Programma del corso di Geometria 1, gruppo 1

Prof. N. Durante

A.A. 2010-2011

Testi di riferimento:

[Z] Corrado Zanella, *Fondamenti di ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA.* Terza edizione. Esculapio, Bologna (2010).

[O1] Domenico Olanda, *Note di Algebra lineare* (*).

[O2] Domenico Olanda, *Note di geometria* (*).

[O3] Domenico Olanda, *Fondamenti di geometria piana (versione ridotta)* (*).

(*) I testi di Olanda sono disponibili su http://www.docenti.unina.it/nicola.durante (sezione "materiale didattico" - cartella "GEOMETRIA_1"). Attenzione: le versioni cartacee disponibili presso l'A.Di.S.U. presentano alcune differenze.

Nozioni basilari

Insiemi numerici fondamentali: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Nozioni elementari sulle applicazioni tra insiemi.	[Z, cap. 1, par. 1,2] (per il campo complesso non è richiesto studiare il cap. 2).
Nozioni elementari sui gruppi.	[O1, cap. I, par. 1 fino alla definizione di gruppo abeliano (pag. 4)].
Campi. Nozioni elementari sulle Matrici.	[Z, cap. 1, par. 4,5, fino alla proposizione 5.1 esclusa] si preferirà però la notazione $M_{m,n}(K)$ invece di $\mathcal{M}(m \times n, K)$.
Relazioni di equivalenza. Vettori applicati. Equipollenza. Vettori geometrici (liberi).	[Z, cap. 1, par. 3].

Spazi vettoriali

Operazioni di somma e di prodotto per uno scalare in $\mathbb{R}^n$; loro proprietà basilari. Definizione di spazio vettoriale. Esempi.	[Z, cap. 3, par. 1,2,3, escluso esempio 3.6].
Sottospazi: definizione ed esempi. Intersezione e unione di sottospazi. Somma di sottospazi. Somma diretta.	[Z, cap. 3, par. 4].
Sequenze (o sistemi) di vettori. Sequenze linearmente dipendenti e linearmente indipendenti di vettori. Sottospazio generato. Generatori. Spazi finitamente generabili.	[Z, cap. 4, par. 1], si preferirà il termine *sequenza* o *sistema* invece di *famiglia* (nel contesto della dipendenza lineare tra vettori). Uno spazio V si dice *finitamente generabile* se esiste un sistema finito di generatori di V.
Proprietà elementari della dipendenza lineare.	[Z, cap. 4, par. 2].
Basi. Componenti (o coordinate) di un vettore rispetto ad una base (ordinata).	[Z, cap. 5, par. 1], per i vettori si usa più spesso il termine *componenti* invece di *coordinate*. Una base (ordinata) è anche detta *riferimento* (vettoriale).
Ogni sequenza (finita) di generatori contiene una base. Teorema di Steinitz (può alternativamente essere ottenuto come conseguenza del teorema dello scambio). Le basi di uno spazio (finitamente generabile) hanno tutte la stessa cardinalità. Dimensione di uno spazio vettoriale. Caratterizzazioni della dimensione. Completamento di un sistema indipendente ad una base. Base naturale (o canonica) di K^n. Caratterizzazioni delle basi.	[O1, cap. I, par. 3, a partire da "siano assegnati h vettori" (pag. 15)]: sono facoltativi la proposizione 3.6 (già vista in [Z]) e l'esempio IV (sostanzialmente ripresentato in altre parti del corso). L'enunciato (senza dimostrazione) del teorema dello scambio può essere studiato, facoltativamente, da [Z, cap. 5, par. 2, teorema 2.3].
Dipendenza lineare su vettori geometrici (liberi).	[Z, cap. 4, par. 5].
Richiami e altre semplici proposizioni sui sottospazi. Formula di Grassmann. Sottospazi supplementari. Costruzione di sottospazi supplementari a partire da una base e (viceversa) costruzione di una base a partire da quelle di sottospazi supplementari. Costruzione del supplementare di un sottospazio.	[O1, cap. I, par. 5]; alcuni fatti elementari già visti in [Z] sono ripresentati in forma leggermente diversa, anche se sostanzialmente equivalente (qui, e in casi simili più avanti, se non si vogliono tenere presenti entrambe le impostazioni se ne può scegliere una a piacere).

