Cinematica del punto materiale
Il vettore posizione ed il vettore spostamento

[Inquadramento]

Il vettore posizione ed il vettore spostamento
Indice

[Indice]

Il vettore posizione ed il vettore spostamento

La posizione ed il vettore posizione

Posizione di un punto materiale

La posizione di un punto materiale può essere individuata tramite

le coordinate

$$\left(x_P, y_P, z_P\right)$$

il **vettore posizione**

vettore applicato (nell'origine del sistema di riferimento) rappresentato da un segmento orientato che va' dall'origine O alla posizione P del punto materiale.

$$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP} = x_P \hat{u}_x + y_P \hat{u}_y + z_P \hat{u}_z$$

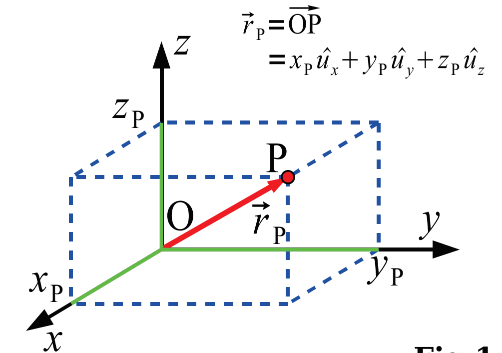

Fig.1

Le componenti del vettore posizione sono le le coordinate cartesiane orto-gonali del punto geometrico in cui si trova il pun-to materiale considerato:

$$r_{Px} = x_P, \; r_{Py} = y_P, \; r_{Pz} = z_P$$

$$\vec{r}_P \equiv \begin{cases} x_P \\ y_P \end{cases} \qquad \vec{r}_P \equiv \begin{cases} r_P \\ \vartheta_P \end{cases}$$

nel piano (2D)

$$\vec{r}_P \equiv \begin{cases} x_P \\ y_P \\ z_P \end{cases} \qquad \vec{r}_P \equiv \begin{cases} r_P \\ \vartheta_P \\ z_P \end{cases} \qquad \vec{r}_P \equiv \begin{cases} \rho_P \\ \vartheta_P \\ \varphi_P \end{cases}$$

nello spazio (3D)

Il vettore posizione ed il vettore spostamento

La legge oraria in forma vettoriale

La legge oraria può essere scritta in maniera più concisa utilizzando il vattore posizione.

$$\vec{r}_P(t) \equiv \begin{cases} x_P(t) \\ y_P(t) \end{cases} \qquad \vec{r}_P(t) \equiv \begin{cases} x_P(t) \\ y_P(t) \\ z_P(t) \end{cases}$$

nel piano (2D) nello spazio (3D)

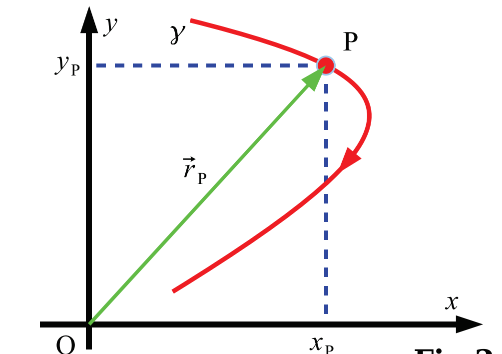

Fig.2

Si ha una semplificazione (formale) nella rappresentazione della posizione di un punto materiale (le stesse espressioni vettoriali valgono nel piano e nello spazio)

nel piano: 2 coordinate ≡ 1 vettore posizione

nello spazio: 3 coordinate ≡ 1 vettore posizione

Ci si svincola anche dal tipo di rappresentazione (cartesiana, polare, sferica).

Il vettore posizione ed il vettore spostamento

Traslazione del sistema di riferimento

Il cambiamento di sistema di riferimento può essere espresso in maniera molto concisa utilizzando il vettore posizione:

$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP} = x_P \hat{u}_x + y_P \hat{u}_y$ (in Oxy)

$\vec{r}'_P = \overrightarrow{O'P} = x'_P \hat{u}_{x'} + y'_P \hat{u}_{y'}$ (in $O'x'y'$)

$\vec{r}_{O'} = \overrightarrow{OO'} = x_{O'} \hat{u}_x + y_{O'} \hat{u}_y + z_{O'} \hat{u}_z$ (in Oxy)

