

Cinematica del punto materiale

Il vettore velocità

Fisica 1
F.Bloisi

v11 2.2.--

[Inquadramento]

Cinematica del punto materiale

Il vettore posizione ed il

Vettore spostamento

Il vettore velocità

Il vettore accelerazione

Sistemi di riferimento in moto relativo

Dall'accelerazione alla legge oraria

Esempi ed applicazioni

Alcuni tipi di moto

Esercizi di cinematica

Il vettore velocità

Indice

Fisica 1
F.Bloisi

v11 2.2.00

[Indice]

Il concetto di “*velocità*”

Velocità scalare media e velocità scalare istantanea

Velocità media e velocità istantanea

Velocità e legge oraria

Velocità, velocità scalare e traiettoria

Velocità angolare media e velocità angolare istantanea

Velocità angolare, velocità scalare, velocità

[Approfondimento] [La velocità angolare come vettore](#)

Il vettore velocità

Il concetto di “*velocità*”

Nel linguaggio corrente il termine “velocità” è legato al concetto di “rapidità con cui varia” qualcosa.

In cinematica definiamo più di una grandezza fisica connessa con il concetto intuitivo di “*velocità*”:

- velocità scalare media
- velocità scalare (istantanea)
- (vettore) velocità media
- (vettore) velocità (istantanea)
- velocità angolare media
- velocità angolare (istantanea)
- vettore velocità angolare (istantanea)

di cui alcune scalari ed altre vettoriali.

La “rapidità di variazione” è connessa al concetto matematico di “derivata” e la “rapidità di variazione nel tempo” è connessa al concetto matematico di “derivata rispetto al tempo” o “derivata temporale”.

Poiché la grandezza più importante tra quelle elencate è il “vettore velocità istantanea”, quando in cinematica si usa il termine “velocità” ci si riferisce ad essa.

Delle grandezze vettoriali possiamo poi, all'occorrenza, considerare anche il modulo e le componenti.

Il vettore velocità

Velocità scalare media e velocità scalare istantanea

velocità scalare media

$$v_{s \text{ media}} = \langle v_s \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

$s(t)$ coordinata curvilinea

- la velocità scalare media è il rapporto tra la lunghezza della traiettoria percorsa e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerla

velocità scalare (istantanea)

$$v_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

la velocità scalare è la derivata rispetto al tempo della coordinata curvilinea

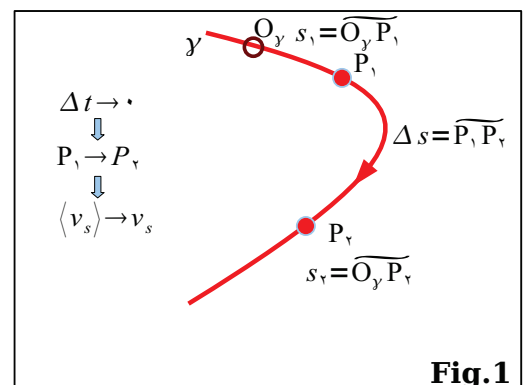


Fig.1

Importante: La velocità scalare è una grandezza scalare (positiva o negativa).

Il vettore velocità

Significato fisico e geometrico di derivata

$f(x)$: f è funzione della variabile x
 $x, x+\Delta x$: due valori della variabile x
 $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$: variazione di f
 $\frac{\Delta f}{\Delta x}$: rapporto incrementale

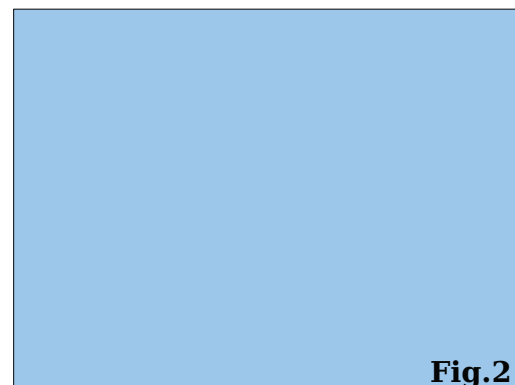


Fig.2

$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow x+\Delta x \rightarrow x \Rightarrow \Delta f \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow ?$
 (retta che interseca la curva $f(x)$) \rightarrow (retta tangente alla curva $f(x)$) **limite**

$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$: derivata della funzione f rispetto alla variabile x

$\frac{df}{dx}$ $\frac{d}{dx} f$ $f'(x)$ $\frac{df}{dt}$ $\frac{d}{dt} f$ $\dot{f}(x)$

Nota: Dal punto di vista fisico l'operazione di limite termina quando la variazione del risultato è al di sotto della precisione voluta.

