

**Università di Napoli “Federico II”  
Facoltà di Ingegneria**

**Appunti**  
relativi al corso/modulo\* di  
**Fisica Generale I**  
(6 CFU)  
(Docente: F. Bloisi)

**Introduzione alla Fisica**  
(v.09)

---

\* *Corso di FISICA GENERALE I* (da 6 CFU) oppure *Modulo di FISICA GENERALE I* (da 6 CFU) nell'ambito di un *Corso di FISICA GENERALE* (da 12 CFU).

Titolo: Appunti relativi al corso/modulo di *Fisica Generale I*  
Introduzione alla Fisica

Contenuto: 1. La fisica ed il metodo sperimentale  
2. Un punto nello spazio e nel tempo  
3. Grandezze scalari e grandezze vettoriali

Autore: F. Bloisi

Lingua: italiano

Data: Settembre 2007 (prima versione)

Versione: 09 (ultimo aggiornamento settembre 2009)

Sito Web: [people.na.infn.it/~bloisi](http://people.na.infn.it/~bloisi)

su tale sito può essere reperita la versione più aggiornata di questi appunti:  
[people.na.infn.it/~bloisi/Did/FG1/DNL/FG1Intro.pdf](http://people.na.infn.it/~bloisi/Did/FG1/DNL/FG1Intro.pdf)

Quest'opera è stata rilasciata sotto la licenza Creative Commons

**Attribuzione-Non commerciale-Non opere derivate 2.5 Italia.**



[creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/it/](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/it/)

**Tu sei libero:**



di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera

**Alle seguenti condizioni:**



**Attribuzione.** Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.



**Non commerciale.** Non puoi usare quest'opera per fini commerciali.



**Non opere derivate.** Non puoi alterare o trasformare quest'opera, ne' usarla per crearne un'altra.

- Ogni volta che usi o distribuisi quest'opera, devi farlo secondo i termini di questa licenza, che va comunicata con chiarezza.
- In ogni caso, puoi concordare col titolare dei diritti utilizzi di quest'opera non consentiti da questa licenza.
- Questa licenza lascia impregiudicati i diritti morali.

Le utilizzazioni consentite dalla legge sul diritto d'autore e gli altri diritti non sono in alcun modo limitati da quanto sopra.

Questo è un riassunto in linguaggio accessibile a tutti del Codice Legale (la licenza integrale) reperibile sul sito web

[creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/it/legalcode](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/it/legalcode)

oppure scrivendo a

Creative Commons

171 Second Street, Suite 300

San Francisco, California, 94105, USA.

---

***I. Introduzione alla Fisica.***

---

**I.0 Note introduttive**

**I.1 La fisica ed il metodo sperimentale**

**I.2 Un punto nello spazio e nel tempo**

**I.3 Un punto nello spazio e nel tempo**

**E.0 Come impostare e svolgere un esercizio**

(v.08: non ancora inserito).

---

Note:

Il corso/modulo di *Fisica Generale I*, da 6 CFU (Crediti Formativi Universitari), si svolge al primo semestre del primo anno nell'ambito di un corso di laurea triennale, pertanto è organizzato in modo da ridurre sensibilmente l'uso di *differenziali*, *derivate* ed *integrali*, cercando, quando se ne presenta la necessità, di chiarirne il significato fisico e geometrico. L'uso delle equazioni differenziali è limitato a pochissime situazioni ed in tali casi viene richiesto solo che lo studente sia in grado di verificare la soluzione che viene fornita. L'uso dei *vettori* è inevitabile ed in occasione dello studio del vettore posizione e del vettore spostamento si richiameranno le principali proprietà dei vettori e delle operazioni tra vettori. È inutile sottolineare che lo studente che abbia dimestichezza con tali ausili matematici può trarre vantaggio dal loro uso.

Questi appunti non vogliono, né potrebbero essere sostitutivi né delle lezioni né di un libro di testo. Sono semplicemente dei delle "note" introduttive al corso scritte per essere di ausilio allo studente che abbia poca familiarità con questi concetti, ma anche per fissare le notazioni e le convenzioni adottate nell'ambito del corso.

Gli appunti sono aggiornati ed ampliati di anno in anno per cui si consiglia allo studente di utilizzare la versione più aggiornata che è reperibile, insieme ad altre informazioni relative al corso, sul sito docente dell'Università Federico II

[www.docenti.unina.it/francesco.bloisi](http://www.docenti.unina.it/francesco.bloisi)

o del Dipartimento di Scienze Fisiche

[people.na.infn.it/~bloisi](http://people.na.infn.it/~bloisi)

---

Anche se ho posto una certa cura nel rivedere questi appunti, sarò grato a chiunque mi segnali (bloisi@na.infn.it) eventuali errori o imprecisioni.

Napoli, settembre 2009

Il docente del Corso

**F. Bloisi**

## Note introduttive

Alcuni testi di Fisica Generale assumono che lo studente abbia già un'idea del contesto in cui la Fisica si inserisce nell'ambito della scienza e che pertanto sappia cosa è il metodo sperimentale, che sappia rappresentare correttamente le grandezze numeriche e che conosca il Sistema Internazionale di unità di misura. Ciò può essere vero se lo studente segue anche dei corsi di laboratorio, ma anche nei corsi di laurea in cui tali corsi sono previsti spesso sono tenuti in parallelo o dopo il corso di Fisica Generale I.

Lezione 1 – La fisica ed il metodo sperimentale.

Lo scopo del capitolo/lezione “LA FISICA ED IL METODO SPERIMENTALE: GRANDEZZE FISICHE, LORO MISURA E RAPPRESENTAZIONE NUMERICA E GRAFICA” è quello di fornire allo studente una introduzione alla fisica ed al metodo sperimentale che sarà di aiuto anche nello svolgimento di esercizi e nello studio di altre discipline di carattere tecnico/scientifico.

Molti testi di Fisica Generale danno per scontato che lo studente abbia acquisito, seguendo corsi di analisi/geometria, una sufficiente familiarità con i principali sistemi di coordinate nel piano e nello spazio e con l'uso dei vettori. Tuttavia nella maggior parte dei casi i corsi di analisi e di geometria si tengono in parallelo ai corsi di fisica per cui lo studente si trova a dover utilizzare i sistemi di coordinate ed i vettori prima di averne avuta una definizione rigorosa.

Lezione 2 – Un punto nello spazio e nel tempo.

Lezione 3 – Grandezze scalari e grandezze vettoriali.

Lo scopo di questi appunti (ed in particolare dei capitoli/lezioni “UN PUNTO NELLO SPAZIO E NEL TEMPO: COORDINATE, LEGGE ORARIA, TRAIETTORIA” e “GRANDEZZE SCALARI E GRANDEZZE VETTORIALI: DAL CONCETTO DI SPOSTAMENTO AL CONCETTO DI VETTORE”\*) è quello di fornire, senza alcuna pretesa di rigore formale, le nozioni necessarie a

- descrivere la posizione di un punto materiale nello spazio facendo uso della legge oraria espressa tramite le coordinate o in notazione vettoriale
- essere in grado di trattare correttamente le grandezze fisiche vettoriali (vettore posizione, velocità, accelerazione, ma anche forza, etc.)

Gli studenti meno attenti tendono a trattare gli esercizi di fisica quasi come se fossero degli esercizi di matematica limitandosi ad approfondire lo sviluppo dei calcoli matematici.

Esercitazione 1 – Come impostare e svolgere un esercizio.

Le poche note sul “COME IMPOSTARE E SVOLGERE UN ESERCIZIO”\* vogliono, infine, dare allo studente un'idea di come affrontare un

---

\* Nella versione 08 (a.a. 2008/2009) di questi appunti non è stata ancora inserita la Lezione 3 (Grandezze scalari e grandezze vettoriali) e la Esercitazione 1 (Come impostare e svolgere un esercizio). Si può comunque fare riferimento alle copie delle trasparenze presentate a lezione e reperibili sui siti docente già citati.

esercizio dando il giusto peso all'impostazione, allo svolgimento dei calcoli matematici ed allo svolgimento dei calcoli numerici.

Questa “INTRODUZIONE ALLA FISICA” è rivolta essenzialmente a studenti che hanno appena iniziato a seguire il corso di Fisica Generale I (ovvero il modulo di Fisica Generale I nell'ambito di un corso di Fisica Generale), seguendo contemporaneamente i corsi di analisi e/o di geometria, tuttavia costituisce una utile ricapitolazione per studenti che, avendo già seguito il corso/modulo di Fisica Generale I, si accingono a seguire il corso/modulo di Fisica Generale II.

Il contenuto di questa “INTRODUZIONE ALLA FISICA” viene presentato agli studenti, insieme ad una rapida presentazione del corso (informazioni sullo scopo del corso, sull'organizzazione didattica e sulle modalità di svolgimento del corso e degli esami) durante le prime 5 ore (corrispondenti, di solito, ad una settimana di corso) di “lezione frontale” in aula. Copia delle trasparenze utilizzate a lezione possono essere prelevate dai siti docente già citati.

## **La fisica ed il metodo sperimentale: grandezze fisiche, loro misura e rappresentazione numerica e grafica.**

metodo sperimentale  
induzione / deduzione

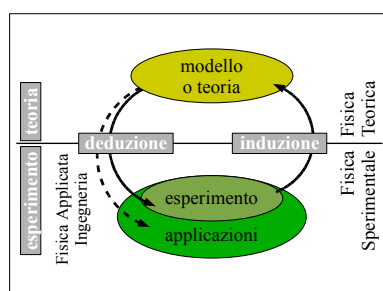


Fig.1.1 – metodo sperimentale

legge fisica  
teoria fisica  
modello matematico  
limiti di validità

meccanica classica  
termodinamica

definizione operativa

unità di misura

Più che gli argomenti affrontati, ciò che caratterizza la Fisica è il metodo utilizzato per affrontarli. Tale metodo, detto metodo scientifico o *metodo sperimentale*, è caratterizzato da un procedimento di induzione/deduzione: da alcuni fatti sperimentali si ricava, per induzione (il processo di *induzione* passa da situazioni particolari a situazioni generali) una *legge fisica* che, successivamente, viene utilizzata per dedurre (la *deduzione* è il processo che passa dal generale al particolare) informazioni su situazioni (esperimenti di verifica o applicazioni) che comprendono una casistica molto più ampia di quella di partenza. La Fig.1.1 illustra schematicamente il processo di induzione/deduzione, essenziale nel metodo sperimentale, sottolineando che partendo da un piccolo numero di situazioni sperimentali opportunamente selezionate si riescono ad ottenere informazioni su un più vasto numero di situazioni applicative.

Nonostante il processo di induzione consenta di estendere l'applicabilità di una *legge fisica* ben oltre le specifiche situazioni sperimentali da cui si è partiti, una *teoria fisica* (ossia un insieme coerente di un piccolo numero di leggi fisiche che, con l'aiuto di alcune definizioni e di deduzioni logico-matematiche, sono in grado di descrivere una gamma abbastanza ampia di fenomeni) o il corrispondente *modello matematico* ha sempre dei *limiti di validità* che devono essere tenuti ben presenti quando li si utilizza. Al di fuori di tali limiti deve essere utilizzata un'altra teoria.

Ad esempio la *meccanica classica* (che, insieme alla *termodinamica*, è oggetto di studio del corso di Fisica Generale I) non è in grado di trattare situazioni in cui le velocità sono confrontabili con la velocità della luce nel vuoto ( $c = 0.300 \cdot 10^9$  m/s pari a  $83.3 \cdot 10^6$  km/h) e dimensioni che sono confrontabili con le dimensioni atomiche (per averne un'idea: il "raggio di Bohr" è  $a_0 = 52.9 \cdot 10^{-12}$  m). Per velocità confrontabili alla velocità della luce occorre utilizzare la teoria della relatività, mentre per dimensioni confrontabili a quelle atomiche occorre utilizzare la meccanica quantistica.

Le leggi e le teorie fisiche sono espresse in termini matematici e per far ciò è necessario che le grandezze fisiche possano essere espresse in forma numerica. Ciò implica che per ogni grandezza fisica deve essere fornita una *definizione operativa* tale, cioè, da fornire un metodo che permetta di effettuarne una misura quantitativa.

La misura di una grandezza fisica è il valore numerico che

esprime il rapporto con una particolare occorrenza, l'*unità di misura*, della grandezza fisica. Pertanto il valore numerico di una grandezza fisica deve essere sempre accompagnato dall'indicazione dell'unità di misura utilizzata. Inoltre, per facilitare lo scambio di informazioni, è opportuno concordare una volta per tutte un piccolo numero di unità di misura che consentano di esprimere tutte le grandezze fisiche.

Per far ciò si definiscono in maniera diretta solo le unità di misura (*unità di misura fondamentali*) di un piccolo numero di grandezze fisiche, mentre le unità di misura delle altre grandezze fisiche (*unità di misura derivate*) si ottengono da combinazioni di quelle fondamentali utilizzando formule ricavate da regole geometriche o da leggi fisiche.

La decisione di quante e quali unità di misura considerare fondamentali è arbitraria e viene effettuata in base a considerazioni tecniche, quali la precisione e la riproducibilità ottenibili, nonché tenendo conto di ragioni storiche. Nel *Sistema Internazionale (SI)*, attualmente ampiamente adottato anche per considerazioni di carattere legale, le unità fondamentali sono sette (Tab.1a).

Per comodità sono definite anche due unità di misura accessorie (Tab.1b) per la misura degli angoli piani e degli angoli solidi che sono, in effetti, grandezze adimensionali.