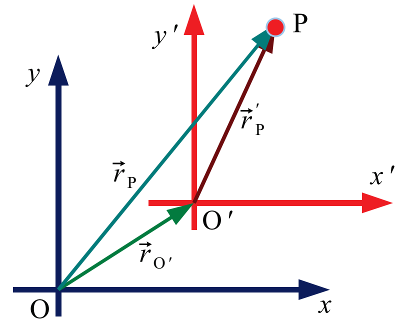

Fig.3

$$\vec{r}_P = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'_P \Rightarrow \boxed{\vec{r}'_P = \vec{r}_P - \vec{r}_{O'}}$$

$$\left(x'_P \hat{u}_{x'} + y'_P \hat{u}_{y'}\right) = \left(x_P \hat{u}_x + y_P \hat{u}_y\right) - \left(x_{O'} \hat{u}_x + y_{O'} \hat{u}_y\right)$$

Nota: In una <u>traslazione</u> i versori degli assi omologhi coincidono.

$$\hat{u}_{x'} = \hat{u}_x \, , \quad \hat{u}_{y'} = \hat{u}_y$$

$$\left(x'_P \hat{u}_x + y'_P \hat{u}_y\right) = \left(x_P \hat{u}_x + y_P \hat{u}_y\right) - \left(x_{O'} \hat{u}_x + y_{O'} \hat{u}_y\right)$$

$$x'_P \hat{u}_x + y'_P \hat{u}_y = \left(x_P - x_{O'}\right) \hat{u}_x + \left(y_P - y_{O'}\right) \hat{u}_y$$

$$\boxed{\begin{cases} x'_P = x_P - x_{O'} \\ y'_P = y_P - y_{O'} \end{cases}}$$

Risultato già ottenuto in 1.2.09

Nota: Le componenti del vettore $\vec{r}_{O'}$ definiscono la traslazione.

Il vettore posizione ed il vettore spostamento

Rototraslazione del sistema di riferimento (1/2)

Per una roto-traslazione l'espressione in forma vettoriale è la stessa, ma diventa più laborioso esplicitare le componenti:

$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP} = x_P \hat{u}_x + y_P \hat{u}_y$ (in Oxy)

$\vec{r}'_P = \overrightarrow{O'P} = x'_P \hat{u}_{x'} + y'_P \hat{u}_{y'}$ (in $O'x'y'$)

$\vec{r}_{O'} = \overrightarrow{OO'} = x_{O'} \hat{u}_x + y_{O'} \hat{u}_y + z_{O'} \hat{u}_z$ (in Oxy)

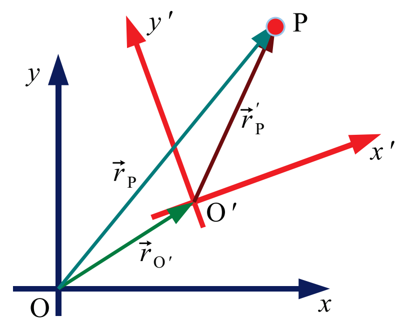

Fig.4

$$\vec{r}_P = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'_P \Rightarrow \boxed{\vec{r}'_P = \vec{r}_P - \vec{r}_{O'}}$$

$$\left(x'_P \hat{u}_{x'} + y'_P \hat{u}_{y'}\right) = \left(x_P \hat{u}_x + y_P \hat{u}_y\right) - \left(x_{O'} \hat{u}_x + y_{O'} \hat{u}_y\right)$$

Nota: In una <u>rotazione</u> i versori degli assi di un sistema di riferimento non sono paralleli a quelli dell'altro

per i dettagli di calcolo vedi dopo

$$\boxed{\begin{cases} x'_P = +\left(x_P - x_O\right)\cos\vartheta_O + \left(y_P - y_O\right)\sin\vartheta_O \\ y'_P = -\left(x_P - x_O\right)\sin\vartheta_O + \left(y_P - y_O\right)\cos\vartheta_O \end{cases}}$$

Più generale del risultato riportato in 1.2.09

Nota: Le componenti del vettore $\vec{r}_{O'}$ definiscono la traslazione.

La trasformazione dei versori degli assi definisce la rotazione.