Applicazioni lineari

Definizione. Esempi. Nomenclatura: isomorfismi, endomorfismi, automorfismi.	[O1, cap. I, par. 4 fino al primo rigo di pag. 24], [Z, cap. 6, par. 1, definizioni 1.1 e 1.4]
Isomorfismo di coordinazione. Teorema fondamentale sulle applicazioni lineari. Proposizioni elementari su applicazioni lineari e dipendenza lineare. Definizione di nucleo e immagine. Nucleo e immagine sono sottospazi; loro relazione con suriettività ed iniettività. Un'applicazione lineare manda sistemi di generatori del dominio in sistemi di generatori del sottospazio immagine. Teorema della dimensione (sulla somma delle dimensioni di nucleo e immagine). Isomorfismi e dimensione; altre proprietà elementari degli isomorfismi.	[O1, cap. I, par. 4, continuare fino alla fine].

Matrici

Rango per righe e rango per colonne, loro coincidenza, senza dimostrazione, e conseguente definizione di rango.	[O1, cap. II, par. 4, fino all'enunciato della proposizione 4.1 (pag. 51)], i termini *rango per righe* e *rango per colonne* si riferiscono (ovviamente) al numero massimo, rispettivamente, di righe indipendenti e di colonne indipendenti.
Operazioni elementari sulle righe di una matrice. Pivot. Matrici a gradini (o a scala). Equivalenza per righe tra matrici. Riduzione di Gauss, e sue applicazioni.	[Z, cap. 8, par. 4 dall'inizio fino alla proprietà 2) (inclusa) a pag. 121, e da "Chiamiamo *pivot*" fino alla fine del paragrafo], [Z, cap. 8, par. 8, soluzione 1] (senza riferimenti alle matrici elementari), [Z, cap. 8, par. 5, escluso il punto 3)]. Non si useranno notazioni H_{ij} e simili, ma $\mathbf{a}_i \to \mathbf{a}_i + r\mathbf{a}_j$ e simili. Due matrici si dicono *equivalenti (per righe)* se si possono ottenere l'una dall'altra con operazioni elementari.
Determinante di una matrice quadrata. Proprietà elementari del determinante. Determinante delle matrici triangolari e diagonali. Prima e seconda regola di Laplace. Inversa di una matrice. Teorema di Binet ($\det(AB) = \det A \det B$), senza dimostrazione. Una matrice quadrata ammette inversa se e solo se ha determinante non nullo.	[O1, cap. II, par. 2, 3]; è facoltativa la ripetizione delle due definizioni all'inizio del paragrafo 3 (prodotto di matrici e matrice identica, già viste in [Z]). Le due regole di Laplace sono la formula usata per definire il determinante, e la formula analoga (con i complementi algebrici presi rispetto ad una linea differente) che dà sempre zero.
Sottomatrici, minori ed orlati. Teorema degli orlati, senza dimostrazione.	[O1, cap. II, par. 4, da "Illustreremo ora ..." (metà pag. 53) fino all'enunciato del teorema degli orlati (inizio pag. 55)]
Le righe (o le colonne) di una matrice quadrata sono linearmente indipendenti (se e) solo se il determinante è non nullo.	[O1, cap. II, par. 4, dal terzo rigo di pag. 57 fino alla fine].

Sistemi di equazioni lineari

Definizione di sistema di equazioni lineari e nomenclatura di base al riguardo. Sistema in forma vettoriale (cioè, esteso per colonna). Teorema di Rouché-Capelli.	[O1, cap. III, par. 1, fino ai primi 10 righi di pag. 63]
Risoluzione con il metodo di Gauss.	[Z, cap. 8, par. 5, punto 3)], [Z, cap. 8, par. 8, soluzione 7].
Sistema in forma matriciale. Regola di Cramer. Risoluzione con il metodo alternativo (usando i teoremi di Rouché-Capelli, degli orlati e di Cramer).	[O1, cap. III, par. 1, continuare (da pag. 63) fino alla fine del paragrafo].
Sistemi lineari omogenei. Proprietà elementari dei sistemi (lineari) omogenei; soluzione banale. L'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo è un sottospazio. Determinazione della dimensione e di una base per lo spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo. Sistema omogeneo associato ad un sistema lineare. Relazione tra l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare e lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo ad esso associato. Metodo rapido per la soluzione dei sistemi omogenei (minori a segno alterno).	[O1, cap. III, par. 2], per studiare la parte finale (sul metodo rapido con i minori a segno alterno), si può in un primo momento assumere $n = 3$ (come fatto a lezione, per aiutare la comprensione), ma è comunque richiesta la conoscenza e la dimostrazione del caso generale (n qualunque).

