Cinematica del punto materiale
Alcuni tipi di moto

[Inquadramento]

Alcuni tipi di moto
Indice

[Indice]

Lo studente si eserciti a rappresentare graficamente sia la traiettoria che le grandezze incontrate (coordinate, velocità, accelerazione) in funzione del tempo.

Importante: Le trasparenze che seguono riportano, in maniera sintetica, solo le "formule" della legge oraria, della velocità e dell'accelerazione di alcuni tipi di moto; le deduzioni di tali formule (che lo studente deve comunque essere in grado di ricavare) vengono presentate durante la lezione.

Alcuni tipi di moto

Moto su traiettoria rettilinea

Fisica 1
F.Bloisi

v11 2A1.01

[Applicazioni]

1D/1GdL

Traiettoria

Retta $\overrightarrow{\hat{\boldsymbol{u}}_T = \text{cost.}}$

Sistema di coordinate

- coordinata curvilinea: s
- coordinate cartesiane ortogonali con l'asse x coincidente con la traiettoria: $\hat{\boldsymbol{u}}_x = \hat{\boldsymbol{u}}_T$

Legge oraria

$$s(t) \qquad \vec{\boldsymbol{r}}(t) = s(t)\hat{\boldsymbol{u}}_T = x(t)\hat{\boldsymbol{u}}_x$$

Velocità

$$v_s(t) = \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t} \qquad \vec{\boldsymbol{v}}(t) = v_s(t)\hat{\boldsymbol{u}}_T = v_x(t)\hat{\boldsymbol{u}}_x$$

Accelerazione

$$a_T(t) = \frac{\mathrm{d}\,v_s}{\mathrm{d}\,t} \qquad \vec{\boldsymbol{a}}(t) = a_T(t)\hat{\boldsymbol{u}}_T = a_x(t)\hat{\boldsymbol{u}}_x$$

$$a_N(t) = 0$$

L'unica informazione di cui disponiamo è che la traiettoria è una retta.

Attenzione:

Il modulo del vettore posizione, pari al valore assoluto della coordinata scalare, fornisce informazioni incomplete!

$$r(t) = |\vec{\boldsymbol{r}}(t)| = |s(t)| = |x(t)|$$

Lo stesso vale per il modulo della velocità

$$v(t) = |\vec{\boldsymbol{v}}(t)| = |v_s(t)| = |v_x(t)|$$

e per il modulo dell'accelerazione

$$a(t) = |\vec{\boldsymbol{a}}(t)| = |a_T(t)| = |a_x(t)|$$

Alcuni tipi di moto

Moto rettilineo uniforme **(1/2)**

Fisica 1
F.Bloisi

v11 2A1.02$_1$

[Applicazioni]

1D/1GdL

Traiettoria

Retta $\overrightarrow{\hat{\boldsymbol{u}}_T = \text{cost.}}$, $v_s = \text{cost.} = v_0$

Sistema di coordinate

- coordinata curvilinea: s
- coordinate cartesiane ortogonali con l'asse x coincidente con la traiettoria: $\hat{\boldsymbol{u}}_x = \hat{\boldsymbol{u}}_T$

Legge oraria

$$s(t) = s_0 + v_0 t$$

Velocità

$$v_s(t) = v_0$$

Accelerazione

$$a_T(t) = 0$$

$$a_N(t) = 0$$

È un moto su traiettoria rettilinea in cui la velocità scalare è costante.

v_0	caratteristica del moto
s_0	costante di integrazione

Per ricavare la legge oraria si utilizza il fatto che la velocità istantanea, essendo costante, è uguale alla velocità media:

$$v_s(t) = \langle v_s \rangle$$

Alcuni tipi di moto
Moto rettilineo uniforme **(2/2)**

[Dettagli di calcolo]

$v_s(t)=\langle v_s\rangle$

↓ la velocità scalare è costante: $v_s(t)=v_0$

$v_0=\langle v_s\rangle$

↓ def. di velocità scalare media: $\langle v_s\rangle=\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$