Nel SI la misura  $\vartheta$  di un *angolo piano* (ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette del piano che hanno un estremo in comune) è definita (Fig.1.2) come il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza  $l$  sotteso dall'angolo ed la lunghezza del raggio  $r$  della circonferenza medesima:  $\vartheta = l/r$ . Anche se si tratta di una grandezza *adimensionale*, in quanto ottenuta come il rapporto tra due lunghezze, per comodità si definisce una unità di misura accessoria detta *radiante* (Tab.1b). Poiché l'angolo giro vale  $2\pi$  rad ovvero  $360^\circ$  è facile convertire la misura di un angolo da gradi sessagesimali ( $1^\circ$  è pari ad  $1/90$  di angolo retto) a radianti e viceversa:

$$\begin{aligned} \vartheta_{\text{in radianti}} &= \vartheta_{\text{in gradi}} \pi/180 \\ \vartheta_{\text{in gradi}} &= \vartheta_{\text{in radianti}} 180/\pi \end{aligned}$$

In effetti quando un angolo compare come argomento di una funzione trigonometrica (come in  $\sin(\vartheta)$  oppure  $\tan(\alpha)$ ) è indifferente se l'angolo sia espresso in gradi o radianti (occorre solo tenerlo presente quando si eseguono i calcoli numerici). È invece essenziale misurare un angolo in radianti quando compare come grandezza a sè stante (come in  $v_{\text{media}} = r(\vartheta_2 - \vartheta_1)/(t_2 - t_1)$ ).

Il corrispondente tridimensionale dell'angolo piano è dato dall'*angolo solido* (Fig.1.3): ciascuna delle due parti in cui lo spazio è suddiviso da un fascio di semirette aventi l'origine in

unità di misura fondamentali

Sistema Internazionale (SI)

unità di misura accessorie

angolo piano

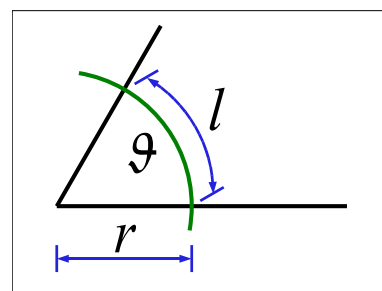


Fig.1.2 – angolo piano

radianti / gradi sessagesimali

angolo solido

steradiani

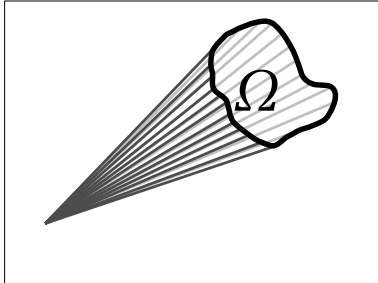


Fig.1.3 – angolo solido

unità di misura derivate  
dimensioni

unità non-SI ammesse

verifica dimensionale  
grandezze omogenee  
grandezze adimensionali

notazione esponenziale

comune.

Utilizzando un procedimento analogo a quello seguito per effettuare la misura dell'angolo piano (in radianti), la misura  $\Omega$  di un angolo solido nel SI è definita come il rapporto tra l'area  $a$  della calotta sferica sottesa dall'angolo solido ed il raggio al quadrato  $r^2$  della circonferenza considerata:  $\Omega = a/r^2$ . Anche in questo caso sebbene si tratti di una grandezza *adimensionale*, in quanto ottenuta come il rapporto tra un'area ed il quadrato di una lunghezza, si definisce una unità di misura accessoria detta *steradiane* (Tab.1b). Si osservi che il corrispondente tridimensionale dell'angolo giro (che comprende tutto il piano e vale  $2\pi r/r = 2\pi$  rad) è l'angolo solido totale (che comprende tutto lo spazio) e vale  $4\pi r^2/r^2 = 4\pi$  sr.

Tutte le altre unità di misura (la Tab.1d riporta le unità di misura SI delle principali grandezze fisiche che si incontrano nello studio della meccanica) sono date dal prodotto di due o più unità fondamentali elevate ad esponenti interi, positivi o negativi, dette *dimensioni* della grandezza fisica.

Occorre tener presente che è comunque ammesso l'uso di alcune unità di misura non-SI (in particolare per la misura del tempo e degli angoli) molto diffuse (Tab.1c).

Poiché è possibile sommare, sottrarre o uguagliare solo grandezze fisiche *omogenee*, ossia espresse nella stessa unità di misura, è utile fare sempre una *verifica dimensionale* delle espressioni trovate: le dimensioni di termini sommati, sottratti o ugualiati tra loro devono essere le stesse, inoltre devono essere *adimensionali* gli argomenti delle funzioni trascendenti: gli angoli nelle funzioni trigonometriche (ad esempio  $\vartheta$  in  $\sin(\vartheta)$ ), gli esponenti (ad esempio  $x$  in  $\exp(x) = e^x$ ) nelle potenze, etc. (per rendersene conto è sufficiente esprimere la funzione come serie di potenze). È infine opportuno verificare che il risultato finale abbia le dimensioni della grandezza fisica cercata: se ad esempio si sta calcolando una velocità il risultato finale deve essere espresso come una lunghezza diviso un tempo, ad esempio km/h o m/s o in/min (pollici al minuto) ma non potrà mai essere espressa in kg/s. Una espressione dimensionalmente errata è sicuramente errata mentre, come è ovvio, una espressione dimensionalmente corretta può anche essere errata.

Poiché le stesse unità di misura devono servire per fornire la misura delle grandezze più disparate si verificano sia situazioni in cui l'oggetto da misurare è enormemente più piccolo che situazioni in cui l'oggetto da misurare è enormemente più grande dell'unità di misura adottata (si pensi, ad esempio, alla distanza tra due atomi in un cristallo ed alla distanza tra due stelle in una galassia). È quindi opportuno far ricorso alla *notazione esponenziale* che utilizza le

potenze di 10 (preferibilmente in multipli di  $\pm 3 : 10^{\pm 3}, 10^{\pm 6},$  etc.).

Ancor più comodo è l'uso dei multipli/sottomultipli i cui simboli e relativi significati sono riportati in Tab.1e. Ad esempio:

multipli / sottomultipli

$$\begin{aligned} 0.00000567 \text{ m} &= 5.67 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 5.67 \mu\text{m} \\ 56700000 \text{ m} &= 56.7 \cdot 10^6 \text{ m} = 56.7 \text{ Mm} \end{aligned}$$

Uno *strumento di misura* realizzato correttamente deve fornire una indicazione dell'errore oltre, ovviamente, al valore della misura. In uno strumento di buona qualità, se non vi è altra indicazione, l'errore corrisponde grosso modo a metà della lettura più piccola che lo strumento è in grado di effettuare: un metro flessibile da muratore che riporta le tacche dei millimetri (misura più piccola 1 mm) se ben realizzato ha un errore di misura di  $\pm 0.5 \text{ mm}$ , un righello che riporta le tacche dei mezzi millimetri (misura più piccola 0.5 mm) se ben realizzato ha un errore di misura di  $\pm 0.25 \text{ mm}$ .

strumento di misura  
errore di misura

Quando si fornisce il valore numerico di una grandezza fisica bisogna sempre mettere chi legge in grado di conoscerne la maggiore o minore precisione che dipende sia dal procedimento di calcolo che dagli strumenti di misura utilizzati. Una notazione molto sintetica, utilizzata frequentemente, si ottiene riportando, subito dopo il valore della misura, il valore dell'*errore assoluto*, preceduto dal segno " $\pm$ ". Ad esempio se misuriamo la lunghezza  $D$  della parete di una stanza con un doppio decametro che riporta le tacche dei centimetri, la lunghezza  $L$  di un mobile con un doppio metro da falegname che riporta le tacche dei millimetri e l'altezza  $h$  di un foglio "A4" con un righello che riporta le tacche dei mezzo millimetri possiamo scrivere i risultati come:

errore assoluto

$$\begin{aligned} D &= 3.50 \text{ m} \pm 0.5 \text{ cm} \\ L &= 1.250 \text{ m} \pm 0.5 \text{ mm} \\ h &= 297 \pm 0.25 \text{ mm} \end{aligned}$$

Si deve tener presente che, più importante dell'*errore assoluto* (che nell'esempio precedente vale:  $\Delta D = \pm 0.5 \text{ cm}$  per  $D$ ,  $\Delta L = \pm 0.5 \text{ mm}$  per  $L$  e  $\Delta h = \pm 0.25 \text{ mm}$  per  $h$ ) è l'*errore relativo* dato dal rapporto tra l'errore assoluto ed il valore della misura<sup>1</sup>. Un valore numerico è, infatti, tanto più preciso quanto più piccolo è l'errore relativo. Nell'esempio precedente

errore relativo

$$\begin{aligned} \Delta D/D &= \pm 0.5 \text{ cm} / 3.50 \text{ m} = \pm 0.001 = \pm 0.1 \% \\ \Delta L/L &= \pm 0.5 \text{ mm} / 1.250 \text{ m} = \pm 0.0004 = 0.04 \% \\ \Delta h/h &= \pm 0.25 \text{ mm} / 29.7 \text{ cm} = \pm 0.0008 = 0.08 \% \end{aligned}$$

<sup>1</sup> In effetti, per calcolare l'errore relativo, si dovrebbe fare il rapporto tra l'errore assoluto ed il "valore esatto" ma, poiché di solito quest'ultimo non è noto, si utilizza il valore misurato, anche se, ovviamente, è affetto dall'errore.

per cui  $\Delta L/L < \Delta h/h < \Delta D/D$  anche se  $\Delta h < \Delta L < \Delta D$ .

cifre decimali  
cifre significative

In effetti, quando si riporta la misura di una grandezza fisica non è corretto (in quanto è fuorviante per chi legge) riportare cifre corrispondenti ad una precisione maggiore di quella con cui si è effettuata la misura ed è bene riportare tutte le cifre, inclusi eventuali zeri finali, corrispondenti alla misura effettuata. Se si tiene conto della differenza tra c.d. (*cifre decimali*: tutte le cifre che seguono il punto decimale) e c.s. (*cifre significative*: tutte le cifre riportate, da sinistra verso destra, a partire dalla prima cifra diversa da zero<sup>2</sup>) è evidente che un valore numerico deve essere rappresentato con un numero di c.s. tanto maggiore quanto maggiore è la sua precisione.

Ad esempio, riportando i valori di  $D$  e di  $L$  citati in precedenza, con il numero di cifre significative adeguato alla precisione (facendo, cioè, in modo che l'errore assoluto sia pari a metà dell'ultima cifra significativa), abbiamo

$D=0.00350$ km	3 c.s., 5 c.d.	$L=0.001250$ km	4 c.s., 6 c.d.
$D=3.50$ m	3 c.s., 2 c.d.	$L=1.250$ m	4 c.s., 3 c.d.
$D=350$ cm	3 c.s., 0 c.d.	$L=125.0$ cm	4 c.s., 0 c.d.
		$L=1250$ mm	4 c.s., 0 c.d.

Si noti<sup>3</sup> che sarebbe scorretto scrivere  $D=3500$  mm in quanto tale numero ha 4 c.s. lasciando quindi intendere che l'errore assoluto sia  $\Delta D=\pm 0.5$  mm invece di  $\Delta D=\pm 0.5$  cm.

propagazione degli errori

Nel caso in cui la grandezza fisica non sia stata misurata direttamente, ma sia il risultato di un calcolo l'errore sul risultato dipende dall'errore sui dati di partenza e dalle operazioni effettuate. Di ciò si occupa la teoria della *propagazione degli errori*.

regole pratiche per la  
propagazione degli errori

Nell'ambito dei corsi di *Fisica Generale I* e *Fisica Generale II* ci limiteremo, tuttavia, ad applicare alcune semplici regole, abbastanza intuitive, senza ulteriori approfondimenti:

- quando si sommano (o si sottraggono) due o più grandezze fisiche (che, come si è detto, devono essere tra loro omogenee) il risultato deve essere riportato con un numero di c.d. pari a

2 Si presti attenzione al fatto che alcuni autori adottano una definizione leggermente diversa in quanto non contano tra le c.s. gli eventuali zeri finali in un numero privo di decimali. Secondo tale definizione 350 ha 2 c.s., mentre secondo la definizione data qui ha 3 c.s.

3 In effetti è bene evitare anche la scrittura  $D=350$  cm in quanto, come si è detto nella nota precedente, potrebbe essere interpretato come un numero con 2 c.s., indicando quindi un errore assoluto  $\Delta D=\pm 5$  cm invece di  $\Delta D=\pm 0.5$  cm

Si noti che, utilizzando opportunamente i multipli/sottomultipli o, equivalentemente, la notazione esponenziale è sempre possibile fare in modo che un numero abbia una o nessuna cifra intera ed una o più cifre decimali: ad esempio  $D=3.50 \cdot 10^2$  oppure  $D=0.350 \cdot 10^3$ .

quelle dell'addendo che ne ha di meno;

$$(3.50 \text{ m})+(29.7 \text{ cm})=3.80 \text{ m e non } 3.797 \text{ m}$$

- quando si moltiplicano (o si dividono) tra loro due o più grandezze fisiche (in questo caso non è necessario che siano omogenee) il risultato deve essere riportato con un numero di c.s. pari a quelle del fattore che ne ha di meno;

$$(1.250 \text{ m}) (29.7 \text{ cm})=0.371 \text{ m}^2 \text{ e non } 0.37125 \text{ m}^2$$

- nel caso di funzioni trigonometriche, esponenziali, etc. il risultato della funzione deve essere riportato con un numero di c.s. pari a quelle dell'argomento.

$$\cos(30.0^\circ)=0.866 \text{ e non } 0,86602540378\dots$$

Una regola pratica ancor più semplice è quella di

- eseguire i calcoli intermedi con una o due c.s. in più di quelle che sono richieste per il risultato finale;
- riportare il risultato finale con un numero di c.s. pari a quelle del dato che ne ha di meno.