Il vettore posizione ed il vettore spostamento

Rototraslazione del sistema di riferimento (2/2)

[Dettagli di calcolo]

Dettagli di calcolo:

$$\left(x'_P \hat{u}_{x'} + y'_P \hat{u}_{y'}\right) = \left(x_P \hat{u}_x + y_P \hat{u}_y\right) - \left(x_{O'} \hat{u}_x + y_{O'} \hat{u}_y\right)$$

$$x'_P \hat{u}_{x'} + y'_P \hat{u}_{y'} = \left(x_P - x_{O'}\right)\hat{u}_x + \left(y_P - y_{O'}\right)\hat{u}_y$$

$$\begin{aligned} x'_P \hat{u}_{x'} + y'_P \hat{u}_{y'} &\\ = \left(x_P - x_{O'}\right)&\left(+\cos\vartheta_O \hat{u}_{x'} - \sin\vartheta_O \hat{u}_{y'}\right)\\ + \left(y_P - y_{O'}\right)&\left(+\sin\vartheta_O \hat{u}_{x'} + \cos\vartheta_O \hat{u}_{y'}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'_P \hat{u}_{x'} + y'_P \hat{u}_{y'} &\\ = \left(+\left(x_P - x_O\right)\cos\vartheta_O + \left(y_P - y_O\right)\sin\vartheta_O\right)&\hat{u}_{x'}\\ + \left(-\left(x_P - x_O\right)\sin\vartheta_O + \left(y_P - y_O\right)\cos\vartheta_O\right)&\hat{u}_{y'}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{cases} x'_P = +\left(x_P - x_O\right)\cos\vartheta_O + \left(y_P - y_O\right)\sin\vartheta_O \\ y'_P = -\left(x_P - x_O\right)\sin\vartheta_O + \left(y_P - y_O\right)\cos\vartheta_O \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x'_P = +x_P \cos\vartheta_O + y_P \sin\vartheta_O \\ y'_P = -x_P \sin\vartheta_O + y_P \cos\vartheta_O \end{cases}$$

Per $x_{O'} = y_{O'} = 0$ si ha il risultato riportato in 1.2.09

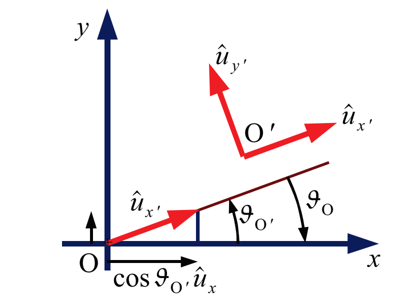

Fig.5

Nota: In una <u>rotazione</u> i versori degli assi, espressi in termini degli assi omologhi, sono:

$$\hat{u}_{x'} = +\cos\vartheta_{O'}\hat{u}_x + \sin\vartheta_{O'}\hat{u}_y$$
$$\hat{u}_{y'} = -\sin\vartheta_{O'}\hat{u}_x + \cos\vartheta_{O'}\hat{u}_y$$

e le inverse (l'angolo è l'opposto):

$$\hat{u}_x = +\cos\vartheta_O \hat{u}_{x'} - \sin\vartheta_O \hat{u}_{y'}$$
$$\hat{u}_y = +\sin\vartheta_O \hat{u}_{x'} + \cos\vartheta_O \hat{u}_{y'}$$

Il vettore posizione ed il vettore spostamento

Il vettore spostamento

<u>Il vettore spostamento</u>
è il vettore rappresentato dal segmento orientato da P1 a P2:

$$\overrightarrow{P_1 P_2}$$

la differenza tra i due vettori posizione:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Ovviamente vale anche

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$$

ed, in componenti

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta r_x = x_2 - x_1 \\ \Delta r_y = y_2 - y_1 \end{cases}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = x_1 + \Delta r_x \\ y_2 = y_1 + \Delta r_y \end{cases}$$

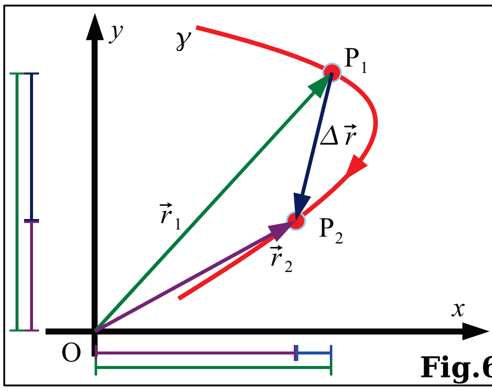

Fig.6

Attenzione:

Il vettore posizione dipende dal sistema di riferimento (dipende dalla posizione di O) mentre il vettore spostamento non dipende da sistema di riferimento

La rappresentazione in coordinate di entrambi i vettori dipende dal sistema di coordinate scelto.