$v_0=\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$

↓ poniamo: $t_2=t\,,\;\; t_1=0$

$v_0=\dfrac{s(t)-s(0)}{t-0}$

↓ poniamo: $s(0)=s_0$

$v_0=\dfrac{s(t)-s_0}{t}$

↓ (passaggi algebrici)

$v_0 t=s(t)-s_0$

↓ (passaggi algebrici)

$s(t)=s_0+v_0 t$

Alcuni tipi di moto
Moto rettilineo uniformemente accelerato **(1/3)**

[Applicazioni]

1D/1GdL

Traiettoria

Retta $\vec{\hat{u}_T=\mathbf{cost.}}\,,\;\; a_T=\text{cost.}=a_0$

Sistema di coordinate

- coordinata curvilinea: s
- coordinate cartesiane ortogonali con l'asse x coincidente con la traiettoria: $\hat{u}_x=\hat{u}_T$

Legge oraria

$$s(t)=s_0+v_0 t+\frac{1}{2}a_0 t^2$$

Velocità

$$v_s(t)=v_0+a_0 t$$

Accelerazione

$$a_T(t)=a_0$$
$$a_N(t)=0$$

Il "*moto rettilineo uniformemente accelerato*" è detto anche "*moto di caduta di un grave, in 1D*".

È un moto su traiettoria rettilinea in cui l'accelerazione tangenziale è costante.

a_0	caratteristica del moto
$s_0,\ v_0$	costanti di integrazione

Per ricavare la velocità si utilizza il fatto che l'accelerazione istantanea, essendo costante, è uguale all'accelerazione media:

$$a_T(t)=\langle a_T\rangle$$

Per ricavare la legge oraria si utilizza il fatto che, poiché la velocità istantanea cresce in maniera uniforme, la velocità media in un intervallo è uguale alla media aritmetica tra il valore iniziale ed il valore finale:

$$\langle v_s\rangle=\frac{v_{s1}+v_{s2}}{2}$$

Alcuni tipi di moto

Moto rettilineo uniformemente accelerato **(2/3)**

[Dettagli di calcolo]

$$\langle v_s \rangle = \frac{v_s(t_1)+v_s(t_2)}{2}$$

def. di velocità scalare media: $\langle v_s \rangle = \dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{v_s(t_1)+v_s(t_2)}{2}$$

passaggi algebrici: $-v_s(t_1)+v_s(t_1)$

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{v_s(t_1)+v_s(t_2)-v_s(t_1)+v_s(t_1)}{2}$$

passaggi algebrici

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{2\,v_s(t_1)}{2} + \frac{v_s(t_2)-v_s(t_1)}{2}$$

passaggi algebrici: $(t_2-t_1)\{(t_2-t_1)¿$

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = v_s(t_1) + \frac{1}{2}\frac{v_s(t_2)-v_s(t_1)}{t_2-t_1}(t_2-t_1)$$

def. di accelerazione scalare media: $\langle a_s \rangle = \dfrac{v_s(t_2)-v_s(t_1)}{t_2-t_1}$

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = v_s(t_1) + \frac{1}{2}\langle a_s \rangle (t_2-t_1)$$

l'accelerazione scalare è costante: $a_s(t)=a_0$

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = v_s(t_1) + \frac{1}{2} a_0 (t_2-t_1)$$

Alcuni tipi di moto

Moto rettilineo uniformemente accelerato **(3/3)**

[Dettagli di calcolo]

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = v_s(t_1) + \frac{1}{2} a_0 (t_2-t_1)$$

poniamo: $t_2=t\,,\ \ t_1=0$

$$\frac{s(t)-s(0)}{t-0} = v_s(0) + \frac{1}{2} a_0 (t-0)$$

poniamo: $s(0)=s_{0,}\ \ v_s(0)=v_0$

$$\frac{s(t)-s_0}{t} = v_0 + \frac{1}{2} a_0 t$$

passaggi algebrici

$$s(t)-s_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

passaggi algebrici

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

Alcuni tipi di moto

"Caduta di un grave" in 1D

[Applicazioni]

1D/1GdL

Sperimentalmente si osserva (esperimenti di Galileo sulla caduta dei gravi) che qualunque oggetto "lasciato libero" in prossimità della superficie della Terra, se è possibile trascurare le interazioni con l'aria, "cade" con moto rettilineo con accelerazione costante $g_n = 9.80665\ \mathrm{m/s^2}$.