Ci si trova quindi spesso nella necessità di "troncare" ad un determinato numero di cifre il risultato di un calcolo numerico. È bene ricordare che qualora la prima cifra "troncata" sia compresa tra 5 e 9 si deve aumentare di 1 l'ultima cifra riportata. Ad esempio, il valore del rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e quella del suo diametro con 15 c.d. vale

$$\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\dots$$

e volendolo riportare con un diverso numero di c.s. si ha

$$3.1415926535898 \text{ (14 c.s.)}, \quad 3.141592653590 \text{ (13 c.s.)}, \\ 3.14159 \text{ (6 c.s.)}, \quad 3.1416 \text{ (5 c.s.)}, \quad 3.142 \text{ (4 c.s.)}, \quad 3.14 \text{ (3 c.s.)}$$

In particolare si parla di *ordine di grandezza* quando si fornisce il valore di una grandezza fisica con una sola o addirittura con zero cifre significative. Ad esempio l'ordine di grandezza di  $\pi$  è 3 (valore con 1 c.s.) oppure  $10^0$  (valore con 0 c.s.); l'ordine di grandezza della durata di un anno in secondi è 1 anno  $\approx 3 \cdot 10^7$  s oppure 1 anno  $\approx 10^7$  s: infatti dato che un anno medio ha la durata di circa 365 giorni (per l'esattezza 1 anno = 365.2425 d, ma per il calcolo dell'ordine di grandezza si può assumere 1 anno  $\approx 365$  d)

$$1 \text{ anno} \approx 365 \text{ d} = (365 \text{ d}) (24 \text{ h/d}) = 8832 \text{ h} = \\ = \dots = 31536000 \text{ s} = 3.1536000 \cdot 10^7 \text{ s} \text{ (valore con 8 c.s.)}$$

Fin qui abbiamo discusso della rappresentazione numerica del valore di una grandezza fisica, ma in molti casi risulta utile essere in grado di darne una rappresentazione "grafica" su di un *asse orientato graduato* (Fig.1.4). Si noti che per consentire una corretta interpretazione dei dati è indispensabile che sull'asse siano sempre

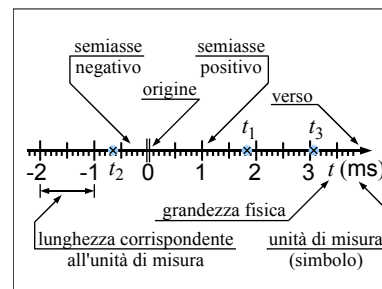


Fig.1.4 – asse orientato graduato

arrotondamento

ordine di grandezza

asse orientato graduato

riportate l'indicazione del *verso* positivo e della *grandezza fisica* con la sua *unità di misura*. Esaminando la Fig.1.4 si ricavano i valori  $t_1=1.85\text{ ms}$ ,  $t_2=-0.65\text{ ms}$ ,  $t_3=3.05\text{ ms}$  con un errore assoluto che possiamo assumere pari a metà della lettura più piccola, . In effetti i valori utilizzati per realizzare il grafico sono  $t_1=1.83\text{ ms}$ ,  $t_2=-0.64\text{ ms}$  e  $t_3=3.07\text{ ms}$  con un errore assoluto  $\Delta t=\pm 0.005\text{ ms}$ . Come si vede, anche se il grafico è realizzato con cura è possibile che si perda in precisione rispetto alla rappresentazione numerica, tuttavia in molti casi è utile anche una semplice rappresentazione grafica qualitativa.

### grafico di una funzione

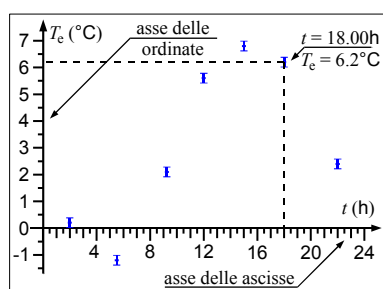


Fig.1.5 –  $T_e(t)$

Il *grafico di una funzione* di una variabile  $y=f(x)$  è la rappresentazione grafica che si ottiene utilizzando due assi orientati graduati, disposti in modo da essere ortogonali tra loro, uno (asse delle ascisse, di solito orizzontale) per la variabile indipendente  $x$  e l'altro (asse delle ordinate, di solito verticale) per la grandezza  $y$  determinata dalla funzione  $f$ . La rappresentazione grafica è di grande aiuto nel capire l'andamento della funzione: la Fig.1.5 riporta graficamente gli stessi dati riportati numericamente nella tabella riportata più avanti, tuttavia dal grafico è molto più semplice rendersi conto che la funzione  $T_e(t)$  ha un minimo intorno a  $t \simeq 5\text{ h}$  ed un massimo intorno a  $t \simeq 16\text{ h}$ .

### Dati utilizzati per realizzare la Fig.1.5

$t$ (h:m) $\Delta t = \pm 0.5\text{ min}$	$t$ (h) $\Delta h = \pm 0.01\text{ h}$	$T_e$ (°C) $\Delta T_e = \pm 0.2\text{ °C}$
02:00	2.00	0.2
05:30	5.50	-1.2
09:15	9.25	2.0
12:00	12.00	6.6
15:00	15.00	6.8
18:00	18.00	6.2
22:00	22.00	2.4

### barra di errore

Per evidenziare graficamente l'entità dell'errore assoluto (ciò può essere utile se non corrisponde a metà della graduazione più piccola o se non è lo stesso per tutti i punti) si utilizza una la *barra di errore*: un segmento la cui lunghezza è proporzionale all'errore, disegnata in corrispondenza di ciascun punto riportato nel grafico. Nella Fig.1.5 l'errore sulla temperatura ( $\Delta T_e = \pm 0.2\text{ °C}$ ) è riportato tramite la barra di errore, mentre l'errore sul tempo ( $\Delta t = \pm 0.01\text{ h}$ , corrispondenti a  $\Delta t = \pm 0.5\text{ min}$ ) non è rappresentato in quanto non risulta visibile sul disegno. Si osservi

che sono state utilizzate unità di misura non-SI (ore per il tempo e gradi centigradi per le temperature) allo scopo di rendere maggiormente comprensibili i valori: utilizzando le unità SI (secondi per il tempo, Kelvin per la temperatura) il punto evidenziato ( $t=(18.80\pm 0.01) \text{ h}$ ,  $T_e=6.2\pm 0.2 \text{ }^\circ\text{C}$ ) sarebbe caratterizzato da  $t=(64.80\pm 0.03) 10^3 \text{ s}$  e  $T_e=279.4\pm 0.2 \text{ K}$ .

### **Alcune considerazioni sui “numeri”**

In matematica si definiscono vari “tipi” di numeri aventi come caratteristica comune che nel loro ambito è possibile definire alcune operazioni, fondamentalmente la somma ( $x+y$ ), il prodotto ( $x\cdot y$ ) e l'elevamento a potenza ( $x^y$ ).

L'insieme più semplice è quello dei *numeri naturali*, indicato con il simbolo  $\mathbb{N}$  e costituito, secondo una definizione “informale”<sup>4</sup>, dai valori utilizzati per contare gli oggetti presenti in un contenitore  $\mathbb{N}\equiv\{0,1,2,\dots\}$ . Poiché accade di voler escludere lo zero, si definisce anche l'insieme dei numeri naturali non nulli:  $\mathbb{N}^+\equiv\{1,2,\dots\}$ . Nell'ambito dei numeri naturali sono definite la somma ed il prodotto e, tramite quest'ultimo, l'elevamento a potenza

numeri naturali

$$x^y = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots}_y \text{ volte}$$

tuttavia le operazioni inverse (sottrazione, operazione inversa della somma, e divisione, operazione inversa del prodotto) non sono sempre possibili: ad esempio le operazioni  $3-5$  e  $3/5$  non danno come risultato dei numeri naturali.

Per ovviare a questi inconvenienti si definiscono i *numeri interi* (simbolo  $\mathbb{Z}$ , definizione informale: numeri naturali con segno,  $\mathbb{Z}\equiv\{0,\pm 1,\pm 2,\dots\}$ ) ed i *numeri razionali* (simbolo  $\mathbb{Q}$ , definizione “informale”: numeri rappresentabili come rapporto tra due numeri interi di cui il secondo non nullo,  $\mathbb{Q}\equiv\{\pm m/n, m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}^+\}$ ). In tal caso la definizione di elevamento a potenza deve essere opportunamente estesa

numeri interi  
numeri razionali

$$x^{+m/n} = \sqrt[n]{x^m} ; \quad x^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$$

I numeri razionali sono caratterizzati dal fatto che la loro rappresentazione decimale richiede un numero finito ( $3/5=0.6$ ) o periodico ( $59/14=4.2142857142857\dots=4.2\overline{142857}$ ) di cifre decimali. Esistono tuttavia situazioni in cui tale rappresentazione non è adeguata: per rappresentare  $2^{1/2}=\sqrt{2}=1.41421\dots$  oppure  $\pi=3.14159\dots$  è necessario un numero non finito e non periodico di cifre decimali.

4 Per le definizioni “formali” degli insiemi  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  si rimanda ad adeguati testi di analisi.

## numeri reali

Si definiscono quindi i *numeri reali* (simbolo  $\mathbb{R}$ , definizione “informale”: numeri la cui rappresentazione decimale può richiedere un numero infinito di cifre). In tal caso la definizione di elevamento a potenza deve essere ulteriormente estesa, utilizzando i logaritmi/esponenziali:

$$x^y = e^{y \ln x} = \exp(y \ln x)$$

È opportuno tener presente che, sebbene le grandezze fisiche corrispondano molto spesso a numeri reali, il risultato di una misura o di un calcolo numerico può avere solo un numero finito di cifre decimali ed è quindi sempre rappresentato con un numero razionale.

## numeri complessi

Anche avendo definito i numeri reali vi sono alcune operazioni “vietate” come ad esempio  $\sqrt{-2}$ . Per ovviare a tale inconveniente si introducono i *numeri complessi* (simbolo  $\mathbb{C}$ , definizione “informale”: numeri la cui rappresentazione  $z = a + ib$  è data da una *parte reale*  $a = \Re(z)$  dall'*unità immaginaria*  $i = \sqrt{-1}$  e dal *coefficiente dell'immaginario*  $b = \Im(z)$ ).

Differenza importante tra i numeri complessi e gli altri numeri (naturali, interi, razionali, reali) è che in  $\mathbb{C}$  non è definita una relazione d'ordine: tra due numeri naturali, interi, razionali o reali differenti ( $x \neq y$ ) è sempre valida una delle due relazioni ( $x < y$ ) oppure ( $x > y$ ), mentre tra due numeri complessi non è possibile dire quale sia maggiore e quale minore. Conseguenza di ciò è che i numeri naturali, interi, razionali e reali sono rappresentabili su di una retta (i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti della retta, gli altri insiemi corrispondono ad opportuni sottoinsiemi dei punti della retta) mentre i numeri complessi devono essere rappresentati e sono in corrispondenza biunivoca con i punti di un piano.

Nell'ambito del corso/modulo di Fisica Generale I non faremo uso dei numeri complessi che torneranno utili per rappresentare alcune grandezze che tratteremo nell'ambito del corso/modulo di Fisica Generale II.

## La fisica ed il metodo sperimentale

- In fisica è essenziale il *metodo sperimentale* che prevede un processo di induzione (esperimento→teoria) / deduzione (teoria→applicazioni).
- Una legge/teoria fisica viene applicata tramite un modello matematico.
- Il modello matematico richiede che le grandezze fisiche siano espresse tramite valori numerici.
- È quindi necessario dare di ogni *grandezza fisica* una *definizione operativa* ed una *unità di misura*.
- Si adotta il SI (Sistema Internazionale) che prevede poche (in meccanica: *lunghezza* [L] in m, *massa* [M] in kg e tempo [T] in s) *unità fondamentali*, due *unità accessorie* per gli angoli (*radiante*, rad e *steradiano*, sr) e varie unità derivate.
- In matematica si definiscono i *numeri naturali* ( $\mathbb{N}$ ), i *numeri interi* ( $\mathbb{Z}$ ), i *numeri razionali* ( $\mathbb{Q}$ ), i *numeri reali* ( $\mathbb{R}$ ) ed i *numeri complessi* ( $\mathbb{C}$ ) e le grandezze fisiche solitamente corrispondono a numeri reali, tuttavia il risultato di una misura o di un calcolo è un numero (razionale) avente un numero finito di cifre decimali (c.d.) e deve essere rappresentato con un numero di cifre significative (c.s.) adeguato alla precisione.
- La precisione con cui una grandezza fisica è misurata o calcolata si valuta tramite l'*errore assoluto* o, ancor meglio, tramite l'*errore relativo*, collegato alle c.s. presenti.
- Senza approfondire la *propagazione dell'errore* ci si può limitare a considerare che il risultato di un calcolo deve essere espresso con tante c.s. quante sono quelle del dato di precisione inferiore.
- Nell'ambito dei calcoli viene in aiuto l'*analisi dimensionale*.

## **Un punto nello spazio e nel tempo: coordinate, legge oraria, traiettoria.**

Nell'ambito del metodo scientifico, si è detto, è essenziale definire in maniera operativa ed essere quindi in grado di misurare qualunque grandezze fisica si voglia prendere in considerazione.

Ciò comporta che è difficile, se non impossibile, trattare situazioni che nella realtà fisica non sono “difficili”, ma nella cui descrizione e studio sono coinvolte molte grandezze fisiche (ad esempio il moto di un pallone da calcio colpito da un calciatore) se prima non sono state prese in considerazione situazioni più semplici in cui si possano esaminare uno alla volta i vari fenomeni che intervengono nella situazione complessa (nell'esempio considerato sarà opportuno considerare separatamente l'urto tra la scarpa del calciatore ed il pallone, gli effetti dell'elasticità del pallone, il moto traslatorio del centro del pallone, il moto di rotazione del pallone attorno ad un suo asse, l'attrito della superficie del pallone con l'aria, etc.).

### cinematica

È inoltre sufficiente prendere in mano o soltanto osservare qualunque oggetto reale per rendersi immediatamente conto che esso possiede innumerevoli “caratteristiche” (la forma, il peso, il colore, la “consistenza” del materiale di cui è fatto, la “rugosità” della sua superficie, la temperatura, etc.). Tuttavia non sempre è facile definire tali caratteristiche in modo adatto ad essere considerate delle grandezze fisiche (si pensi ad esempio al “colore” di un oggetto). Pertanto, al momento (nell'ambito della *Cinematica* che studia il moto di oggetti indipendentemente dalle cause che lo determinano) non prenderemo in considerazione nessuna delle “caratteristiche” degli oggetti che studieremo. Ciò ci permette, tra l'altro, di utilizzare soltanto due delle grandezze fisiche corrispondenti alle unità di misura fondamentali: la “lunghezza” (unità SI: metro, m) ed il “tempo” (unità SI: secondo, s), solo più in là (nell'ambito della *Dinamica*) definiremo ed utilizzeremo anche la “massa”.