Prodotti scalari

Definizione di forma bilineare e di forma bilineare simmetrica. Caratterizzazione delle forme bilineari (nel caso finito dimensionale e simmetrico) in termini di coordinate rispetto ad una base. Matrice simmetrica associata ad una forma bilineare simmetrica. Definizione di prodotto scalare (forma bilineare definita positiva). Prodotto scalare ordinario (o standard) in $\mathbf{R}^n$. Esempio di prodotto scalare in $\mathbf{R}^2$ diverso da quello standard. Prodotto scalare di vettori geometrici, direttamente con la definizione "geometrica", senza la dimostrazione che è effettivamente un prodotto scalare. Definizione di spazio vettoriale euclideo. Modulo (norma) di un vettore. Versori. Disuguaglianze di Cauchy-Schwarz e triangolare. Angolo tra vettori.	[Z, cap. 12, par. 1,2; l'enunciato della proposizione 2.9 è preso come definizione del prodotto scalare tra vettori geometrici, e quindi la dimostrazione della proposizione non va fatta. Non è richiesta la verifica che in tal modo si ottiene effettivamente un prodotto scalare. La proprietà usata nella definizione 2.7 diventa una conseguenza della proposizione 3.6 del paragrafo successivo; è anche escluso l'esempio 2.11].
Ortogonalità in uno spazio vettoriale euclideo. L'ortogonalità di vettori non nulli implica l'indipendenza. Definizione di sistemi (in particolare, basi) ortogonali ed ortonormali. L'espressione di un prodotto scalare in coordinate rispetto ad una base ortonormale coincide con quella del prodotto scalare standard (vale anche, in particolare, per il prodotto scalare geometrico). Coefficienti di Fourier. Esistenza e costruzione di una base ortonormale tramite il procedimento di Gram-Schmidt. Definizione di complemento ortogonale. Il complemento ortogonale è un sottospazio. Un sottospazio di dimensione finita ed il suo complemento ortogonale sono supplementari. Proiezioni ortogonali. Caratterizzazione del vettori del complemento ortogonale di uno spazio di dimensione finita tramite un numero finito di condizioni.	[Z, cap. 12, par. 3].

Diagonalizzazione

Applicazione $f_A : K^n \to K^m$ determinata da una matrice $A \in M_{m,n}(K)$. Matrice $A_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ associata ad un'applicazione lineare f rispetto a due basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Caso particolare: matrice $A_f(\mathcal{B})$ associata ad un endomorfismo f rispetto ad una (sola) base $\mathcal{B}$. Formule del cambiamento di coordinate da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, anche come caso particolare di matrice associata. Proprietà fondamentale della matrice A_f (tramite le coordinazioni, f corrisponde alla moltiplicazione per A_f).	[O1, cap. V, par. 2 da pag. 102 fino alla fine della dimostrazione della proposizione 2.1 (inizio di pag. 107)], ma va tutto esteso (in maniera ovvia, come fatto a lezione) al caso di omomorfismi tra spazi (in generale) diversi, e di conseguenza a coppie di basi (in generale) diverse e a matrici non (necessariamente) quadrate; si usa poi la notazione $f_A : K^n \to K^m$ (in [O1] quest'applicazione viene denotata ancora con A). La semplice osservazione che il cambio di coordinate è un caso particolare di matrice associata (si prende $f =$ applicazione identica) è stata fatta a lezione: una descrizione diretta si troverà più avanti, all'interno della dimostrazione della proposizione 2.2.
Gruppo lineare. Matrici simili. Autovettori ed autovalori di un endomorfismo. Autospazi. Molteplicità geometrica di un autovalore. Introduzione al problema della diagonalizzazione di un endomorfismo. Effetto del cambiamento di base sulla matrice associata ad un endomorfismo. Condizione affinché la matrice associata ad un endomorfismo sia diagonale. Caratterizzazione della diagonalizzabilità tramite l'esistenza di una base di autovettori. Polinomio caratteristico. Gli autovalori sono tutti e soli gli scalari che annullano il polinomio caratteristico. Molteplicità algebrica di un autovalore. Invarianza del polinomio caratteristico. Relazione tra molteplicità algebrica e geometrica. Autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono indipendenti. Proprietà di "indipendenza" degli autospazi. Condizione sufficiente per la diagonalizzabilità (n autovalori distinti). Caratterizzazione della diagonalizzabilità tramite le molteplicità degli autovalori. Esempi.	[O1, cap. V, par. 2, parte rimanente, cioè dall'inizio del paragrafo fino a pag. 102 e dalla fine della dimostrazione della proposizione 2.1 (all'inizio di pag. 107) fino alla fine del paragrafo].
Matrici ortogonali e loro proprietà fondamentali. Gruppo ortogonale. Endomorfismi simmetrici e relazione con le matrici simmetriche. Le radici del polinomio caratteristico di un endomorfismo simmetrico sono tutte reali. Un'endomorfismo ammette una base ortonormale di autovettori se e solo se è simmetrico. Autovettori di un endomorfismo simmetrico relativi ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali.	[O1, cap. VI, par. 1, 2].