Il vettore velocità

Derivata di alcune funzioni elementari

[Consultazione]

Funzione	Derivata
$k f(x)$	$k f'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) g(x)$	$f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$
$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) g'(x)$

Funzione	Derivata
cost	0
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
x^a	$a x^{a-1}$
$\exp(ax)$ e^{ax}	$a e^{ax}$
$\ln x$	$1/x$
b^{ax}	$a \ln b b^{ax}$
$\log_b x$	$(x \log_b e)^{-1}$

Il vettore velocità

Velocità media e velocità istantanea

(vettore) velocità media

$$\vec{v}_{\text{media}} = \langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

- la velocità media è il rapporto tra il vettore spostamento ed il corrispondente intervallo di tempo

(vettore) velocità (istantanea)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- la velocità istantanea è la derivata rispetto al tempo del vettore posizione (ossia della legge oraria espressa in forma vettoriale)

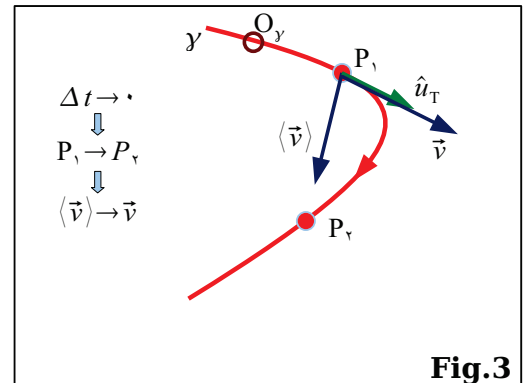


Fig.3

Importante: La velocità è una grandezza vettoriale.

Il vettore velocità

Velocità e legge oraria (1/2)

Le componenti cartesiane della velocità sono le derivate della legge oraria espressa in coordinate cartesiane ortogonali

$$\vec{r}(t) \iff \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \iff \vec{r}(t) = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y + z(t)\hat{u}_z$$