La situazione più semplice con cui conviene iniziare lo studio della fisica è dunque la descrizione del moto di un oggetto che possa essere schematizzato come un punto geometrico. Ciò non significa, tuttavia, che ignoriamo le altre caratteristiche, ma che consideriamo solo situazioni in cui le altre caratteristiche non sono importanti.

Per procedere nello studio dobbiamo quindi avere gli strumenti necessari a descrivere la posizione nello spazio e nel tempo di un punto geometrico. Nel seguito vedremo come ciò ci tornerà utile tanto nel descrivere il moto di un oggetto materiale assimilabile ad un punto geometrico (quello che chiameremo “punto materiale”), ma anche nel descrivere il moto di un particolare punto (quello che

chiameremo il “centro di massa”) di un oggetto materiale esteso e non assimilabile ad un singolo punto geometrico.

Sebbene possa sembrare inutile, in quanto ovvio, è necessario fare l'ipotesi che lo spazio fisico possa essere descritto correttamente tramite la geometria euclidea. Per inciso è opportuno ricordare che essa si basa su 5 postulati<sup>5</sup> e che modificando il 5° postulato (il quale in effetti impone che per un punto esterno ad una retta assegnata passi una ed una sola retta parallela a quella assegnata) si ottengono le cosiddette geometrie non-euclidee (la geometria ellittica o di Riemann e la geometria iperbolica o di Bolyai-Lobacevskij) che trovano applicazione nell'ambito della teoria della relatività.

Spazio fisico e geometria euclidea

Per quel che riguarda il tempo facciamo l'ipotesi che esista un tempo assoluto, ossia che se costruiamo due orologi e li sincronizziamo (facciamo cioè in modo che segnino lo stesso valore del tempo) in un certo istante ed in un certo punto dello spazio, essi restano sincronizzati in qualunque altro istante ed in qualunque altro punto dello spazio. Ciò significa che è possibile definire un tempo che è indipendente dall'osservatore: se due “eventi” sono simultanei per un osservatore lo sono per qualunque altro osservatore. Anche questa ipotesi, che può sembrare del tutto ovvia, dovrà essere abbandonata nell'ambito della relatività.

Quanto detto sopra si esprime in maniera sintetica affermando che, nell'ambito della meccanica classica (o meccanica newtoniana) si assume che lo spazio (descrivibile tramite la geometria euclidea) ed il tempo siano “assoluti”, ossia indipendenti dall'osservatore e dalla presenza di oggetti fisici. Assumiamo pertanto che due osservatori, anche se in posizioni differenti ed in moto relativo l'uno rispetto all'altro, una volta definite le unità di misura della lunghezza e del tempo, sono in grado di misurare la distanza tra due oggetti o l'intervallo di tempo tra due eventi ottenendo il medesimo risultato. L'ipotesi dell'esistenza di uno *spazio-tempo assoluto*, valida nella meccanica classica, dovrà essere ridiscussa, come si è accennato, nell'ambito della meccanica relativistica, ma ciò esula dallo scopo del presente corso. Limitandoci ad utilizzare solo la “lunghezza”, di un oggetto materiale possiamo prendere in considerazione la posizione rispetto ad altri oggetti, la sua forma e le sue dimensioni; tuttavia, per semplificare ulteriormente le situazioni che studieremo, consideriamo, per ora, oggetti di cui

spazio-tempo assoluto

---

5 I postulati di Euclide sono:

1. Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
2. Una retta può essere prolungata indefinitamente.
3. Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali.
5. Se una retta che interseca altre due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, allora prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.

possiamo descrivere il comportamento prendendo in considerazione solo la “posizione”.

punto materiale

Possiamo quindi dire che è schematizzabile come un *punto materiale* qualunque oggetto fisico tale che:

- le sue dimensioni lineari sono piccole rispetto alla precisione con cui interessa conoscerne la posizione ed alle altre lunghezze presenti
- è possibile trascurarne le rotazioni

Se vogliamo studiare il moto della Terra intorno al Sole e non siamo interessati a ricavare informazioni relative alla rotazione di tali corpi celesti intorno ai rispettivi assi possiamo descrivere gli oggetti fisici “Sole” e “Terra” utilizzando il concetto di punto materiale. Non possiamo tuttavia affermare che il Sole e la Terra sono dei punti materiali: se vogliamo studiare il comportamento delle maree la Terra non può essere schematizzata con un punto materiale.

È opportuno sottolineare che la scelta della schematizzazione non è insita nella realtà fisica ma è compito di chi applica una legge/teoria fisica (ad esempio lo studente che sta svolgendo un esercizio) e non deve essere sottovalutata, in quanto è un punto molto importante e delicato: nello schematizzare un'automobile come un punto materiale si trascura la presenza di parti in rotazione (le ruote) per cui il risultato che si ottiene è valido solo se gli effetti delle parti in rotazione sono trascurabili. La medesima schematizzazione fatta per lo studio del moto di una bicicletta porta a risultati meno accurati: in una bicicletta gli effetti del momento di inerzia delle ruote sono fondamentali. Altri esempi di situazioni molto semplici che tuttavia non possono essere trattate con la schematizzazione di punto materiale sono una biglia fatta rotolare sul pavimento (la rotazione non può essere trascurata in quanto l'energia cinetica di rotazione costituisce oltre il 25% dell'energia cinetica posseduta dalla biglia) o la caduta di un sasso in una piscina piena di acqua (l'attrito viscoso, tra il sasso e l'acqua, dipende in misura notevole dalla forma del sasso).

punto geometrico  
coordinate  
sistema di riferimento  
sistema di coordinate  
Gradi di Libertà

Nel caso in cui possiamo schematizzare un oggetto fisico per mezzo di un *punto materiale* l'ente matematico adatto a descriverlo è un *punto geometrico*, la cui *posizione* è individuata dalle *coordinate* in un opportuno *sistema di riferimento*<sup>6</sup>. Le coordinate sono costituite da uno o più numeri reali che, una volta fissato un particolare sistema di riferimento, individuano in modo univoco la posizione di un punto geometrico. Quante e quali coordinate dipendono dalla scelta del sistema di coordinate (cartesiane

<sup>6</sup> Nel seguito useremo il termine *sistema di coordinate* per indicarne il tipo (cartesiane 2D, polari, cartesiane 3D, cilindriche, sferiche) mentre useremo il termine *sistema di riferimento* per indicare l'insieme di un particolare sistema di coordinate ed un orologio (posto nell'origine) per misurare il tempo.

ortogonali, polari, etc.), mentre dalla situazione fisica dipende il numero di *Gradi di Libertà* (che nel seguito abbrevieremo con GdL). Il numero di GdL è il numero di grandezze scalari<sup>7</sup> tra loro indipendenti che è necessario specificare per individuare completamente la posizione di un punto materiale. Più avanti estenderemo il concetto di GdL a sistemi caratterizzati non solo dalla posizione ma, più in generale, dallo stato (posizione, orientamento, stato interno, etc.). Alcuni esempi possono chiarire il concetto.

- Consideriamo un vagone su di un tratto di linea ferroviaria non necessariamente rettilinea ma priva di scambi. La posizione del vagone può essere individuata da una sola grandezza scalare (ad esempio la lunghezza del binario tra l'inizio del tratto considerato ed il punto in cui si trova il vagone). Un vagone su di un binario ha dunque 1 GdL.
- Consideriamo una nave sulla superficie del mare: la sua posizione è individuata da due grandezze scalari (ad esempio la latitudine e la longitudine). La posizione di una nave sulla superficie del mare ha dunque 2 GdL. Se, tuttavia, della nave vogliamo precisare anche l'orientamento, ma in tal caso non possiamo schematizzarla come un punto materiale, sarà necessario fornire anche l'angolo che specifica la rotta. In sintesi possiamo affermare che una nave sulla superficie del mare ha 2 GdL se possiamo schematizzarla come un punto materiale, mentre ha 3 GdL se la schematizziamo come un segmento orientato<sup>8</sup>.
- Consideriamo un aereo in volo: se possiamo schematizzarlo come un punto materiale ha 3 GdL (per individuarne la posizione occorre fornire, ad esempio, latitudine, longitudine e quota) mentre ha 5 GdL se vogliamo fornirne anche l'orientamento (schematizziamo l'aereo con un segmento orientato dalla "coda" verso il "muso" e dobbiamo fornire anche l'angolo di virata che individua la rotta e l'angolo di impennata che individua l'inclinazione) ed ha 6 GdL se si vuole precisare anche l'angolo di cabrata (che misura quanto un segmento che collega le estremità delle ali si discosta dalla posizione orizzontale)<sup>9</sup>.

Il numero di GdL individua quante grandezze scalari è necessario fornire per individuare, nella schematizzazione fatta, lo

---

7 È necessario precisare "grandezze scalari" per distinguerle dalle "grandezze vettoriali" di cui si parlerà nella lezione seguente.

8 Torneremo più avanti sul concetto di segmento orientato, qui possiamo intenderlo come un segmento che ha la "coda" a poppa e la "punta" a prua della nave.

9 In genere un sistema rigido (ossia un oggetto indeformabile) non soggetto ad alcun vincolo ha 6 GdL, mentre i GdL diminuiscono se sono presenti vincoli: la nave è vincolata a rimanere sulla superficie del mare, il vagone ferroviario è vincolato a rimanere sui binari. Invece un punto materiale non soggetto ad alcun vincolo ha 3 GdL che possono diminuire per la presenza di vincoli.

stato dell'oggetto considerato, ma, ovviamente, è possibile utilizzarne anche un numero maggiore: il vagone sui binari ha 1 GdL ma è certamente possibile individuarne la posizione fornendo latitudine e longitudine. In effetti il numero di coordinate dipende dal sistema di coordinate scelto ma si semplifica la descrizione del problema se si riesce a fare in modo che il numero di coordinate coincida con il numero di GdL. È quindi opportuno conoscere ed essere in grado di utilizzare diversi sistemi di coordinate tra cui scegliere quello più opportuno in ciascuna situazione. Nel seguito tratteremo quasi esclusivamente situazioni fisiche monodimensionali (1D, che si svolgono su di una retta o comunque su di una curva determinata) o bidimensionali (2D, che si svolgono in un piano o comunque su di una superficie determinata), solo in qualche caso tratteremo situazioni tridimensionali (3D).

I sistemi di coordinate che utilizzeremo sono

- Su di una linea (1D, punto materiale con 1 GdL)
  - Coordinata curvilinea
- Sul piano (2D, punto materiale con 2 GdL)
  - Coordinate cartesiane ortogonali nel piano
  - Coordinate polari
- Nello spazio (3D, punto materiale con 3 GdL)
  - Coordinate cartesiane ortogonali nello spazio
  - Coordinate cilindriche
  - Coordinate sferiche

### **Coordinata curvilinea su di una curva $\gamma$**

coordinata curvilinea

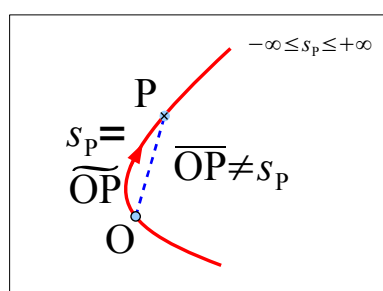


Fig.2.1 – Coordinata curvilinea

È necessario assegnare (Fig.2.1), sulla curva  $\gamma$ ,

- un punto (O: origine)
- un verso (verso positivo)

e la coordinata curvilinea di un punto P è

- $s_p$ : la lunghezza orientata dell'arco di curva OP (non la lunghezza del segmento OP). Per lunghezza orientata si intende la lunghezza con il segno positivo o negativo a seconda che per andare da O a P ci si deve muovere lungo la curva  $\gamma$  secondo il verso fissato (verso positivo) o in verso opposto (verso negativo).

Note:

- Se non vi sono altre limitazioni la coordinata curvilinea  $s_p$  può assumere qualunque valore reale positivo o negativo:  $-\infty \leq s_p \leq +\infty$ .
- In genere  $s_p \neq \pm \overline{OP}$ , solo nel caso particolare in cui la curva  $\gamma$  sia una retta, la coordinata curvilinea coincide con la distanza (orientata) del punto P dall'origine O.

## Coordinate cartesiane ortogonali nel piano

È necessario assegnare (Fig.2.2), sul piano,

- un punto (O: origine)
- due rette orientate e graduate (asse x ed asse y) aventi la medesima origine O, ed ortogonali tra loro

e le coordinate cartesiane ortogonali del punto P nel piano sono

- $x_p$ : distanza orientata del punto  $P_x$  dall'origine O, dove  $P_x$  è la proiezione ortogonale di P sull'asse x;
- $y_p$ : distanza orientata del punto  $P_y$  dall'origine O, dove  $P_y$  è la proiezione ortogonale di P sull'asse y.