Ciò è vero, più in generale purché l'oggetto sia lanciato con velocità verticale (la direzione "verticale" è quella individuata dal *filo a piombo*).

Attenzione:

- È incluso il caso in cui la velocità iniziale è diretta verso l'alto (ad es. un pallone lanciato verso l'alto).
- Non è incluso il caso in cui l'interazione con l'aria non è trascurabile (ad es. un paracadutista).
- Non è incluso il caso in cui ci sono rotazioni (ad es. un pallone lanciato con "effetto").

Nota: a questo punto del corso il valore dell'accelerazione di gravità deve essere considerato un dato sperimentale (o meglio empirico), nel seguito sarà ricavato.

Alcuni tipi di moto

Moto rettilineo smorzato **(1/2)**

[Applicazioni]

1D/1GdL

Traiettoria

Retta $\hat{\boldsymbol{u}}_T = \overrightarrow{\textbf{cost.}}$, $v_s \to v_{\lim}$ con costante di tempo τ

Sistema di coordinate

- coordinata curvilinea: s
- coordinate cartesiane ortogonali con l'asse x coincidente con la traiettoria: $\hat{\boldsymbol{u}}_x = \hat{\boldsymbol{u}}_T$

Legge oraria

$$s(t) = s_0 + v_{\lim} t - \tau (v_0 - v_{\lim}) \exp(-t/\tau)$$

Velocità

$$v_s(t) = v_{\lim} + (v_0 - v_{\lim}) \exp(-t/\tau)$$

Lo studente verifichi che $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_s(t)$

Accelerazione

$$a_T(t) = -\frac{v_0 - v_{\lim}}{\tau} \exp(-t/\tau)$$

$$a_N(t) = 0$$

Lo studente verifichi che $\dfrac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} = a_T(t)$

È un moto su traiettoria rettilinea in cui la velocità scalare ha andamento esponenziale.

τ, v_{lim} caratteristiche del moto

s_0, v_0 costanti di integrazione

In questo caso è difficile ricavare la legge oraria senza far uso di integrali. È comunque possibile verificare le espressioni riportate tramite derivazione.

Dal confronto delle espressioni dell'accelerazione e della velocità si ricava facilmente che l'accelerazione è, a parte un termine costante, proporzionale alla velocità (con coeff. negativo):

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{v_{\lim}}{\tau}}$$

Questa relazione può essere presa come definizione di moto smorzato.

Alcuni tipi di moto

Moto rettilineo smorzato **(2/2)**

[Dettagli di calcolo]

$$a_T(t)=-\frac{v_0-v_{\lim}}{\tau}\exp(-t/\tau)$$

$$v_s(t)=v_{\lim}+(v_0-v_{\lim})\exp(-t/\tau)$$

$$\exp(-t/\tau)=\frac{v_s(t)-v_{\lim}}{v_0-v_{\lim}}$$

$$a_T(t)=-\frac{v_0-v_{\lim}}{\tau}\frac{v_s(t)-v_{\lim}}{v_0-v_{\lim}}$$

passaggi algebrici

$$a_T(t)=-\frac{v_s(t)-v_{\lim}}{\tau}$$

passaggi algebrici

$$a_T(t)=-\frac{1}{\tau}v_s(t)+\frac{v_{\lim}}{\tau}$$

definizioni di a_T e di v_s

$$\frac{d^2 s}{d t^2}=-\frac{1}{\tau}\frac{d s}{d t}+\frac{v_{\lim}}{\tau}$$

Nota: $\tau>0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{\tau}<0$

Alcuni tipi di moto

Moto su traiettoria circolare **(1/4)**

[Applicazioni]

2D/1GdL

Traiettoria

Circonferenza (centro C, raggio R, asse $\hat{\boldsymbol{u}}_c=\overrightarrow{\text{cost.}}$)