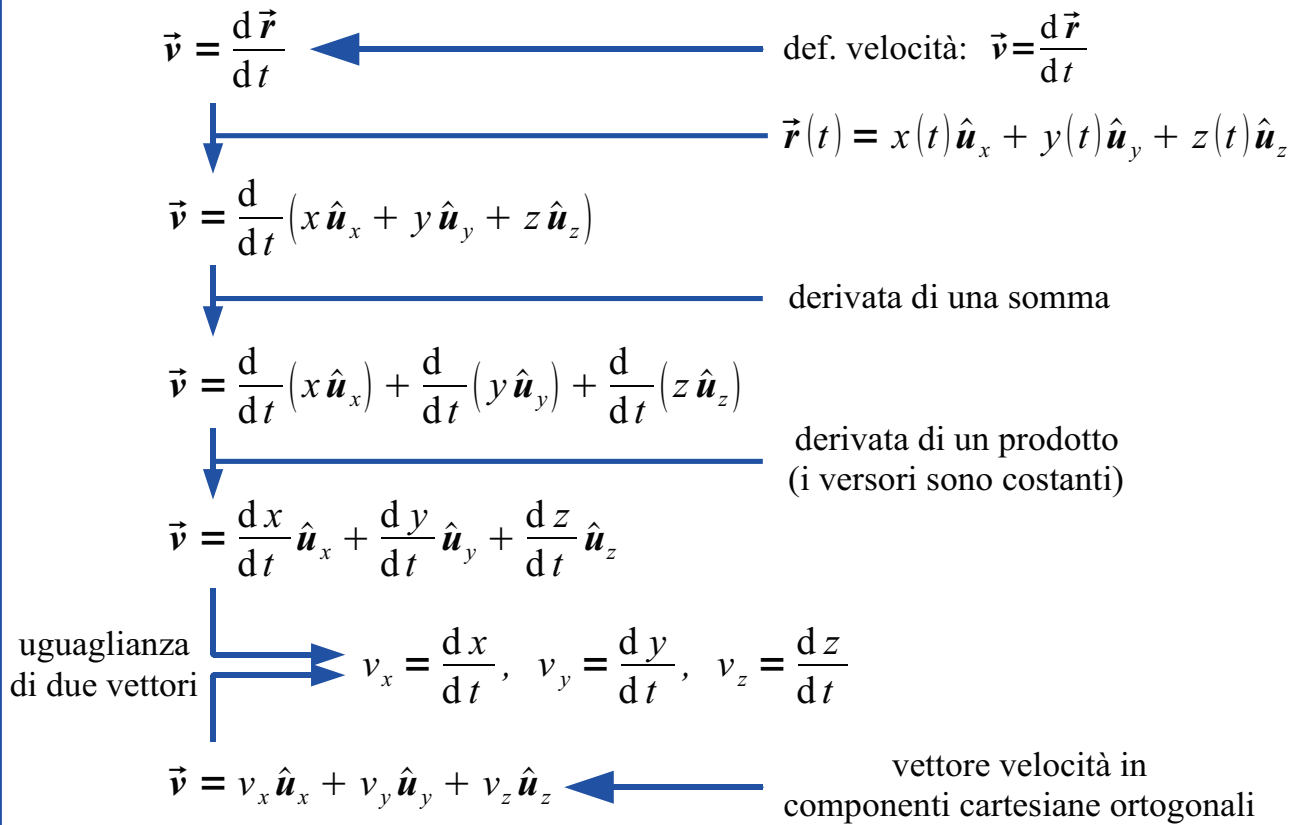
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \iff \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases} \iff \vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz}{dt}\hat{u}_z$$

Importante: Fare la derivata di una funzione vettoriale significa fare la derivata di tre (o due, se nel piano) funzioni scalari.

Il vettore velocità

Velocità e legge oraria (2/2)

[Dettagli di calcolo]



Il vettore velocità

Velocità, velocità scalare e traiettoria (1/2)

È facile dimostrare che

$\vec{v} = v_s \hat{u}_T$ →

Importante: La velocità è sempre tangente alla traiettoria.

mentre, come per qualunque vettore, si può scrivere

$\vec{v} = v \hat{v}$ → $v = |v_s|$ →

Importante: Il modulo della velocità è pari al valore assoluto della velocità scalare.

Si noti che

- v modulo della velocità è sempre positivo
- v_s velocità scalare può essere positiva o negativa
- \hat{v} versore della velocità ha la direzione ed il verso della velocità
- \hat{u}_T versore tangente alla traiettoria ha la direzione della velocità ma può avere verso concorde o opposto

Il vettore velocità

Velocità, velocità scalare e traiettoria (2/2)

[Dettagli di calcolo]

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \leftarrow \text{def. velocità: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\downarrow \text{ moltiplicando e dividendo per } ds \text{ (cambiamento di variabile)}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\downarrow \text{ def. velocità scalare: } v_s = \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} v_s$$

$$\downarrow \text{ def. versore tangente: } \hat{u}_T = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$\vec{v} = \hat{u}_T v_s$$

$$\downarrow \text{ passaggi algebrici (proprietà commutativa)}$$

$$\vec{v} = v_s \hat{u}_T$$

Il vettore velocità

Velocità angolare media e velocità angolare istantanea

In un moto circolare*, se si esprime la legge oraria in coordinate polari

$$\begin{cases} r = \text{cost} = R \\ \vartheta = \vartheta(t) \end{cases}$$

è utile definire la velocità angolare media

$$\omega_{\text{media}} = \langle \omega \rangle = \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} \quad \Delta \vartheta = \vartheta(t + \Delta t) - \vartheta(t)$$

e la velocità angolare (istantanea)

