}\right) \right)$$

otteniamo una base ortonormale

$$\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\,, \left(\frac{11\sqrt{26}}{78}, -\frac{8\sqrt{26}}{78}, -\frac{7\sqrt{26}}{78}\right) \right)$$

come richiesto.

Esercizio

Siano

$$P(1,0,2)\ , \quad r: \begin{cases} x = 3-2t \\ y = 1 \\ z = 2+2t \end{cases} \quad , \quad \pi : x+2y-z-1=0$$

un punto, una retta e un piano. Trovare (se c'è) una retta passante per P, incidente r e parallela a π.

Metodi per "imporre" l'incidenza

Possiamo considerare, per ciascun valore t, la retta s_t che passa per P ed il punto P_t di r corrispondente a t, cioè

$$P_t(3-2t, 1, 2+2t)\,.$$

La nostra retta (se c'è) è per forza tra queste. Imponiamo il parallelismo con π:

- i numeri direttori di s_t sono dati da $\overrightarrow{PP_t}(2-2t, 1, 2t)$;
- condizione di parallelismo: $1(2-2t)+2(1)-1(2t)=0$ $\Rightarrow 4-4t=0 \Rightarrow t=1$.

Dunque c'è una sola retta che fa al caso nostro: s_1. Le equazioni si ottengono facilmente come sappiamo:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = 2+2t' \end{cases}$$

(c'è t' per pignoleria, per non confonderlo con la t di prima).

Metodi per "imporre" l'incidenza

Il secondo metodo è più comodo quando la retta "di partenza" è data in forma cartesiana:

$$r : \begin{cases} x + z - 5 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

(è la stessa di prima).
Troviamo il piano α che contiene r e P:

$$\lambda(x + z - 5) + \mu(y - 1) = 0 \overset{(x,y,z)=(1,0,2)}{\Longrightarrow} -2\lambda - \mu = 0 \, .$$

Possiamo prendere $(\lambda, \mu) = (1, -2)$, e otteniamo

$$(x + z - 5) - 2(y - 1) = 0 \;\Rightarrow\; x - 2y + z - 3 = 0 \, .$$

Che l'abbiamo trovato a fare? Risposta: La nostra retta deve stare per forza su questo piano.
... Ma deve stare anche sul piano β passante per P e parallelo a π:

$$\beta : \; 1(x - 1) + 2(y - 0) - 1(z - 2) = 0 \;\Rightarrow\; x + 2y - z + 1 = 0 \, .$$

Metodi per “imporre” l’incidenza

I due piani α e β non sono paralleli, dunque la retta (se c’è) deve essere proprio la loro intersezione:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases} .$$

E infatti questa retta è proprio la s_1 trovata prima (per controllare, basta sostituire le equazioni parametriche di s_1 nel sistema di sopra e constatare che è sempre soddisfatto).
Se non avessimo già svolto l’esercizio con il metodo precedente, potevamo essere sicuri che la retta trovata era quella voluta? No.
Infatti, anche se la retta deve stare su α, non tutte le rette su α sono incidenti r: alcune sono parallele.

Metodi per “imporre” l’incidenza

Con il secondo metodo, è quindi obbligatoria una (facile) verifica finale che la retta ottenuta non sia parallela ad r:

- numeri direttori di r: $(1, 0, -1)$ (tre minori a segno alterno);
- numeri direttori della retta trovata: $(0, 1, 2)$ (tre minori a segno alterno, con semplificazione finale);
- non proporzionali $\Rightarrow$ rette non parallele $\Rightarrow$ la retta è effettivamente incidente r.

Le altre due condizioni sono sicuramente verificate, e dunque abbiamo effettivamente trovato la retta richiesta.

Metodi per “imporre” l’incidenza

Per rendersi conto che effettivamente in certi casi la retta richiesta può non esistere, ripetere (con i due metodi) l’esercizio prendendo i dati

$$P(1,1,2)\,, \quad r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 2-t \end{cases}, \quad \pi : x-y-z+1=0$$

...e, già che ci siamo, provare anche con $\pi : x+z+2=0$ (e P ed r come qua sopra).