Sistema di coordinate

- coordinata curvilinea s
- coordinate polari con l'origine O nel centro C della circonferenza che costituisce la traiettoria

Legge oraria

$$s(t) \qquad \begin{cases}\vartheta(t)=\frac{1}{R}s(t)\\ r(t)=R=\text{cost.}\end{cases}$$

Velocità

$$v_s(t)=\frac{d s}{d t} \qquad \vec{\omega}(t)=\frac{1}{R}v_s(t)\hat{\boldsymbol{u}}_c \text{ con } \hat{\boldsymbol{u}}_c=\hat{\boldsymbol{u}}_T\times\hat{\boldsymbol{u}}_N$$

Accelerazione

$$a_T(t)=\frac{d v_s}{d t}$$

$$a_N(t)=\frac{v_s^2}{R}$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d v_s}{d t}\hat{\boldsymbol{u}}_T+\frac{v_s^2}{R}\hat{\boldsymbol{u}}_N$$

L'unica informazione di cui disponiamo è che la traiettoria è una circonferenza.

Attenzione: il versore tangente (ed il versore normale) non sono costanti, ma dipendono dalla posizione del punto sulla traiettoria, ossia dal valore di ϑ.

Poiché

$$\vec{r}(\vartheta)=R\cos\vartheta\,\hat{\boldsymbol{u}}_x+R\sin\vartheta\,\hat{\boldsymbol{u}}_y$$

dalle definizioni date per i versori tengente e normale, o con considerazioni geometriche, si ricava

$$\hat{\boldsymbol{u}}_T(\vartheta)=-\sin\vartheta\,\hat{\boldsymbol{u}}_x+\cos\vartheta\,\hat{\boldsymbol{u}}_y$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_N(\vartheta)=-\cos\vartheta\,\hat{\boldsymbol{u}}_x-\sin\vartheta\,\hat{\boldsymbol{u}}_y$$

ovvero

$$\hat{\boldsymbol{u}}_T(s)=-\sin\frac{s}{R}\hat{\boldsymbol{u}}_x+\cos\frac{s}{R}\hat{\boldsymbol{u}}_y$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_N(s)=-\cos\frac{s}{R}\hat{\boldsymbol{u}}_x-\sin\frac{s}{R}\hat{\boldsymbol{u}}_y$$

Alcuni tipi di moto
Moto su traiettoria circolare **(2/4)**

[Dettagli di calcolo]

$$\hat{u}_T = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

definizione di versore tangente

cambiamento di variabile: $s \rightarrow \vartheta = \frac{s}{R}$

$$\hat{u}_T = \frac{d\vec{r}}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{ds}$$

$\vec{r}(\vartheta) = R\cos\vartheta\,\hat{u}_x + R\sin\vartheta\,\hat{u}_y$

$$\hat{u}_T = \left(-R\sin\vartheta\,\hat{u}_x + R\cos\vartheta\,\hat{u}_y\right)\frac{d\vartheta}{ds}$$

$$\hat{u}_T = \left(-R\sin\vartheta\,\hat{u}_x + R\cos\vartheta\,\hat{u}_y\right)\frac{1}{R}$$

(passaggi algebrici)

$$\hat{u}_T = -\sin\vartheta\,\hat{u}_x + \cos\vartheta\,\hat{u}_y$$

Alcuni tipi di moto
Moto su traiettoria circolare **(3/4)**

[Dettagli di calcolo]

Poiché in una circonferenza il raggio (e, se O=C, il vettore posizione) è ortogonale alla circonferenza, il versore normale, che è orientato verso il centro della circonferenza è pari a $-\hat{r}$.

$$\hat{u}_N = -\hat{r}$$

definizione di versore

$$\hat{u}_N = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$\vec{r}(\vartheta) = R\cos\vartheta\,\hat{u}_x + R\sin\vartheta\,\hat{u}_y$

$$\hat{u}_T = -\frac{R\cos\vartheta\,\hat{u}_x + R\sin\vartheta\,\hat{u}_y}{|\vec{r}|}$$