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \frac{d\vartheta}{dt}$$

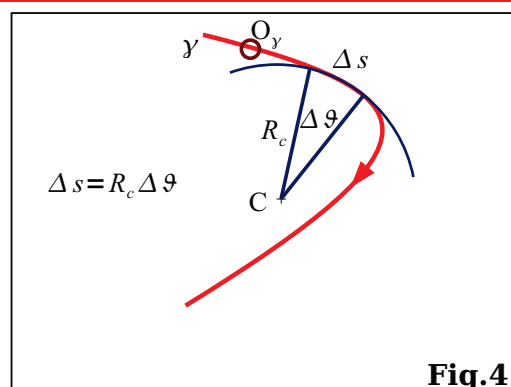


Fig.4

Importante: La velocità angolare è una grandezza scalare (positiva o negativa).

Nota: un tratto sufficientemente piccolo di qualunque traiettoria può essere approssimato con un arco di circonferenza (raggio della circonferenza = raggio di curvatura della traiettoria).

Il vettore velocità

Velocità angolare, velocità scalare, velocità

In un moto circolare^{*}, passando dalle coordinate polari alla coordinata curvilinea

$$s(t) = R_c \vartheta(t)$$

e, derivando rispetto al tempo,

$$v_s(t) = R_c \omega(t) \quad v(t) = R_c |\omega(t)|$$

$$\omega(t) = \frac{v_s(t)}{R_c} = \pm \frac{v(t)}{R_c}$$

Nota: un tratto sufficientemente piccolo di qualunque traiettoria può essere approssimato con un arco di circonferenza (raggio della circonferenza = raggio di curvatura della traiettoria).

Il vettore velocità

La velocità angolare come vettore

La velocità angolare è essenzialmente una grandezza scalare, ma è possibile associare ad essa una direzione ed un verso: in tal modo è possibile definire il vettore velocità angolare

$$\vec{\omega} = \frac{d\vartheta}{dt} \hat{u}_a$$

Versore \hat{u}_a

- Direzione: individuata dall'asse di rotazione (ortogonale al piano in cui avviene il moto)
- Verso: quello da cui si vede la rotazione in verso antiorario

Importante: Il vettore velocità angolare è una grandezza vettoriale.

È possibile dimostrare che tra il vettore velocità angolare ed il vettore velocità vale la relazione vettoriale

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}_c$$

dove

$$\vec{R}_c = R_c \hat{u}_r$$

Versore \hat{u}_r

- direzione: radiale (dall'asse di rotazione alla posizione del punto)
- verso: dal centro verso l'esterno

Il vettore velocità

Grandezze fisiche, dimensioni, unità di misura

[Consultazione]

Grandezza fisica	Tipo	Dimensioni	Unità SI
Velocità scalare media	scalare	$L T^{-1}$	m/s
Velocità scalare	scalare	$L T^{-1}$	m/s
Velocità media	vettore	$L T^{-1}$	m/s
Velocità	vettore	$L T^{-1}$	m/s
Velocità angolare media	scalare	T^{-1}	rad/s
Velocità angolare	scalare	T^{-1}	rad/s
Vettore velocità angolare	vettore	T^{-1}	rad/s

Il vettore velocità

Sommario

[Sommario]

- Il concetto intuitivo di “velocità” di un oggetto, ossia di “rapidità con cui varia la posizione” di un oggetto può essere espressa in maniera formale tramite diverse grandezze fisiche (alcune scalari, altre vettoriali) che vengono definite in cinematica.
 - *velocità scalare media* (grandezza scalare, in m/s)
 - *velocità scalare* (grandezza scalare, in m/s)
 - *velocità media* (grandezza vettoriale, in m/s)
 - *velocità* (grandezza vettoriale, in m/s)
 - *velocità angolare media* (grandezza scalare, in rad/s)
 - *velocità angolare* (grandezza scalare, in rad/s)
 - *vettore velocità angolare* (grandezza vettoriale, in rad/s)
- È importante ricordare che la velocità
 - è una grandezza vettoriale
 - è sempre tangente alla traiettoria
- È bene tener presente che la grandezza fisica che più si avvicina all'uso che si fa' nel linguaggio corrente del termine “velocità” (ad esempio quella indicata dal tachimetro di un'automobile) non è quella che abbiamo chiamato velocità, ma quella che abbiamo chiamato velocità scalare.
- Nel moto circolare (ma un tratto piccolo di qualunque traiettoria può essere approssimato con un arco di circonferenza) è utile considerare la velocità angolare che è legata alla velocità scalare dal raggio di curvatura.