Note:

- Se non vi sono altre limitazioni tanto  $x_p$  quanto  $y_p$  possono assumere qualunque valore reale positivo o negativo:

$$-\infty \leq x_p \leq +\infty$$

$$-\infty \leq y_p \leq +\infty$$

- È utile ricordare che la zona di piano con  $x_p$  ed  $y_p$  positivi si chiama “I quadrante”, la zona di piano con  $x_p$  negativo ed  $y_p$  positivo si chiama “II quadrante”, la zona di piano con  $x_p$  ed  $y_p$  negativi si chiama “III quadrante” e la zona di piano con  $x_p$  positivo ed  $y_p$  negativo si chiama “IV quadrante”.

coordinate cartesiane ortogonali (nel piano)

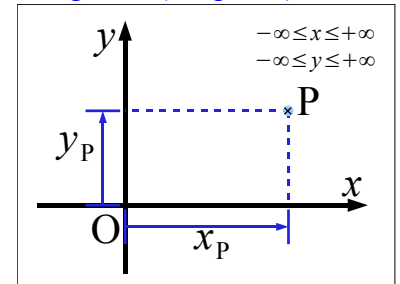


Fig.2.2 – Coordinate cartesiane ortogonali (nel piano)

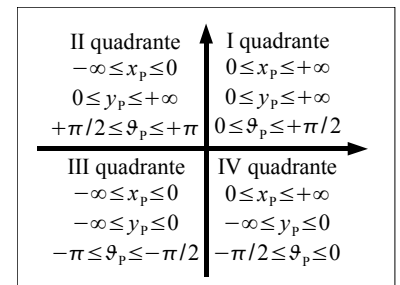


Fig.2.3 – Suddivisione del piano in “quadranti”

## Coordinate polari (nel piano)

È necessario assegnare (Fig.2.3), sul piano,

- un punto (O: polo)
- una semiretta di riferimento avente origine nel polo

e le coordinate polari del punto P nel piano sono

- $r_p$ : distanza del punto P dal polo O;
- $\vartheta_p$ : angolo orientato che individua il segmento OP. rispetto alla semiretta di riferimento.

Note:

- La distanza del punto dall'origine è non negativa mentre l'angolo viene considerato positivo in verso antiorario e negativo in verso opposto per cui, se non vi sono altre limitazioni:

$$0 \leq r_p \leq +\infty$$

$$-\pi \leq \vartheta_p \leq +\pi$$

- È utile tener presente che il “I quadrante” corrisponde a  $0 \leq \vartheta_p \leq +\pi/2$ , il “II quadrante” a  $+\pi/2 \leq \vartheta_p \leq +\pi$ , il “III quadrante” a  $-\pi \leq \vartheta_p \leq -\pi/2$  ed il “IV quadrante” a  $-\pi/2 \leq \vartheta_p \leq 0$ .

- L'insieme dei punti per cui la coordinata  $r$  ha lo stesso valore ( $r = \text{cost}$ ) è una circonferenza con centro

coordinate polari

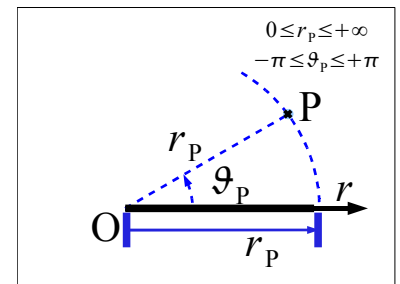


Fig.2.4 – Coordinate polari (nel piano)

nell'origine.

## Cambiamento di coordinate nel piano

È importante che due sperimentatori che osservano lo stesso fenomeno fisico siano in grado di scambiarsi informazioni, anche se adottano due differenti sistemi di riferimento<sup>10</sup>. La situazione più generale (ad esempio il passaggio da un sistema di coordinate cartesiane ortogonali ad un sistema di coordinate polari traslato e ruotato rispetto al precedente) può essere trattata considerando in sequenza situazioni più semplici (rotazione, traslazione, passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari) che esamineremo separatamente qui di seguito.

da coordinate cartesiane a polari e viceversa

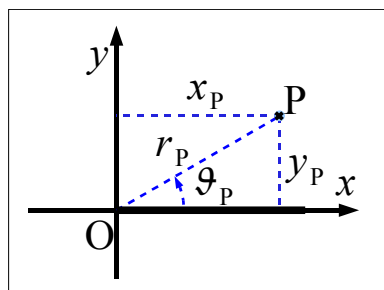


Fig.2.5 – da coordinate polari a cartesiane e viceversa

Con considerazioni esclusivamente geometriche/trigonometriche è possibile ricavare delle regole per trasformare le coordinate di un punto in un particolare sistema di coordinate nelle coordinate del medesimo punto in un altro sistema di coordinate. Assumiamo qui che i due sistemi di riferimento hanno l'origine in comune e che la semiretta di riferimento delle coordinate polari coincide con il semiasse positivo delle  $x$ . In tal caso valgono le relazioni

$$\begin{aligned}x_P &= r_P \cos \vartheta_P \\ y_P &= r_P \sin \vartheta_P\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}r_P &= +\sqrt{x_P^2 + y_P^2} \\ \vartheta_P &= \arctan(y_P/x_P) \begin{cases} +\pi & \text{P nel II quadrante } (x_P < 0, y_P > 0) \\ +0 & \text{P nel I o IV quadrante } (x_P \geq 0) \\ -\pi & \text{P nel III quadrante } (x_P < 0, y_P < 0) \end{cases}.\end{aligned}$$

L'apparente complessità dell'ultima relazione è dovuta al fatto che l'arcotangente, funzione inversa della tangente, dà come risultato un angolo compreso tra  $-\pi/2$  e  $+\pi/2$  che corrisponde a punti nel I o nel IV quadrante ( $x_P \geq 0$ ). Pertanto, se il punto P è nel II o nel III quadrante ( $x_P < 0$ ) occorre “correggere” di  $\pm\pi$  il valore fornito dalla funzione arcotangente.

Per traslazione del sistema di coordinate si intende uno spostamento dell'origine delle coordinate eseguito lasciando gli assi del secondo sistema di coordinate paralleli e concordi agli assi omologhi del primo sistema di coordinate. Nel caso di coordinate cartesiane ortogonali nel piano piano ciò significa che l'asse  $x'$  è parallelo e concorde all'asse  $x$  e l'asse  $y'$  è parallelo e concorde all'asse  $y$ .

<sup>10</sup> Si tenga presente che i due sistemi di riferimento possono differire per il tipo di coordinate (ad esempio cartesiane per un osservatore e polari per l'altro) per la scelta dell'origine e dell'orientazione degli assi, ma possono anche essere in moto relativo l'uno rispetto all'altro (si pensi ad esempio ad un osservatore fermo sulla banchina di una stazione ferroviaria mentre l'altro è su di un treno che sta attraversando la medesima stazione).

La *traslazione* è individuata dalla posizione dell'origine di un sistema di coordinate rispetto all'altro, ossia dalle coordinate  $(x_{O'}, y_{O'})$  del punto  $O'$  in  $Oxy$  o, equivalentemente, dalle coordinate  $(x'_O, y'_O)$  del punto  $O$  in  $O'x'y'$ .

$$\begin{aligned} x'_P &= x_P - x_{O'} & x_P &= x'_P - x'_{O'} \\ y'_P &= y_P - y_{O'} & y_P &= y'_P - y'_{O'} \end{aligned}$$

Nel caso di una rotazione, per semplicità e senza pergere in generalità, assumiamo che l'origine dei due sistemi di coordinate sia la stessa.

La *rotazione* è individuata dall'angolo orientato  $\vartheta_{xx'}$ , che il semiasse positivo  $x'$  forma rispetto al semiasse positivo  $x$ . È estremamente semplice descrivere tale situazione nel caso di coordinate polari

$$\begin{aligned} r'_P &= r_P & r_P &= r'_P \\ \vartheta'_P &= \vartheta_P - \vartheta_{xx'} & \vartheta_P &= \vartheta'_P + \vartheta_{xx'} \end{aligned}$$

ma con qualche considerazione di geometria/trigonometria è possibile descriverla anche nel caso di coordinate cartesiane ortogonali:

$$\begin{aligned} x'_P &= x_P \cos \vartheta_{xx'} + y_P \sin \vartheta_{xx'} \\ y'_P &= -x_P \sin \vartheta_{xx'} + y_P \cos \vartheta_{xx'} \end{aligned}$$

### Coordinate cartesiane ortogonali

Se si utilizzano le coordinate cartesiane ortogonali nel piano è semplice estendere tali coordinate a situazioni tridimensionali definendo un terzo asse ortogonale ad entrambi i precedenti. Pertanto:

È necessario assegnare

- un punto ( $O$ : origine)
- tre rette orientate e graduate (asse  $x$ , asse  $y$ , asse  $z$ ) aventi la medesima origine  $O$ , ed ortogonali tra loro

e le coordinate cartesiane ortogonali del punto  $P$  sono

- $x_P$ : distanza orientata del punto  $P_x$  dall'origine  $O$ , dove  $P_x$  è la proiezione ortogonale di  $P$  sull'asse  $x$ ;
- $y_P$ : distanza orientata del punto  $P_y$  dall'origine  $O$ , dove  $P_y$  è la proiezione ortogonale di  $P$  sull'asse  $y$ .
- $z_P$ : distanza orientata del punto  $P_z$  dall'origine  $O$ , dove  $P_z$  è la proiezione ortogonale di  $P$  sull'asse  $z$ .

Note

- Se non vi sono altre limitazioni tutte e tre le coordinate possono assumere qualunque valore reale positivo o negativo:

$$\begin{aligned} -\infty &\leq x_P \leq +\infty \\ -\infty &\leq y_P \leq +\infty \\ -\infty &\leq z_P \leq +\infty \end{aligned}$$

È importante sottolineare che, una volta fissati gli assi  $x$  ed  $y$ ,

traslazione (coordinate cartesiane)

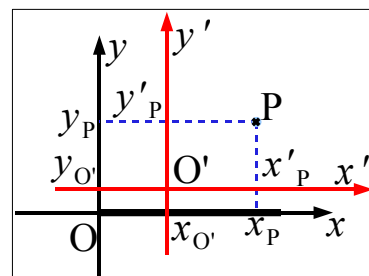


Fig.2.6 – traslazione (coordinate cartesiane)

rotazione (coordinate cartesiane)

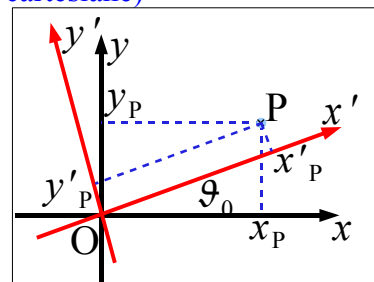


Fig.2.7 – rotazione (coordinate cartesiane)

coordinate cartesiane ortogonali (nello spazio)

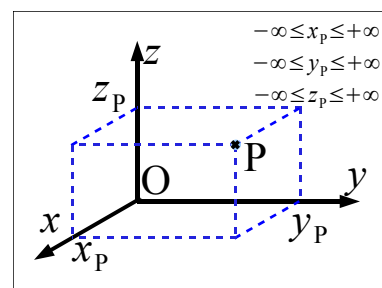


Fig.2.8 – coordinate cartesiane ortogonali (nello spazio)

terne levogire e destrorgire

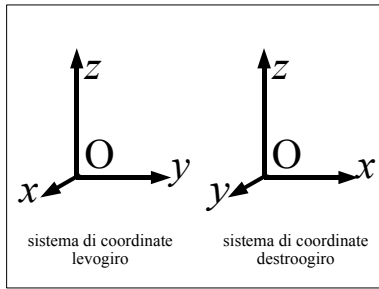


Fig.2.9 – terna levogira o destrogiro

### coordinate cilindriche

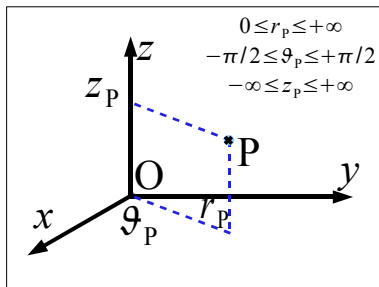


Fig.2.10 – coordinate cilindriche

simmetria cilindrica  
asse di simmetria

esistono due modi possibili, tra loro incompatibili, di scegliere l'asse  $z$ . Nel primo caso (si parla di terna *levogira*) un osservatore posto con i piedi nell'origine, con la testa nel verso positivo dell'asse  $z$  e l'asse  $x$  di fronte a sè vede l'asse  $y$  alla sua sinistra, mentre nel secondo caso (terna *destrogiro*) vede l'asse  $y$  alla sua destra. Sebbene la scelta sia arbitraria in genere, ed in particolare nell'ambito di questo corso, si utilizzeranno esclusivamente terne levogire.

## Coordinate cilindriche

Partendo dalle coordinate polari (nel piano) vi è un modo molto semplice di estenderle a situazioni tridimensionali: aggiungere un asse ortogonale al piano ed utilizzare le coordinate  $r_P$  e  $\vartheta_P$  (come nelle coordinate polari) più la coordinata  $z_P$  (come nelle coordinate cartesiane ortogonali nello spazio). Pertanto

È necessario assegnare

- un sistema di coordinate polari nel piano
- un asse,  $z$ , ortogonale al piano ed orientato in modo da vedere gli angoli positivi in verso antiorario

e le coordinate cilindriche del punto  $P$  sono

- $r_P$  : come nelle coordinate polari;
- $\vartheta_P$  : come nelle coordinate polari;
- $z_P$  : come nelle coordinate cartesiane ortogonali.

Note:

- Se non vi sono altre limitazioni:

$$0 \leq r_P \leq +\infty$$

$$-\pi \leq \vartheta_P \leq +\pi$$

$$-\infty \leq z_P \leq +\infty$$

- Il nome di coordinate cilindriche deriva dal fatto che la superficie  $r = \text{cost}$  (ossia l'insieme di tutti i punti per cui la coordinata  $r$  assume il medesimo valore) è una superficie cilindrica.
- Le coordinate cilindriche sono particolarmente utili quando la situazione fisica che si deve trattare presenta *simmetria cilindrica*, ossia quando una rotazione arbitraria intorno ad un particolare asse (*asse di simmetria*) lascia il problema identico a sè stesso: in tal caso è ovvio che, utilizzando un sistema di coordinate cilindriche con l'asse  $z$  coincidente con l'asse di simmetria, nelle equazioni che descrivono la situazione fisica non deve comparire la coordinata  $\vartheta$ . In tal modo si riesce a trattare una situazione tridimensionale come se fosse bidimensionale, con ovvie semplificazioni nei calcoli.

## Coordinate sferiche

Un differente modo di “estendere” le coordinate polari (nel piano) a situazioni tridimensionali è costituito dalle coordinate sferiche che sono, in un certo senso, l'analogo tridimensionale delle coordinate polari.