Il vettore posizione ed il vettore spostamento

L'uso dei simboli "Δ" (delta) e "d" (de)

Uso corretto delle notazioni

vettore spostamento	limite per $P_2 \to P_1$
$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\overrightarrow{P_1P_2}$	$d\vec{r}$
modulo del vettore spostamento:	
$\lvert\Delta\vec{r}\rvert=\lvert\vec{r}_2-\vec{r}_1\rvert=\overline{P_1P_2}$	$\lvert d\vec{r}\rvert$
variazione della coordinata curvilinea	
$\Delta s=s_2-s_1$	ds
variazione del modulo del vettore posizione	
$\Delta\lvert\vec{r}\rvert=\lvert\vec{r}_2\rvert-\lvert\vec{r}_1\rvert=r_2-r_1=\Delta r$	dr
variazione della posizione angolare	
$\Delta\vartheta=\vartheta_2-\vartheta_1$	$d\vartheta$

Nota: delta viene usato anche per indicare una quantità piccola (non necessariamente una differenza)

$$|\Delta\vec{r}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$|\Delta\vec{r}|\neq\Delta|\vec{r}|$$

$$\Delta|\vec{r}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

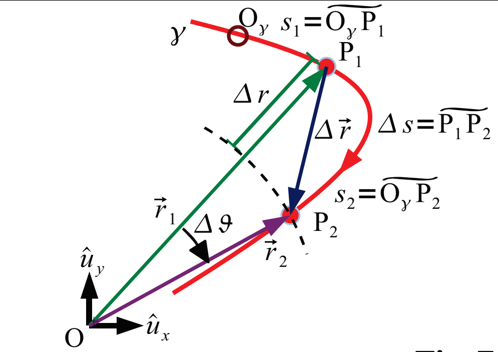

Fig.7

Attenzione all'uso dei somboli:

$\Delta\vec{r}, \Delta s$	grandezze piccole ma finite
$d\vec{r}, ds$	grandezze infinitesime

Attenzione ai segni:

In particolare

$\lvert\Delta\vec{r}\rvert$	non può essere negativo
$\Delta\lvert\vec{r}\rvert$	può essere anche negativo

Il vettore posizione ed il vettore spostamento

Versore tangente

Un tratto sufficientemente piccolo di qualunque traiettoria può essere approssimato con un tratto rettilineo avente la direzione del versore tangente.

$t_2 \to t_1 \qquad P_2 \to P_1$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta s\to 0\\ |\Delta\vec{r}|\to 0\end{array}\right\} \quad \text{ma} \quad \Delta s\to|\Delta\vec{r}| \quad \text{per cui} \quad \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s}\to 1$$

$P_1\to P_2 \Rightarrow \Delta\vec{r} \to$ direzione tangente

$P_1\to P_2 \Rightarrow \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \to$ vettore unitario (versore)

Versore tangente alla traiettoria $\quad \hat{u}_T=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\hat{u}_T \overset{\text{def}}{=} \dfrac{d\vec{r}}{ds}}$

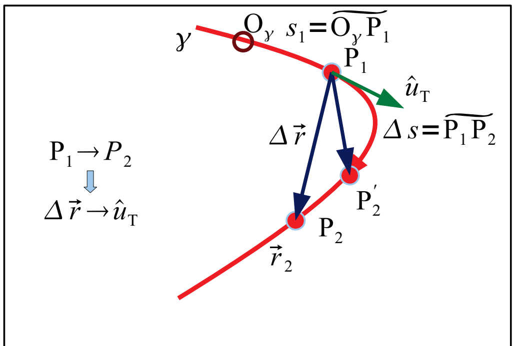

Fig.8

$\Delta\vec{r},\ \Delta s$	grandezze piccole ma finite	$\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$	rapporto incrementale
$d\vec{r},\ ds$	grandezze infinitesime	$\dfrac{d\vec{r}}{ds}$	derivata

Il vettore posizione ed il vettore spostamento

Versore normale, raggio di curvatura

Una migliore approssimazione si ottiene utilizzando un arco di circonferenza che individua il *versore normale* ed il *raggio di curvatura* della traiettoria.