$|\vec{r}(\vartheta)| = R$ (raggio della circonferenza)

$$\hat{u}_T = -\frac{R\cos\vartheta\,\hat{u}_x + R\sin\vartheta\,\hat{u}_y}{R}$$

(passaggi algebrici)

$$\hat{u}_N = -\cos\vartheta\,\hat{u}_x - \sin\vartheta\,\hat{u}_y$$

Alcuni tipi di moto

Moto su traiettoria circolare **(4/4)**

[Dettagli di calcolo]

La velocità angolare può essere vista come un vettore che ha direzione ortogonale al piano in cui avviene la rotazione e verso tale che la rotazione sia "vista" come antioraria.

$$\omega(t)=\frac{d\vartheta}{dt}$$

legge oraria (in coord. polari): $\vartheta(t)=\frac{1}{R}s(t)$

$$\omega(t)=\frac{1}{R}\frac{ds}{dt}$$

definizione di velocità scalare

$$\omega(t)=\frac{1}{R}v_s(t)$$

$\hat{\boldsymbol{u}}_T$ ed $\hat{\boldsymbol{u}}_N$ sono due versori nel piano della rorazione quindi $\hat{\boldsymbol{u}}_T\times\hat{\boldsymbol{u}}_N$ è un versore ortogonale a tale piano.

$$\vec{\omega}(t)=\frac{1}{R}v_s(t)\hat{\boldsymbol{u}}_c \quad \text{con} \quad \hat{\boldsymbol{u}}_c=\hat{\boldsymbol{u}}_T\times\hat{\boldsymbol{u}}_N$$

Lo studente verifichi che il versore

$$\hat{\boldsymbol{u}}_T\times\hat{\boldsymbol{u}}_N$$

ha il verso richiesto.

Alcuni tipi di moto

Moto circolare uniforme

[Applicazioni]

2D/1GdL **periodico**

Traiettoria

Circonferenza (centro C, raggio R, asse $\hat{\boldsymbol{u}}_c=\overrightarrow{\text{cost.}}$)

Sistema di coordinate

- coordinata curvilinea s
- coordinate polari con l'origine O nel centro C della circonferenza che costituisce la traiettoria

Legge oraria

$$s(t)=s_0+v_0 t \qquad \begin{cases}\vartheta(t)=\vartheta_0+\omega_0 t\\ r(t)=R=\text{cost.}\end{cases}$$

$$\vartheta+2n\pi\equiv\vartheta$$
$$\downarrow$$
$$\vartheta(t+T)=\vartheta(t)$$
con
$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

Velocità

$$v_s(t)=v_0 \qquad \vec{\omega}(t)=\omega_0\hat{\boldsymbol{u}}_c=\frac{1}{R}v_0\hat{\boldsymbol{u}}_c$$

Accelerazione

$$a_T(t)=0$$
$$a_N(t)=\frac{1}{R}v_0^2 \qquad \vec{\boldsymbol{a}}(t)=\omega_0^2 R\hat{\boldsymbol{u}}_N=\frac{1}{R}v_0^2\hat{\boldsymbol{u}}_N$$

È un moto su traiettoria circolare in cui la velocità scalare (o la velocità angolare) è costante.

R, v_0 caratteristiche del moto

s_0 costante di integrazione

L'espressione della legge oraria in coordinata curvilinea è identica a quella del moto rettilineo uniforme.

È immediato esprimere la legge oraria in coordinate polari.

L'accelerazione è costantemente orientata verso il centro della circonferenza (accelerazione centripeta).