È necessario assegnare

- un punto, O, detto centro delle coordinate sferiche
- un piano, detto piano equatoriale (xy, nella figura)
- un semipiano, detto meridiano (xz, nella figura)

e le coordinate sferiche del punto P sono

- $\rho_P$  : distanza del punto P dal centro O;
- $\vartheta_P$  : come nelle coordinate polari;
- $\varphi_P$  : angolo formato dal segmento OP rispetto all'asse z.

Note:

- Se non vi sono altre limitazioni:

$$0 \leq \rho_P \leq +\infty$$

$$-\pi \leq \vartheta_P \leq +\pi$$

$$0 \leq \varphi_P \leq +\pi$$

- Il nome di coordinate sferiche deriva dal fatto che la superficie  $\rho = \text{cost}$  (ossia l'insieme di tutti i punti per cui la coordinata  $\rho$  assume il medesimo valore) è una superficie sferica.
- Le coordinate sferiche sono particolarmente utili quando la situazione fisica che si deve trattare presenta *simmetria sferica*, ossia quando una rotazione arbitraria intorno ad un qualunque asse passante per un particolare punto (*centro di simmetria*) lascia il problema identico a se stesso: in tal caso è ovvio che, utilizzando un sistema di coordinate sferiche con il centro O coincidente con il centro di simmetria, nelle equazioni che descrivono la situazione fisica non devono comparire le coordinate  $\vartheta$  e  $\varphi$ . In tal modo si riesce a trattare una situazione tridimensionale come se fosse monodimensionale, con ovvie semplificazioni nei calcoli.
- Le coordinate “geografiche”, definite sulla Terra sono simili alle coordinate sferiche con origine nel centro della terra, asse z orientato verso il polo Nord, piano meridiano passante per l'osservatorio astronomico di Greenwich (UK):
  - $h_P = \rho_P - R_T$  : quota sul livello del mare (positiva o negativa) con  $R_T$  raggio medio della Terra;
  - $\vartheta_P$  : longitudine (Est: positiva, Ovest: negativa);
  - $\lambda_P = \pi/2 - \varphi_P$  : latitudine (Nord: positiva, Sud: negativa).

coordinate sferiche

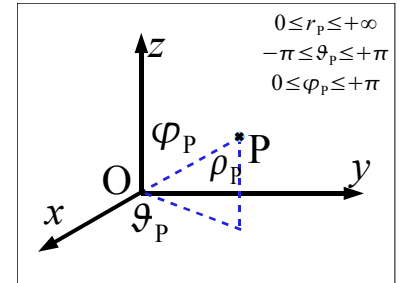


Fig.2.11 – coordinate sferiche

simmetria sferica  
centro di simmetria

coordinate geografiche  
quota sul livello del mare  
latitudine  
longitudine

## Cambiamento di coordinate nello spazio

Così come nel caso bidimensionale del piano, anche nel caso tridimensionale è possibile che due osservatori utilizzino due sistemi di coordinate differenti e che, quindi, per comunicarsi delle informazioni relative ad un fenomeno fisico, devono avere delle regole per trasformare le coordinate di un punto in un particolare sistema di coordinate nelle coordinate del medesimo punto in un altro sistema di coordinate. Nell'ambito di questo corso cercheremo, per quanto possibile, di evitare situazioni che richiedono l'uso di sistemi di coordinate tridimensionali, tuttavia per completezza riportiamo qui di seguito le relazioni per passare da coordinate sferiche o cilindriche a coordinate cartesiane ortogonali e viceversa:

da coordinate cilindriche a cartesiane ortogonali

- da coordinate cilindriche a cartesiane ortogonali:

$$x_p = r_p \cos \vartheta_p$$

$$y_p = r_p \sin \vartheta_p$$

$$z_p = z_p$$

da coordinate cartesiane ortogonali a cilindriche

- da coordinate cartesiane ortogonali a cilindriche:

$$r_p = +\sqrt{x_p^2 + y_p^2}$$

$$\vartheta_p = \arctan(y_p/x_p) \begin{cases} +\pi & P_{\perp} \text{ nel II quadrante } (x_p < 0, y_p > 0) \\ +0 & P_{\perp} \text{ nel I o IV quadrante } (x_p \geq 0) \\ -\pi & P_{\perp} \text{ nel III quadrante } (x_p < 0, y_p < 0) \end{cases}$$

$$z_p = z_p$$

da coordinate sferiche a cartesiane ortogonali

- da coordinate sferiche a cartesiane ortogonali:

$$x_p = \rho_p \sin \varphi_p \cos \vartheta_p$$

$$y_p = \rho_p \sin \varphi_p \sin \vartheta_p$$

$$z_p = \rho_p \cos \varphi_p$$

da coordinate cartesiane ortogonali a sferiche

- da coordinate cartesiane ortogonali a sferiche:

$$\rho_p = +\sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$$

$$\vartheta_p = \arctan(y_p/x_p) \begin{cases} +\pi & P_{\perp} \text{ nel II quadrante } (x_p < 0, y_p > 0) \\ +0 & P_{\perp} \text{ nel I o IV quadrante } (x_p \geq 0) \\ -\pi & P_{\perp} \text{ nel III quadrante } (x_p < 0, y_p < 0) \end{cases}$$

$$\varphi_p = \arccos \frac{z_p}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}}$$

dove  $P_{\perp}$  è la proiezione ortogonale del punto P nel piano xy.

Anche qui l'apparente complessità delle reasformazioni da coordinate cilindriche o sferiche a coordinate cartesiane è dovuto al fatto che la funzione arcotangente dà come risultato un angolo compreso tra  $-\pi/2$  e  $+\pi/2$  che deve, in alcuni casi, essere corretto di  $\pm\pi$ . Non vi è alcun problema, invece, con l'arccoseno dato che tale funzione, inversa della funzione coseno, fornisce un valore compreso tra 0 e  $\pi$ , così come serve per  $\varphi_p$ .

## Legge oraria e traiettoria

Fin qui abbiamo analizzato il problema della descrizione del moto di un punto materiale da un punto di vista geometrico, passiamo ora a considerarlo dal punto di vista fisico. Ciò che ci interessa è che un osservatore (ossia colui che vuol descrivere il fenomeno e che ha scelto un particolare sistema di coordinate fissandone l'origine e gli assi ed un orologio per misurare il tempo) sia in grado di fornire una descrizione quantitativa del moto del punto materiale.

Per far ciò si utilizza la *legge oraria*: una funzione che a ciascun istante associa la posizione occupata in quell'istante dal punto materiale. Poiché, come abbiamo visto in precedenza, la posizione di un punto materiale è espressa tramite le coordinate del punto geometrico che rappresenta il punto materiale, la legge oraria è espressa tramite una o più funzioni che danno le coordinate in funzione del tempo.

Pertanto, per un sistema ad 1 GdL, utilizzando la coordinata curvilinea  $s$ , la legge oraria si esprime come

$$s_p(t)$$

per un sistema a 2 GdL, utilizzando le coordinate cartesiane ortogonali  $x, y$  o le coordinate polari  $r, \vartheta$ , la legge oraria si esprime come

$$\begin{cases} x_p(t) \\ y_p(t) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} r_p(t) \\ \vartheta_p(t) \end{cases}$$

mentre per un sistema a 3 GdL, utilizzando le coordinate cartesiane ortogonali  $x, y, z$  o le coordinate cilindriche  $r, \vartheta, z$  o le coordinate sferiche  $\rho, \vartheta, \varphi$ , si esprime come

$$\begin{cases} x_p(t) \\ y_p(t) \\ z_p(t) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} r_p(t) \\ \vartheta_p(t) \\ z_p(t) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \rho_p(t) \\ \vartheta_p(t) \\ \varphi_p(t) \end{cases}$$

Nella prossima lezione vedremo come queste relazioni si possono esprimere in maniera più sintetica utilizzando la notazione vettoriale.

La legge oraria contiene tutte le informazioni relative al moto di un punto materiale, tuttavia se rappresentiamo graficamente le funzioni (ad esempio in coordinate cartesiane, nel piano)  $x_p(t)$  ed  $y_p(t)$  queste sono solo delle rappresentazioni grafiche e non danno un'idea immediata del percorso seguito dal punto materiale.

Per far ciò si utilizza la *traiettoria*, ossia l'insieme dei punti dello spazio occupati, nei diversi istanti, dal punto materiale durante il moto. La traiettoria è una curva nello spazio geometrico.

Per ottenere una rappresentazione matematica della traiettoria è sufficiente interpretare la legge oraria come una rappresentazione parametrica (con parametro  $t$ ). In altre parole, prendendo come

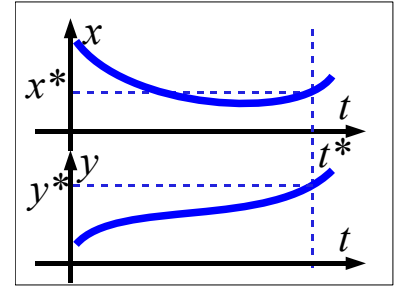


Fig.2.12 – legge oraria

legge oraria

legge oraria (in coordinata curvilinea)

legge oraria (in coordinate cartesiane o polari)

legge oraria (in coordinate cartesiane, cilindriche o sferiche)

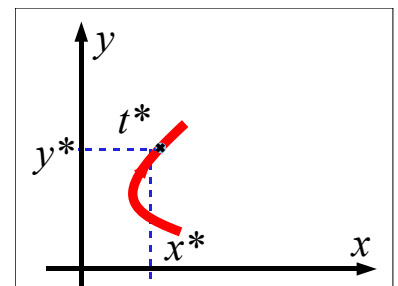


Fig.2.13 – traiettoria

traiettoria

esempio il caso della rappresentazione in coordinate cartesiane nel piano, si può invertire la funzione  $x_p(t)$  ricavando  $t(x_p)$  e sostituirlo nella funzione  $y_p(t)$  ottenendo così una funzione

$$y_p(x_p)$$

che non contiene il tempo.

Analogamente, nel caso di rappresentazione in coordinate polari nel piano, la traiettoria potrà essere rappresentata da una funzione

$$r_p(\vartheta_p)$$

Non scendiamo qui in dettaglio per quel che riguarda la situazione, geometricamente più complesse, di una traiettoria tridimensionale.

Ovviamente dalla traiettoria non è possibile ricavare la legge oraria dato che la traiettoria contiene meno informazioni: analizzandola è possibile dire da dove è passato il punto materiale, ma non quando vi è passato.

## Un punto nello spazio e nel tempo

- La situazione fisica più semplice da studiare è il moto (nello spazio e nel tempo) di un oggetto che possa essere rappresentato tramite un punto geometrico. Tale oggetto (dimensioni lineari piccole rispetto alle altre lunghezze e possibilità di trascurare le rotazioni) è detto *punto materiale*.
- Per individuare la posizione di un punto geometrico, che rappresenta un punto materiale, si deve adottare un *sistema di riferimento* (ossia un qualunque *sistema di coordinate* geometriche cui è associato un *orologio* per misurare il tempo che, come lo spazio in meccanica classica sono assoluti).
- I diversi sistemi di coordinate possono richiedere una o più coordinate (uno o più numeri reali), ma ciò che caratterizza la situazione fisica è il numero di *gradi di libertà* (GdL):
  - In una situazione fisica con 1 GdL è conveniente adottare la *coordinata curvilinea*
  - In una situazione fisica con 2 GdL (su di un piano) si possono adottare le *coordinate cartesiane ortogonali*, ma talvolta risultano comode le *coordinate polari*
  - In una situazione fisica con 3 GdL (nello spazio) si possono adottare le *coordinate cartesiane ortogonali*, ma talvolta risultano comode le *coordinate cilindriche* o le *coordinate sferiche*.
- Il moto di un punto materiale è descritto completamente dalla *legge oraria* anche se, talvolta, risulta comodo considerare la *traiettoria* che non contiene il tempo.

## Grandezze scalari e grandezze vettoriali: dal concetto di spostamento al concetto di vettore.

Utilizzando le coordinate siamo in grado di fornire, in maniera quantitativa, a qualunque altro osservatore, la posizione di un punto materiale, dopo aver specificato il sistema di coordinate (ed il sistema di unità di misura) che intendiamo utilizzare. Se concordiamo anche un'unità di misura per il tempo e sincronizziamo gli orologi, utilizzando la legge oraria, siamo in grado di fornire tutte le informazioni relative al moto di punto materiale. Tuttavia la *cinematica del punto materiale*<sup>11</sup> non termina qui in quanto vi sono numerose altre grandezze che risultano utili nel descrivere alcune caratteristiche specifiche del moto.

Se prendiamo in considerazione le posizioni  $P_1$  a  $P_2$  di un punto materiale in due diversi istanti (ad esempio  $t_1$  e  $t_2$ , rispettivamente) possiamo prendere in considerazione la “distanza effettivamente percorsa lungo la traiettoria” o la “distanza in linea d'aria”. Il concetto intuitivo di “distanza in linea d'aria”, come è noto dalla geometria, è reso in maniera formale con la distanza definita come la lunghezza  $\overline{P_1P_2}$  del segmento  $P_1P_2$  che ha per estremi i due punti<sup>12</sup> (per comodità useremo, di solito, la notazione  $r_{12}$  invece di  $\overline{P_1P_2}$ ). Per rendere formale il primo concetto è, invece, utile la coordinata curvilinea: il concetto intuitivo di “distanza effettivamente percorsa lungo la traiettoria” è reso in maniera formale dalla distanza curvilinea definita come la differenza tra le coordinate curvilinee dei due punti:  $s_{12} = s_2 - s_1$ . Si noti tuttavia che la grandezza così definita può essere tanto positiva quanto negativa: è facile verificare che la distanza curvilinea  $s_{12}$  è positiva quando, come nell'esempio illustrato in figura, per andare da  $P_1$  a  $P_2$  si percorre la traiettoria nel verso positivo stabilito per la coordinata curvilinea, mentre è negativa in caso contrario (per andare da  $P_1$  a  $P_2$  la traiettoria è percorsa nel verso opposto a quello stabilito per la coordinata curvilinea). Ovviamente  $s_{21} = s_1 - s_2 = -s_{12}$  mentre  $r_{21} = r_{12}$ .