Il vettore velocità

Compito proposto

Fisica 1
F.Bloisi

v11 2.2.13

[Compito proposto]

- **Quesito a risposta aperta** :

Grandezze fisiche legate al concetto intuitivo di “velocità”

- **Esercizio breve** :

Un punto materiale si muove su di una traiettoria circolare con centro nell'origine degli assi cartesiani ortogonali e raggio R . Sapendo che la legge oraria è data da $\vartheta(t) = k_0 + k_1 t$

con

$$R=145\text{cm}, \quad k_0=15.0^\circ, \quad k_1=360^\circ/\text{min}$$

determinare

- a) la velocità scalare
- b) la velocità angolare
- c) la velocità

Il vettore velocità

Fisica 1
F.Bloisi

v11 2.2.14

[



L'iscrizione al corso tramite il sito

www.campus.unina.it

è necessaria per sostenere
le prove “in itinere”



[

Il vettore velocità

Risposta al quesito proposto

Fisica 1
F.Bloisi

v11 2.2.15

[Compito proposto – svolgimento]

Quesito a risposta aperta :

Grandezze fisiche legate al concetto intuitivo di “velocità”

- **Risposta** (ovviamente una delle tante possibili):

In cinematica si definiscono diverse grandezze fisiche legate al concetto intuitivo di velocità (per semplicità consideriamo solo i valori istantanei e non i valori medi): la velocità scalare v_s (derivata della coordinata curvilinea), la velocità \vec{v} (derivata della legge oraria in forma vettoriale), la velocità angolare ω (derivata della componente angolare della legge oraria in coordinate polari).

La velocità è una grandezza vettoriale sempre tangente alla traiettoria, mentre le altre sono grandezze scalari. La velocità e la velocità scalare hanno le dimensioni di una lunghezza diviso un tempo e, nel SI si misurano in m/s, mentre la velocità angolare ha le dimensioni di un tempo alla -1 e, nel SI, si misura in rad/s.

Tra le varie grandezze sussistono le relazioni

$$\vec{v} = v_s \hat{u}_T \quad v_s = \omega R_c$$

dove \hat{u}_T è il versore tangente alla traiettoria ed R_c il raggio di curvatura della traiettoria.

Il vettore velocità

Risultato dell'esercizio proposto

Fisica 1
F.Bloisi

v11 2.2.16

[Compito proposto – svolgimento]

Esercizio breve :

Un punto materiale si muove su di una traiettoria circolare con centro nell'origine degli assi cartesiani ortogonali e raggio R . Sapendo che la legge oraria è data da $\vartheta(t) = k_0 + k_1 t$

con

$$R=145\text{cm}, \quad k_0=15.0^\circ, \quad k_1=360^\circ/\text{min}$$

determinare

- la velocità scalare
- la velocità angolare
- la velocità

- **Risultato** (lo svolgimento è nella sezione “Esercizi introduttivi”):

-
-
-

Il vettore velocità

-

Fisica 1
F.Bloisi

v11 2.2.17

]

[

Il vettore velocità

Quesiti

Fisica 1
F.Bloisi

v11 2.2.18

[Quesiti]

- Q1.400 Grandezze fisiche legate al concetto di “*velocità*”
- Q1.401 Velocità scalare media ed istantanea
- Q1.402 Velocità media ed istantanea
- Q1.403 Velocità angolare media ed istantanea
- Q1.404 Velocità e legge oraria
- Q1.405 Velocità e traiettoria
- Q1.406 Velocità e velocità scalare
- Q1.407 Velocità angolare e velocità scalare