In coordinate cartesiane:

$$\begin{cases}x(t)=R\cos(\vartheta_0+\omega_0 t)\\ y(t)=R\sin(\vartheta_0+\omega_0 t)\end{cases}$$

Alcuni tipi di moto

Moto circolare uniformemente accelerato

[Applicazioni]

2D/1GdL

Traiettoria

Circonferenza (centro C, raggio R, asse $\hat{\boldsymbol{u}}_c=\overrightarrow{\text{cost.}}$)

Sistema di coordinate

- coordinata curvilinea s
- coordinate polari con l'origine O nel centro C della circonferenza che costituisce la traiettoria

Legge oraria

$$s(t)=s_0+v_0 t+\frac{1}{2}a_0 t^2$$

$$\begin{cases} \vartheta(t)=\vartheta_0+\omega_0 t+\dfrac{1}{2\mathrm{R}}a_0 t^2 \\ r(t)=R=\text{cost.} \end{cases}$$

Velocità

$$v_s(t)=v_0+a_0 t$$

$$\vec{\omega}(t)=\omega_0+\frac{1}{R}a_0 t\,\hat{\boldsymbol{u}}_c$$

Accelerazione

$$a_T(t)=a_0$$

$$a_N(t)=\frac{1}{R}v_0^2$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t)=a_0\hat{\boldsymbol{u}}_T+\omega^2 R\,\hat{\boldsymbol{u}}_N=a_0\hat{\boldsymbol{u}}_T+\frac{1}{R}v_0^2\hat{\boldsymbol{u}}_N$$

È un moto su traiettoria circolare in cui l'accelerazione tangenziale (o l'accelerazione angolare) è costante.

$R,\ a_0$	caratteristiche del moto
$s_0,\ v_0$	costanti di integrazione

L'espressione della legge oraria in coordinata curvilinea è identica a quella del moto rettilineo uniformemente accelerato.

È immediato esprimere la legge oraria in coordinate polari.

Alcuni tipi di moto

Moto con accelerazione costante

[Applicazioni]

2D/2GdL

Traiettoria

Parabola con asse avente la direzione del vettore accelerazione $\hat{\boldsymbol{a}}=\overrightarrow{\text{cost.}}$

Sistema di coordinate

- coordinate cartesiane ortogonali con un asse parallelo al vettore accelerazione e l'altro nel piano individuato dai vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_0, \vec{\boldsymbol{a}}_0$.

Legge oraria

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t)=\vec{\boldsymbol{r}}_0+\vec{\boldsymbol{v}}_0 t+\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}_0 t^2$$

$$\begin{cases} x(t)=x_0+v_{0x}t \\ y(t)=y_0+v_{0y}t\pm\dfrac{1}{2}a_0 t^2 \end{cases}$$

Velocità

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t)=\vec{\boldsymbol{v}}_0+\vec{\boldsymbol{a}}_0 t$$

$$\begin{cases} v_x(t)=v_{0x} \\ v_y(t)=v_{0y}\pm a_0 t \end{cases}$$

Accelerazione

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t)=\vec{\boldsymbol{a}}_0$$

$$\begin{cases} a_x(t)=0 \\ a_y(t)=\pm a_0 t \end{cases}$$

L'informazione di cui disponiamo è che il vettore accelerazione è costante (ha modulo direzione e versocostanti).

$\vec{\boldsymbol{a}}_0$	caratteristica del moto
$\vec{\boldsymbol{r}}_0, \vec{\boldsymbol{v}}_0$	costanti di integrazione

Il moto rettilineo uniformemente accelerato è un caso particolare di moto con accelerazione costante dato che nel primo viene richiesto anche che la traiettoria sia una retta.

Il moto ha 2GdL (e non 3) dato che avviene sempre in un piano (individuato dai vettori accelerazione e velocità iniziale) e, con opportuna scelta degli assi, può essere visto come la "combinazione" di un moto rettilineo uniforme (lungo la direzione x) ed un moto uniformemente accelerato (lungo la direzione y) .

Alcuni tipi di moto

"*Moto di un proiettile*" o "*Caduta di un grave in 2D*"

[Applicazioni]

2D/2GdL

Sperimentalmente si osserva che qualunque oggetto "lanciato" in prossimità della superficie della Terra, se è possibile trascurare le interazioni con l'aria, si move con accelerazione costante avente

- modulo $g_n = 9.80665 \text{ m/s}^2$,
- direzione *verticale* (la direzione del "filo a piombo")
- verso *dall'alto in basso* (dalla superficie verso il centro della Terra).