La distanza curvilinea differisce quindi dalla distanza sia poiché la prima è misurata lungo una retta mentre la seconda è misurata lungo la traiettoria effettiva, ma anche poiché la prima contiene il concetto di “verso di percorrenza” che manca nella seconda. Per associare il concetto di “verso di percorrenza” a quello di “distanza in linea d'aria” è utile introdurre il concetto di “segmento

distanza  
distanza curvilinea

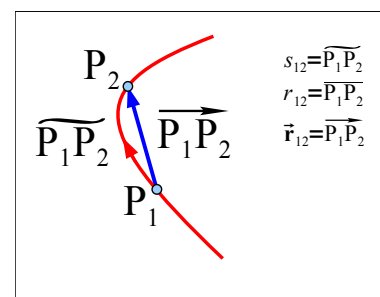


Fig.3.1 – distanza, distanza curvilinea, segmento orientato

11 Ricordiamo che la cinematica ha lo scopo di studiare il moto (in questo caso di un punto materiale) indipendentemente dalle cause che lo determinano.

12 Si osservi che il segmento è indicato con i due punti estremi mentre la sua lunghezza è indicata aggiungendo una barra orizzontale. Il primo,  $\overline{P_1P_2}$ , è solo un'entità geometrica, mentre il secondo,  $r_{12} = \overline{P_1P_2}$ , è una lunghezza e, nel SI, si misura in metri.

## segmento orientato

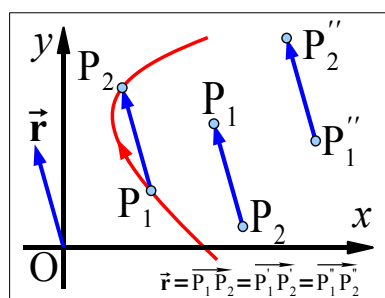


Fig.3.2 – segmenti orientati equivalenti, vettore

orientato”.

Si parla di segmento orientato (e lo si indica tracciando una freccia sul simbolo del segmento:  $\overrightarrow{P_1P_2}$ ) quando si vuole precisare quale sia il punto iniziale (che viene indicato per primo) e quale quello finale (che viene indicato per secondo). Pertanto, mentre  $P_1P_2$  e  $P_2P_1$  rappresentano il medesimo segmento,  $\overrightarrow{P_1P_2}$  e  $\overrightarrow{P_2P_1}$  rappresentano due differenti segmenti orientati (l'uno opposto all'altro).

Il segmento orientato così definito è individuato completamente da:

- la posizione del primo estremo (che può essere specificata fornendo le coordinate del primo punto:  $(x_{P_1}, y_{P_1}, z_{P_1})$ )
- il modulo (che può essere specificato fornendo la distanza tra i due punti:  $r_{12} = \overline{P_1P_2}$ )
- la direzione<sup>13</sup> (che può essere specificata fornendo l'angolo che la retta passante per i due punti forma con una retta prefissata, ad esempio l'asse x)
- il verso (che può essere specificato indicando l'ordine in devono essere considerati i due punti: “da P1 verso P2”).

e può essere rappresentato graficamente con un segmento alla cui estremità (il punto finale) è stata aggiunta una freccia.

Tuttavia, poiché sappiamo già descrivere la posizione del primo estremo del segmento orientato, siamo interessati al solo “spostamento”. Ad esempio se, riferendoci ad una scacchiera, diciamo che il cavallo bianco si è spostato di “due caselle in avanti ed una a sinistra” stiamo specificando lo “spostamento” senza specificare la casella di partenza. Dunque tutti i segmenti orientati che sono caratterizzati dallo stesso modulo, dalla stessa direzione e dallo stesso verso rappresentano lo stesso “spostamento” e per questo motivo sono considerati “equivalenti”.

vettore  
grandezza vettoriale

Chiameremo grandezza vettoriale (o semplicemente vettore) qualunque grandezza fisica che ha le caratteristiche dello spostamento (ossia di un segmento orientato di cui non prendiamo in considerazione la posizione del primo estremo). In effetti, secondo la definizione di vettore solitamente adottata in fisica<sup>14</sup>, una grandezza vettoriale

- è caratterizzata da modulo, direzione e verso
- e, nei cambiamenti di coordinate, si comporta come un segmento orientato.

## vettore applicato

Se è necessario specificare anche la posizione iniziale si parla di

<sup>13</sup> Si presti attenzione al fatto che, nel linguaggio comune, per “direzione” si spesso si intende sia la direzione che il verso. In tal caso, per evitare confusione, è bene usare il termine “direzione orientata” o dire esplicitamente “direzione e verso”.

<sup>14</sup> In matematica i vettori sono spesso definiti in maniera differente, ma hanno le medesime caratteristiche.

vettore applicato.

Le dimensioni e l'unità di misura di un vettore sono quelle del suo modulo: lo spostamento (o meglio il vettore spostamento) è una lunghezza e l'unità di misura (nel SI) è il metro. Nel seguito incontreremo vettori che non rappresentano lunghezze, tuttavia la definizione data ci assicura che un vettore può essere sempre rappresentato graficamente come un segmento orientato.

La rappresentazione grafica è ovviamente qualitativa; per avere una rappresentazione quantitativa dobbiamo fornire le componenti del vettore in uno qualunque dei sistemi di coordinate di cui si è parlato in precedenza:

- le componenti (cartesiane ortogonali) di un vettore sono le proiezioni del segmento orientato sugli assi, considerate con il segno positivo o negativo a seconda che siano concordi o opposte al verso dell'asse
- le componenti polari (ovviamente nel piano) di un vettore sono date dal modulo e dall'angolo che il vettore forma rispetto all'asse di riferimento<sup>15</sup>
- le coordinate sferiche (ovviamente nello spazio) di un vettore sono date dal modulo e da due angoli (corrispondenti agli angoli  $\vartheta$  e  $\varphi$ ) che ne specificano direzione e verso.

Con semplici considerazioni di geometria e trigonometria è possibile passare da un tipo di rappresentazione all'altro. Nel piano:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

$$\vartheta = \text{Arg}(\vec{r}) = \arctan(r_y/r_x) \pm \pi$$

$$r_x = r \cos \vartheta$$

$$r_y = r \sin \vartheta$$

Si presti molta attenzione alle notazioni:

- il vettore è rappresentato con una freccia sovrapposta al simbolo:  $\vec{r}$ . Una notazione alternativa, che è molto utilizzata nei testi a stampa ma che, per ovvie ragioni, non può essere utilizzata nei “manoscritti”, è il carattere grassetto ( $\mathbf{r}$ ). In questi appunti, per evitare confusioni e per abituare lo studente all'uso della freccia sovrapposta, si utilizzerà la notazione “grassetto+freccia”  $\vec{\mathbf{r}}$ .
- il modulo di un vettore è rappresentato con il medesimo simbolo, ma senza freccia ( $r$ ) oppure dal simbolo del vettore tra due barre verticali ( $|\vec{r}|$ ). Quest'ultima notazione è la medesima del “valore assoluto” ( $|x|$ ) di un numero, tuttavia non c'è possibilità di equivoco dato che, come si vedrà tra breve, non ha senso parlare di vettori positivi o negativi e, di conseguenza, il concetto di valore assoluto di un vettore è privo di senso.
- le componenti cartesiane ortogonali di un vettore sono rappresentate con il medesimo simbolo, senza freccia e con

componenti di un vettore

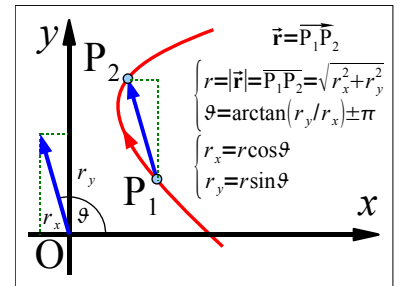


Fig.3.3 – componenti di un vettore (nel piano)

<sup>15</sup> Si osservi che tale angolo tiene conto sia della direzione che del verso.

un indice in basso che specifica l'asse ( $x, y$  o  $z$ ):  $r_x, r_y, r_z$ . Le componenti possono essere utilizzate singolarmente, ma se si vuole indicare che rappresentano un vettore le si racchiude tra parentesi:  $\vec{r} \equiv (r_x, r_y, r_z)$ .

- Non c'è una notazione specifica per indicare l'angolo che un vettore forma con una direzione. Per indicare l'angolo orientato  $\vartheta$  che il vettore  $\vec{r}$  forma con l'asse  $x$  si usa talvolta la notazione  $\vartheta = \text{Arg}(\vec{r})$ , che discende dalla rappresentazione dei numeri complessi come vettori in un piano.

Poiché in fisica oltre ai “numeri” ed ai vettori si incontrano anche altri tipi di grandezze (ad esempio i tensori) è opportuno dare anche la definizione di grandezza scalare

grandezza scalare  
scalare

- una grandezza scalare (o, semplicemente, uno scalare) è caratterizzata da un solo valore numerico, indipendente dal sistema di coordinate.

Si osservi che, secondo questa definizione, il modulo di un vettore è una grandezza scalare mentre non lo sono le componenti, in quanto il loro valore cambia se si cambia il sistema di coordinate.

### Operazioni con i vettori

Per poter utilizzare le grandezze vettoriali nei calcoli è necessario definire le operazioni che è possibile eseguire tra uno scalare ed un vettore oppure tra due vettori. Ovviamente tali operazioni devono essere “ragionevolmente simili” alle corrispondenti operazioni tra scalari (ossia le normali operazioni tra numeri).

somma di due vettori

Il vettore  $\vec{r}$  somma di due vettori,  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , è definito come il vettore le cui componenti sono ottenute come somma delle componenti omologhe dei vettori addendi:

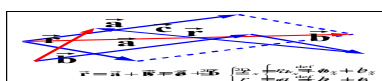


Fig.3.4 – somma di due o più vettori

$$\begin{aligned} r_x &= a_x + b_x \\ r_y &= a_y + b_y \\ r_z &= a_z + b_z \end{aligned}$$

ovvero, in modo sintetico, con una notazione equivalente:

$$\vec{a} + \vec{b} \equiv (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

La regola del parallelogrammo è una costruzione geometrica che consente di ottenere (solitamente in maniera qualitativa) la somma di due vettori rappresentati graficamente come segmenti orientati. Se si devono sommare più di due vettori risulta più comodo rappresentare graficamente ciascun vettore con il punto iniziale (la “coda” della freccia) in corrispondenza del punto finale (la “punta” della freccia) del vettore precedente: il vettore somma è il vettore che ha la “coda” in corrispondenza della coda del primo addendo e la “punta” in corrispondenza della “punta” dell'ultimo addendo. Si tenga comunque presente che, di solito, dalla rappresentazione

geometrica non è facile ricavare informazioni quantitative con precisione adeguata.

Il vettore  $\vec{r}$  prodotto di uno scalare ( $k$ ) per un vettore ( $\vec{a}$ ) è definito come il vettore le cui componenti sono ottenute come prodotto dello scalare per le componenti omologhe del vettore:

$$\begin{aligned} r_x &= k a_x \\ r_y &= k a_y \\ r_z &= k a_z \end{aligned}$$

ovvero

$$k \vec{a} \equiv (k a_x, k a_y, k a_z)$$

Il risultato è un vettore che ha sempre la medesima direzione del vettore da cui si è partiti, mentre il verso è lo stesso o quello opposto a seconda che lo scalare sia positivo o negativo. In particolare se lo scalare è 0 si ottiene il vettore nullo

$$0 \vec{a} = \vec{0}$$

se lo scalare è 1 si ottiene il vettore medesimo

$$+1 \vec{a} = \vec{a}$$

se lo scalare è -1 si ottiene il vettore opposto

$$-1 \vec{a} = -\vec{a}$$

ed in tal modo è possibile definire anche la differenza tra due vettori:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

che, graficamente, si ottiene con la regola della diagonale.

In effetti disegnando il parallelogrammo in cui due lati adiacenti rappresentano i due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , una diagonale rappresenta la somma  $\vec{a} + \vec{b}$  e l'altra la differenza ( $\vec{a} - \vec{b}$  oppure  $\vec{b} - \vec{a}$  a seconda del verso considerato) tra i due vettori.

## Versori e rappresentazioni di un vettore

Per rappresentare una direzione orientata (cioè una direzione ed un verso) è possibile utilizzare un vettore di modulo unitario, detto versore.

Da un vettore ( $\vec{r}$ ) è sempre possibile ottenere il versore corrispondente

$$\hat{r} = (1/r) \vec{r}$$

indicato con la medesima lettera del vettore, ma con un accento circonflesso al posto della freccia.

È immediato quindi scrivere un vettore esplicitandone il modulo:

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

Ad esempio  $\vec{a} = (3.5 m) \hat{r}$  significa che il vettore  $\vec{a}$  ha modulo 3.5 m e direzione orientata  $\hat{r}$ . Attenzione però alla presenza di un

prodotto di uno scalare per un vettore

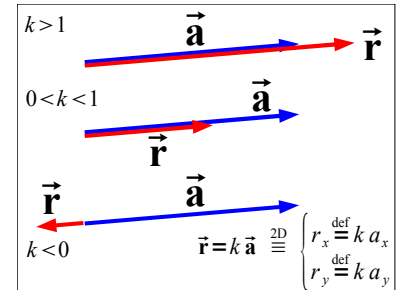


Fig.3.5 – prodotto di uno scalare per un vettore

vettore opposto

differenza tra due vettori

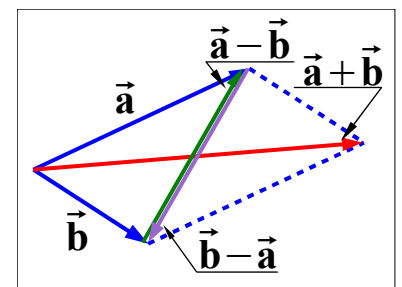


Fig.3.6 – somma e differenza tra due vettori

versore

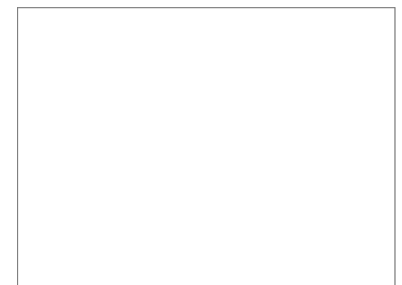


Fig.3.7 – versore

eventuale segno negativo che deve essere associato alla direzione orientata e non al modulo (il modulo di un vettore non può essere negativo):  $\vec{b}=(-5.7m)\hat{r}$  deve essere interpretato come  $\vec{b}=(5.7m)(-\hat{r})$  e quindi significa che il vettore  $\vec{b}$  ha modulo 5.7m e direzione orientata opposta a quella di  $\hat{r}$ . Pertanto i vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  hanno la medesima direzione ma versi opposti.