Fondamenti di geometria analitica

Varietà lineari, rette e piani. Equazioni parametriche e cartesiane. Parallelismo. Formulario essenziale di geometria piana e dello spazio.	[Z, cap. 11, par. da 1 a 6 (inclusi)]; tenere presente che i parametri direttori vengono anche detti *numeri direttori*.
Passaggio da equazioni parametriche a cartesiane e viceversa.	Argomento breve e semplice, visto a lezione. Per il passaggio da parametriche a cartesiane (eliminazione del parametro) si possono trovare degli esempi nel corso degli svolgimenti degli esercizi 5 e 6 nel file Esercizi6.pdf reperibile sul sito webdocenti di A. De Paris (sezione "materiale didattico" - cartella "GEOMETRIA1_DURANTE"). Il passaggio inverso consiste semplicemente nella risoluzione del sistema rappresentativo.
Discussione della posizione reciproca di due rette nel piano tramite la discussione del relativo sistema. Rappresentazione di fasci di rette in un piano.	[O2, cap. II, par. 2, da "Siano ora .." a metà di pag. 37 fino a pag. 40 (esclusi ultimi 4 righi)].
Numeri direttori di una retta nello spazio dalle sue equazioni cartesiane. Ulteriore dimostrazione della condizione di parallelismo retta-piano. Ortogonalità del vettore (a, b, c) al piano $ax+by+cz+d = 0$. Condizione di ortogonalità retta-piano.	[O2, cap. I, par. 2, da pag. 17 al teorema 2.3 (a metà di pag. 20)].
Fasci e stelle di piani.	[O2, cap. I, par. 3, 4, fino ai primi 6 righi di pag. 25].
Coseni direttori. Distanza. Cambiamenti di riferimento. Proprietà metriche nel piano e nello spazio.	[Z, cap. 13, par. da 1 a 5 (inclusi)].
Definizione generale di piano affine. Fasci di rette. Definizione generale di piano proiettivo. Isomorfismi di piani affini o proiettivi. Ampliamento proiettivo di un piano affine. Coordinate omogenee. Punti immaginari. Piano ordinario (reale) come caso particolare. Affinità. Gruppo strutturale. Proprietà affini in ambito affine e in ambito proiettivo. Definizione ed equazione della circonferenza. Retta tangente alla circonferenza. Punti impropri e immaginari della circonferenza. Punti ciclici. Definizione ed equazione (canonica) dell'ellisse. Fuochi dell'ellisse. Punti impropri e immaginari dell'ellisse. Definizione ed equazione (canonica) dell'iperbole. Fuochi dell'iperbole. Punti impropri e immaginari dell'iperbole. Definizione ed equazione (canonica) della parabola. Fuoco e direttrice della parabola. Punti impropri e immaginari della parabola. La retta impropria è tangente alla parabola. Sezioni di un cono. Equazione omogenea di secondo grado in due variabili. Definizione di conica nel piano proiettivo complesso. Matrice di una conica. Intersezione di una retta con una conica. Coniche degeneri. Punti doppi e punti semplici. Una conica è degenere se e solo se possiede almeno un punto doppio. Coniche semplicemente o doppiamente degeneri. Sistema di equazioni per la determinazione dei punti doppi. Una conica è degenere se e solo se il determinante della sua matrice è nullo. Retta tangente in un punto di una conica non degenere. Ridefinizione di ellisse, iperbole e parabola e relativa condizione sull'A_{33}. Polarità. Un punto appartiene alla sua polare se e solo se appartiene alla conica, e in tal caso la polare coincide con la retta tangente. Teorema di reciprocità. Descrizioni geometriche della polarità. Centro, diametri, asintoti, assi. Equazioni canoniche. Per le coniche (reali) dotate di punti reali, le nozioni di ellisse, iperbole e parabola sono coerenti con quelle originarie.	[O3, tutto].