Si dimostra che
$$\boxed{\frac{d\,\hat{u}_T}{d\,s}=\frac{1}{R_c}\,d\,\hat{u}_N}$$

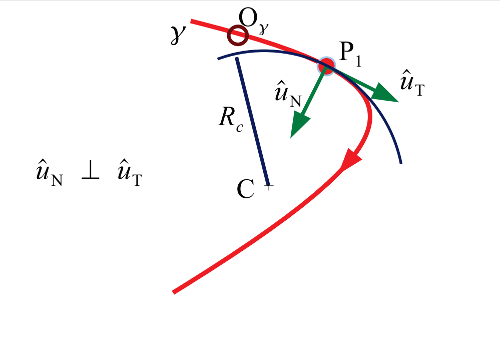

Fig.9

Il versore normale è diretto sempre verso la concavità della traiettoria
Una traiettoria rettilinea ha raggio di curvatura infinita.
Per una traiettoria piana, versore tangente e versore normale individuano un sistema di riferimento locale che sarà utile per descrivere alcune grandezze fisiche che definiremo tra breve (il vettore velocità ed il vettore accelerazione).

Il vettore posizione ed il vettore spostamento

Versore binormale, torsione

[Approfondimento]

Per una curva che non giace in un piano si definiscono anche la *torsione* (misura quanto la curva si discosta da una curva piana) ed il *versore binormale* (ortogonale tanto al versore tangente quanto al versore normale).

Formule di Frenet

$$\frac{d\,\hat{u}_T}{d\,s}=\frac{1}{R_c}\,d\,\hat{u}_N$$

$$\frac{d\,\hat{u}_N}{d\,s}=T_c\,\hat{u}_N-\frac{1}{R_c}\,d\,\hat{u}_N$$

$$\frac{d\,\hat{u}_B}{d\,s}=-T_c\,\hat{u}_B$$

Per una traiettoria arbitraria, versore tangente, versore normale e versore binormale costituiscono una terna levogira che individua un sistema di riferimento locale.

[pagina bianca inserita per impaginazione]

Sommario

[Sommario]

- Il *vettore posizione* (definito come il vettore applicato che va' dall'origine alla posizione del punto materiale) costituisce un modo molto comodo e sintetico di specificare la posizione di un punto materiale. Il *vettore spostamento* viene quindi definito come la differenza tra i vettori posizione del medesimo punto materiale, in due istanti differenti.
- La *legge oraria in forma vettoriale* è data da una sola funzione vettoriale ma, ovviamente, la semplificazione è solo formale.
- L'uso della notazione vettoriale è comunque utile in quanto semplifica alcuni calcoli: tanto una traslazione che una roto-traslazione del sistema di coordinate si scrivono in maniera molto semplice in forma vettoriale: una volta passati alle componenti il risultato è identico a quello ricavato per via geometrica.
- Solitamente si usa il simbolo Δ (delta) per indicare una quantità piccola ma finita (spesso la differenza tra due valori molto simili) ed il simbolo d (de) per indicare una quantità infinitesima. Prestare particolare attenzione alle grandezze vettoriali ed ai moduli.
- Una piccola parte di una traiettoria piana può essere approssimata con un tratto rettilineo o con un arco di circonferenza. Per far ciò servono il *versore tangente*, il *versore normale* ed il *raggio di curvatura*.
- Per una curva piana, versore tangente e versore normale individuano un *sistema di riferimento locale* che sarà utile per descrivere alcune grandezze fisiche che definiremo più avanti (il vettore velocità ed il vettore accelerazione).

Il vettore posizione ed il vettore spostamento

Compito proposto

[Compito proposto]

Quesito :

Sistema di riferimento locale per una curva piana

Esercizio :

Un punto materiale si muove su di una traiettoria circolare con centro nell'origine degli assi cartesiani ortogonali. Sapendo che la posizione agli istanti t_1 e t_2 è individuata dalle coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2), rispettivamente

con

x_1=-4.5m, y_1=6.0m, x_2=15.0m, y_1=8.0m

determinare

a) il vettore posizione all'istante t_1

a) il vettore posizione all'istante t_2

c) il vettore spostamento tra tali istanti, esprimendolo nella rappresentazione polare.

---------------- Materiale didattico reperibile su people.na.infn.it/bloisi ----------------

Il vettore posizione ed il vettore spostamento

-

[ ]

L'iscrizione al corso tramite il sito

www.campus.unina.it

è necessaria per sostenere le prove “in itinere”