**versori degli assi cartesiani**

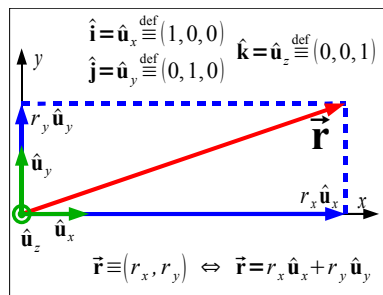


Fig.3.8 – versori degli assi e rappresentazione “algebraica” di un vettore

Particolarmente utili sono i versori degli assi cartesiani ortogonali. Qui saranno indicati con  $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ , ma in molti testi sono indicati con  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  rispettivamente. Non ci si faccia trarre in inganno dall'indice x, y o z in basso: i versori sono dei vettori ed hanno quindi tre componenti ciascuno:

$$\begin{aligned} \hat{u}_x &\equiv (1, 0, 0) \\ \hat{u}_y &\equiv (0, 1, 0) \\ \hat{u}_z &\equiv (0, 0, 1) \end{aligned}$$

È possibile specificare un sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $\Sigma \equiv (O, x, y, z)$  (individuato dalla posizione dell'origine e dall'orientamento degli assi) indicando l'origine O ed i versori degli assi  $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ .

**rappresentazione “algebraica” di un vettore**

I versori degli assi risultano molto utili per dare una rappresentazione “algebraica” di qualunque vettore. È abbastanza semplice verificare, con considerazioni geometriche, che

$$\vec{r} = r_x \hat{u}_x + r_y \hat{u}_y + r_z \hat{u}_z$$

**Prodotto scalare e vettoriale tra due vettori**

Non abbiamo ancora parlato di prodotto tra vettori dato che non si riesce a definire un'operazione tra vettori che goda di tutte le proprietà di cui gode il prodotto tra due numeri. Qui di seguito definiamo il prodotto scalare, il cui risultato però non è un vettore ma, come sottolinea il nome, uno scalare, mentre più avanti definiremo il prodotto vettoriale il cui risultato è, in effetti, uno “pseudo vettore”.

**prodotto scalare**

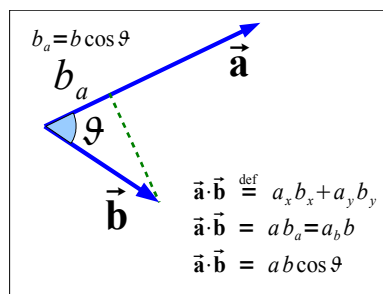


Fig.3.8 – prodotto scalare tra due vettori

**interpretazione geometrica del prodotto scalare**

Il prodotto scalare tra due vettori è definito come la somma dei prodotti delle componenti omologhe:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

ed è indicato con un punto posto tra i simboli dei due vettori.

Si può dimostrare che il prodotto scalare tra due vettori è pari al prodotto dei due moduli per il coseno dell'angolo  $\vartheta_{ab}$  compreso tra di essi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \vartheta_{ab}$$

A questo punto è semplice verificare la seguente interpretazione geometrica: il prodotto scalare tra due vettori è pari al prodotto di un vettore per la proiezione su di esso dell'altro vettore. È infatti evidente che  $b_a = b \cos \vartheta_{ab}$  è la proiezione di  $\vec{b}$  su  $\vec{a}$  e che  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a b_a$ . Inoltre, dalla definizione data è evidente che il prodotto

scalare è commutativo (cioè  $\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$ ) per cui è possibile scambiare i ruoli dei due vettori:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_b b$  dove  $a_b = a \cos \vartheta_{ab}$  è la proiezione di  $\vec{a}$  su  $\vec{b}$ .

È evidente che se uno dei due vettori è il versore di un asse si ottiene la componente del vettore lungo tale asse. Si ha quindi un modo molto semplice per ottenere le componenti cartesiane di un vettore:

$$\begin{aligned} r_x &= \vec{r} \cdot \hat{u}_x \\ r_y &= \vec{r} \cdot \hat{u}_y \\ r_z &= \vec{r} \cdot \hat{u}_z \end{aligned}$$

Più in generale, il prodotto scalare di un vettore per un versore da' come risultato la componente del vettore lungo la direzione orientata specificata dal versore:

$$a_b = \vec{a} \cdot \hat{b}$$

Il prodotto vettoriale tra due vettori è definito come il vettore che ha le componenti:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

ed è indicato con un “per” posto tra i simboli dei due vettori.

In effetti questa definizione “funziona” solo se si è nello spazio tridimensionale e si utilizza un sistema di coordinate levogiro. Se i vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono nel piano  $xy$  il vettore che si ottiene come risultato del prodotto vettoriale non è nel piano  $xy$  (è immediato verificare che ha solo la componente  $z$  diversa da zero). Inoltre il risultato cambia verso se si passa da un sistema di coordinate levogiro ad uno destrorso. Per tale motivo su alcuni testi il risultato del prodotto vettoriale viene indicato come uno “pseudovettore”. In effetti si tratta di un particolare tipo di tensore<sup>16</sup> che ha solo tre componenti distinte.

Si può dimostrare che il modulo del prodotto vettoriale tra due vettori è pari al prodotto dei due moduli per il seno dell'angolo  $\vartheta_{ab}$  compreso tra di essi:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a b \sin \vartheta_{ab}$$

L'interpretazione geometrica è immediata: il modulo del prodotto vettoriale è pari all'area del parallelogrammo che ha i due vettori come lati adiacenti (ossia quello utilizzato nella costruzione grafica del vettore somma con la “regola del parallelogrammo”). Infatti prendendo il vettore  $\vec{a}$  come base del parallelogrammo, l'altezza è  $h = b \sin \vartheta_{ab}$ .

È possibile la costruzione geometrica del prodotto vettoriale dicendo che è un vettore avente

- modulo pari al prodotto dei moduli dei due vettori per il

prodotto vettoriale

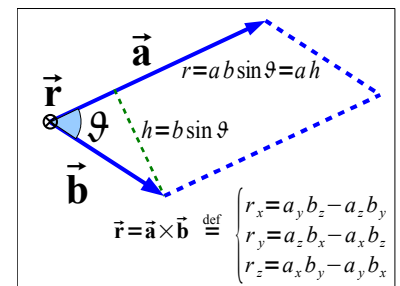


Fig.3.9 – prodotto vettoriale

interpretazione geometrica del prodotto vettoriale

costruzione geometrica del prodotto vettoriale

<sup>16</sup> Un tensore è una grandezza con caratteristiche “più complicate” di quelle di un vettore. Nello spazio tridimensionale un tensore può essere rappresentato mediante nove componenti.

seno dell'angolo compreso

- direzione ortogonale al piano che contiene i due vettori
- verso dato dalla “regola della mano destra”<sup>17</sup>: se, usando la mano destra, si mette il pollice come il primo vettore (l'unghia rappresenta la “punta” della freccia) ed indice come il secondo vettore, allora il medio, disposto ortogonalmente al palmo della mano, indica la direzione ed il verso del prodotto vettoriale.

il prodotto vettoriale è  
anticommutativo

È bene sottolineare, anche se è evidente dalla definizione data, che il prodotto vettoriale non è commutativo. Poiché cambia segno se si cambia l'ordine dei due vettori si dice che il prodotto vettoriale è anticommutativo:  $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ .

## Grandezze scalari e vettoriali

- Alcune grandezze fisiche (grandezze scalari) possono essere rappresentate tramite un solo valore numerico e non richiedono un sistema di riferimento.
- Altre grandezze fisiche (grandezze vettoriali) si comportano come un “segmento orientato” e sono caratterizzate da un modulo una direzione ed un verso. Quando è necessario specificare anche il punto di applicazione di un vettore si parla di vettore applicato.
- Un vettore sarà rappresentato, di solito, tramite le componenti (2 nel piano e 3 nello spazio) ma potrà essere utile rappresentarlo tramite il modulo ed 1 (nel piano) o 2 (nello spazio) angoli.
- Si definiscono le operazioni
  - Prodotto di uno scalare per un vettore
  - Somma di due vettori
  - Prodotto scalare tra due vettori
  - Prodotto vettoriale tra due vettori.
- I vettori di modulo unitario sono detti versori ed i versori degli assi cartesiani sono di particolare importanza nella rappresentazione dei vettori.

<sup>17</sup> Esistono anche altre regole mnemoniche per ricavare rapidamente il verso del prodotto vettoriale: ognuno può, ovviamente, utilizzare quella che gli risulta più comoda o crearsene una propria.



**Come impostare e svolgere un esercizio.**

**Testo non ancora (a.a. 2009/2010) inserito.**

**Si faccia riferimento alle trasparenze presentate in aula,  
reperibili sui siti docente già citati.**

## **Tabelle.**

*Tabella 1a – SI: unità fondamentali*

<i>Grandezza fisica</i>		<i>Unità SI</i>	
lunghezza	L	metro	m
massa	M	chilogrammo	kg
tempo	T	secondo	s
numero di entità	N	mole	mol
temperatura	$\Theta$	Kelvin	K
intensità luminosa	J	candela	cd

*Tabella 1b – SI: unità accessorie*

<i>Grandezza fisica</i>	<i>Dimensioni</i>	<i>Unità SI</i>	
Angolo piano	$[L^0 M^0 T^0]$	radiante	rad
Angolo solido	$[L^0 M^0 T^0]$	steradiano	sr

*Tabella 1c – unità non-SI ammesse*

<i>Grandezza fisica</i>	<i>Unità non-SI</i>		<i>Conversione</i>
angolo piano	grado sessagesimale	°	$1^\circ = (\pi/180)\text{rad}$
angolo piano	minuto di angolo	'	$1' = (1/60)^\circ$
angolo piano	secondo di angolo	''	$1'' = (1/60)'$
pressione	bar	bar	$1\text{bar} = 10^5\text{Pa}$
massa	tonnellata	t	$1\text{t} = 10^3\text{kg}$
tempo	minuto	min	$1\text{min} = 60\text{s}$
tempo	ora	h	$1\text{h} = 60\text{min}$
tempo	giorno	d	$1\text{d} = 24\text{h}$
volume	litro	l, L	$1\text{L} = 10^{-3}\text{m}^3$

*Tabella 1d – SI: multipli e sottomultipli*

<i>notazione decimale</i>	<i>notazione esponenziale</i>	<i>simbolo</i>	<i>nome</i>
	$10^{-24}$	y	iocto
	$10^{-21}$	z	zepto
	$10^{-18}$	a	atto
	$10^{-15}$	f	femto
0.000 000 000 001	$10^{-12}$	p	pico
0.000 000 001	$10^{-9}$	n	nano
0.000 001	$10^{-6}$	$\mu$	micro
0.001	$10^{-3}$	m	deci
0.01	$10^{-2}$	c	centi
0.1	$10^{-1}$	d	deci
10	$10^{+1}$	da	deca
100	$10^{+2}$	h	etto
1.000	$10^{+3}$	k	chilo
1.000.000	$10^{+6}$	M	mega
1.000.000.000	$10^{+9}$	G	giga
1.000.000.000.000	$10^{+12}$	T	tera
	$10^{+15}$	P	peta
	$10^{+18}$	E	exa
	$10^{+21}$	Z	zetta
	$10^{+24}$	Y	yotta

**Tabella 1e – SI: unità derivate (meccanica)**

<b>Grandezza fisica</b>	<b>Dimensioni</b>	<b>Unità SI</b>	
velocità	$[L^{+1} M^0 T^{-1}]$		m/s
accelerazione	$[L^{+1} M^0 T^{-2}]$		m/s <sup>2</sup>
forza	$[L^{+1} M^{+1} T^{-2}]$	Newton	N kg m / s <sup>2</sup>
lavoro, energia	$[L^{+2} M^{+1} T^{-2}]$	Joule	J N m
potenza	$[L^{+2} M^{+1} T^{-3}]$	Watt	W J/s
momento di una forza	$[L^{+2} M^{+1} T^{-2}]$		N m
velocità angolare	$[L^0 M^0 T^{-1}]$		rad/s
accelerazione angolare	$[L^0 M^0 T^{-2}]$		rad/s <sup>2</sup>
momento di inerzia	$[L^{+2} M^{+1} T^0]$		kg m <sup>2</sup>
quantità di moto	$[L^{+1} M^{+1} T^{-1}]$		kg m/s
momento angolare	$[L^{+2} M^{+1} T^{-1}]$		kg m <sup>2</sup> /s
frequenza	$[L^0 M^0 T^{-1}]$	Hertz	Hz 1/s
pulsazione	$[L^0 M^0 T^{-1}]$		rad/s
massa volumica, densità (di massa)	$[L^{-3} M^{+1} T^0]$		kg/m <sup>3</sup>
massa superficiale, densità di superficie	$[L^{-2} M^{+1} T^0]$		kg/m <sup>2</sup>
massa lineare, densità di linea	$[L^{-1} M^{+1} T^0]$		kg/m
pressione	$[L^{-1} M^{+1} T^{-2}]$	Pascal	Pa N/m <sup>2</sup>

F.BLOISI