Attenzione:

- Qualunque siano posizione e velocità iniziali, il "moto di un proiettile" è sempre a 2GdL.
- Solo con una scelta opportuna del sistea di riferimento il "moto di un proiettile" è in 2D ed è uniforme lungo un asse (orizzontale) ed uniformemente accelerato lungo l'altro (verticale).

È un moto con accelerazione costante $\vec{g}$ (accelerazione di gravità).

$\vec{g}$ caratteristica del moto

$\vec{r}_0, \vec{v}_0$ costanti di integrazione

Nota: a questo punto del corso il valore dell'accelerazione di gravità deve essere considerato un dato sperimentale (o meglio empirico), nel seguito sarà ricavato.

Alcuni tipi di moto

Moto periodico (su traiettoria rettilinea)

[Applicazioni]

1D/1GdL **periodico**

Traiettoria

Retta $\overrightarrow{\hat{u}_T = \mathbf{cost.}}$, periodo T

Sistema di coordinate

- coordinata curvilinea: s
- coordinate cartesiane ortogonali con l'asse x coincidente con la traiettoria: $\hat{u}_x = \hat{u}_T$

Legge oraria

$$s(t): \; s(t+T) = s(t)$$

Velocità

$$v_s(t): \; v_s(t+T) = v_s(t)$$

Accelerazione

$$a_T(t): \; a_T(t+T) = a_T(t)$$
$$a_N(t) = 0$$

Le informazioni di cui disponiamo sono che:

- il moto si ripete identico a sé stesso dopo un certo intervallo di tempo detto *periodo*,
- la traiettoria è una retta.

T caratteristica del moto

Il fatto che la traiettoria sia rettilinea non è essenziale affinché il moto sia periodico: il moto circolare uniforme è un esempio di moto periodico (su traiettoria circolare).

Alcuni tipi di moto

Moto armonico (su traiettoria rettilinea)

Fisica 1
F.Bloisi

v11 **2A1.12**

[Applicazioni]

1D/1GdL **periodico**

Traiettoria

Retta $\hat{\boldsymbol{u}}_T = \overrightarrow{\textbf{cost.}}$, periodo T

Sistema di coordinate

- coordinata curvilinea: s
- coordinate cartesiane ortogonali con l'asse x coincidente con la traiettoria: $\hat{\boldsymbol{u}}_x = \hat{\boldsymbol{u}}_T$

Legge oraria

$$s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Velocità

$$v_s(t) = -\omega_0 A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Accelerazione

$$a_T(t) = -\omega_0^2 A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$a_N(t) = 0$$

A_0	ampiezza
ω_0	pulsazione
φ_0	fase iniziale
$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$	periodo
$\nu = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$	frequenza
$\omega_0 t + \varphi_0$	fase

Il modo più semplice per definire il moto armonico è quello di vederlo come la proiezione di un moto circolare uniforme su di un diametro della circonferenza.

T	caratteristica del moto
A_0, φ_0	costanti di integrazione

Dal confronto delle espressioni dell'accelerazione e della legge oraria si ricava facilmente che l'accelerazione è proporzionale alla velocità (con coeff. negativo):

$$\boxed{\frac{d^2 s}{d t^2} = -\omega_0^2 s(t)}$$

Questa relazione può essere presa come definizione di moto armonico.

L'accelerazione tengenziale è proporzionale, con un fattore negativo, alla coordinata curvilinea.

Alcuni tipi di moto

Moto armonico smorzato (su traiettoria rettilinea)

Fisica 1
F.Bloisi

v11 **2A1.13**

[Applicazioni]

1D/1GdL **NON periodico**

Traiettoria

Retta $\hat{\boldsymbol{u}}_T = \overrightarrow{\textbf{cost.}}$, periodo T

Sistema di coordinate

- coordinata curvilinea: s
- coordinate cartesiane ortogonali con l'asse x coincidente con la traiettoria: $\hat{\boldsymbol{u}}_x = \hat{\boldsymbol{u}}_T$

Legge oraria

L'effettiva espressione della legge oraria dipende dai valori dei tempi caratteristici $T = 2\pi/\omega_0$ e τ dell'equazione differenziale che definisce il moto armonico smorzato (sovra-smorzamento, sotto-smorzamento, smorzamento critico).

Accelerazione

L'accelerazione contiene un termine proporzionale, con coefficiente negativo, allo spostamento (come nel moto armonico) ed uno proporzionale, con coefficiente negativo, alla velocità (come nel moto smorzato).

Il moto armonico smorzato riunisce le caratteristiche del moto armonico (accelerazione proporzionale alla posizione) e del moto smorzato (accelerazione proporzionale alla velocità):

$$a_T(t) = -\omega_0^2 s(t) - \frac{1}{\tau} v_s(t)$$

equivalente all'equazione differenziale:

$$\boxed{\frac{d^2 s}{d t^2} = -\omega_0^2 s - \frac{1}{\tau}\frac{d s}{d t}}$$

$$4\pi\tau \begin{cases} < T & \text{(sovra-smorz.)} \\ = T & \text{(smorz. critico)} \\ > T & \text{(sotto-smorz.)} \end{cases}$$

Lo studio del moto armonico smorzato sarà approfondito nel seguito.

Alcuni tipi di moto

Euazione differenziale del moto di un punto materiale

[Applicazioni]

Per alcuni tipi di moto esaminati (moto rettilineo smorzato, moto armonico, moto armonico smorzato) si è visto che il moto è caratterizzato da una particolare relazione tra accelerazione e velocità e/o posizione (legge oraria). Poiché la velocità è la derivata prima, rispetto al tempo, della posizione mentre l'accelerazione è la derivata seconda, si tratta di una *equazione differenziale* che stabilisce una relazione tra una funzione, $\vec{r}(t)$, e le sue derivate.

Tali considerazioni possono essere generalizzate: se si conosce l'equazione differenziale del moto e si conoscono le condizioni iniziali (in genere posizione iniziale e velocità iniziale) è possibile determinare l'equazione oraria .

Moto con accelerazione costante:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{\text{cost}}.$$

Moto smorzato:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+c_1\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\text{cost}}.$$

Moto armonico:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+c_0\vec{r}=\vec{\text{cost}}.$$

Moto armonico smorzato:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+c_1\frac{d\vec{r}}{dt}+c_0\vec{r}=\vec{\text{cost}}.$$

Moto circolare uniforme:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-c_0\hat{r}$$

Alcuni tipi di moto

Sommario

[Sommario]

- Abbiamo definito ed analizzato alcuni tra i più comuni tipi di moto:
  - Moto su traiettoria rettilinea
    - Moto rettilineo uniforme
    - Moto rettilineo uniformemente accelerato
      - “*Caduta di un grave*” in 1D
    - Moto rettilineo smorzato
  - Moto su traiettoria circolare
    - Moto circolare uniforme
    - Moto circolare uniformemente accelerato
  - Moto con accelerazione costante
    - “*Moto di un proiettile*” o “*Caduta di un grave in 2D*”
  - Moto periodico (su traiettoria rettilinea)
    - Moto armonico
    - Moto armonico smorzato
- Per ciascuno abbiamo ricavato
  - Legge oraria
  - Velocità
  - Accelerazione
- In alcuni casi (si vedrà che ciò è vero sempre) il moto è caratterizzato dalla relazione tra l'accelerazione e la posizione e/o la velocità. Tale relazione, che si esprime come un'equazione differenziale, unita alle condizioni iniziali caratterizza completamente il moto.

Alcuni tipi di moto

Compito proposto

- **Quesito a risposta aperta** :

  Il moto su traiettoria rettilinea

- **Esercizio** :

  Un treno viaggia a velocità costante v_c e deve fermarsi ad una stazione. Per non arrecare disagio ai passeggeri non vuole superare l'accelerazione a_0.

con

v_c=125km/h, a_0=0.1g$_n$

Determinare

a) la lunghezza x_{Fr} della frenata

b) la durata t_{Fr} della frenata

Alcuni tipi di moto

-

L'iscrizione al corso tramite il sito

www.campus.unina.it

è necessaria per sostenere le prove "in itinere"