# Cinematica del punto materiale
## Dall'accelerazione alla legge oraria







# Dall'accelerazione alla legge oraria
## Indice

# Dall'accelerazione alla legge oraria

## Il “problema inverso”

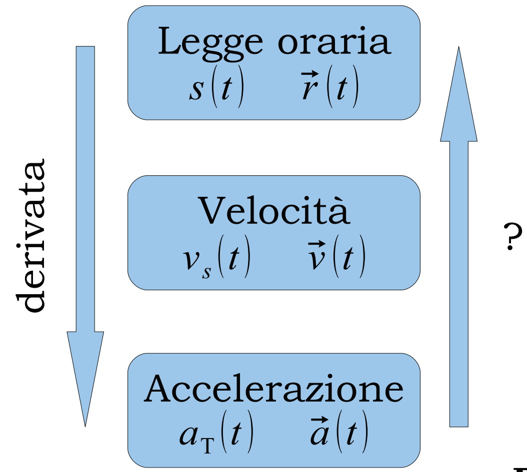


**Fig.1**

La legge oraria contiene tutte le informazioni relative al moto del punto materiale e, tramite l'“operatore” “derivata” è possibile ricavare la velocità e l'accelerazione.

È possibile invertire tale procedimento?

È utile essere in grado di invertire il procedimento, ossia essre in grado di ricavare la velocità conoscendo l'accelerazione e la legge oraria conoscendo la velocità poiché nello studio della dinamica si vedrà che l'accelerazione (NON l'accelerazione tangenziale) è determinata dalle forze che agiscono sul punto materiale.

| grandezze scalari | | | grandezze vettoriali |
|---|---|---|---|
| | $v_s(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ | $\vec{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ | |
| | $a_T(t)=\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}$ | $\vec{a}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ | |



# Dall'accelerazione alla legge oraria

## Una situazione molto semplice: velocità costante

Distanza percorsa nell'intervallo di tempo $\Delta t=t_2-t_1$

$$v_s=\frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta s=v_s\Delta t$$

Interpretazione geometrica:

- la distanza percorsa è pari all'“area” del rettangolo compreso tra la “curva” $s(t)$ e l'asse delle ascisse.

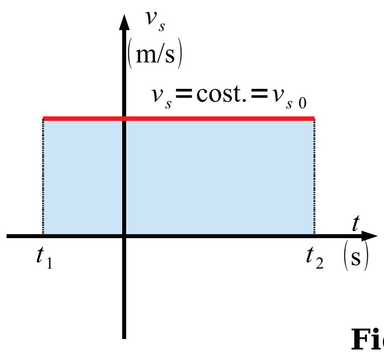


**Fig.2**

**Nota**: L'“area” del rettangolo si misura in m/s (unità di misura delle ordinate) per s (unità di misura delle ascisse), ossia in m.

# Dall'accelerazione alla legge oraria

## Una situazione meno semplice: velocità costante a tratti



Distanza percorsa nell'intervallo di tempo
$\Delta t = \Delta t_1 + \ldots + \Delta t_N$

$$v_{s\,1} = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta s_1 = v_{s\,1}\Delta t_1$$

$$\vdots$$

$$v_{s\,N} = \frac{\Delta s_N}{\Delta t_N} \Rightarrow \Delta s_N = v_{s\,N}\Delta t_N$$

$$\downarrow$$

$$\Delta s = \Delta s_1 + \ldots + \Delta s_N = v_{s\,1}\Delta t_1 + \ldots + v_{s\,N}\Delta t_N$$

$$\Delta s = \sum_{i=1}^{i=N} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{i=N} \left(v_{s\,i}\Delta t_i\right) \qquad \text{Sommatoria}$$

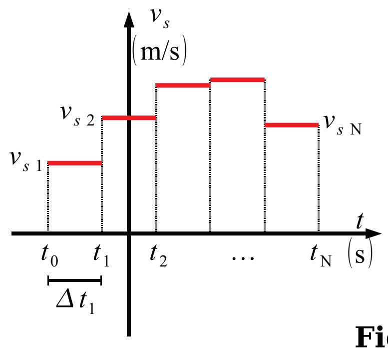


Fig.3

# Dall'accelerazione alla legge oraria

## La legge oraria come integrale della velocità



Considerando un numero sempre maggiore
di intervalli di tempo sempre più piccoli

$$\Delta s = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{i=N} \left(v_{s\,i}\Delta t\right) \qquad \text{Sommatoria}$$

$$\Delta s = \int_{t_i}^{t_f} v_s(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{Integrale definito}$$

$$s(t_f) - s(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} v_s(t)\,\mathrm{d}t$$

$$s(t_f) = s(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v_s(t)\,\mathrm{d}t$$

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v_s(t')\,\mathrm{d}t' \quad \text{con } s_0\text{: costante di integrazione}$$

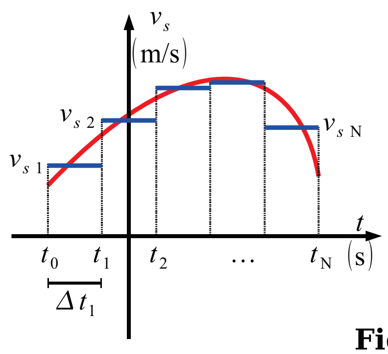


Fig.4

# Dall'accelerazione alla legge oraria

## La velocità come integrale dell'accelerazione



Ripetendo il medesimo ragionamento,
partendo dall'accelerazione

$$\Delta v_s = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} a_{\mathrm{T}\,i} \Delta t$$ Sommatoria

$$\Delta v_s = \int_{t_i}^{t_f} a_{\mathrm{T}}(t)\,\mathrm{d}t$$ Integrale definito

$$v_s(t_f) - v_s(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} a_{\mathrm{t}}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$v_s(t_f) = v_s(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} a_{\mathrm{T}}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$v_s(t) = v_{s\,0} + \int_0^t a_{\mathrm{T}}(t')\,\mathrm{d}t' \quad \text{con } v_{s\,0}\text{: costante di integrazione}$$

# Dall'accelerazione alla legge oraria

## Integrale definito ed integrale indefinito



Integrale indefinito

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} F(u) = f(u)$$

$$\int \mathrm{d}u\, f(u) = F(u)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} F(u) \equiv \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}$$

"operatore" inverso
della derivata

$$\int \mathrm{d}u\, f(u) \equiv \int f(u)\,\mathrm{d}u$$

Integrale definito

$$\int_{u_i}^{u_f} f(u)\,\mathrm{d}u =$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{i=N} \left( f(u_i) \Delta u_i \right)$$

Def.: limite della sommatoria.

Geom.: "area" tra curva ed asse delle ascisse.

Relazione tra integrale definito ed integrale indefinito

$$\int_{u_i}^{u_f} f(u)\,\mathrm{d}u = F(u_f) - F(u_i)$$

**Nota:** L'integrale indefinito è un "operatore" che "applicato" ad una funzione da' come risultato un'altra funzione (definita a meno di una costante, detta "costante di integrazione").

$$\int \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \sin\vartheta + \text{cost.}$$

**Nota:** L'integrale definito, data una funzione e due valori della variabile, fornisce un valore.

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}$$

# Dall'accelerazione alla legge oraria

## Significato fisico delle “costanti di integrazione”



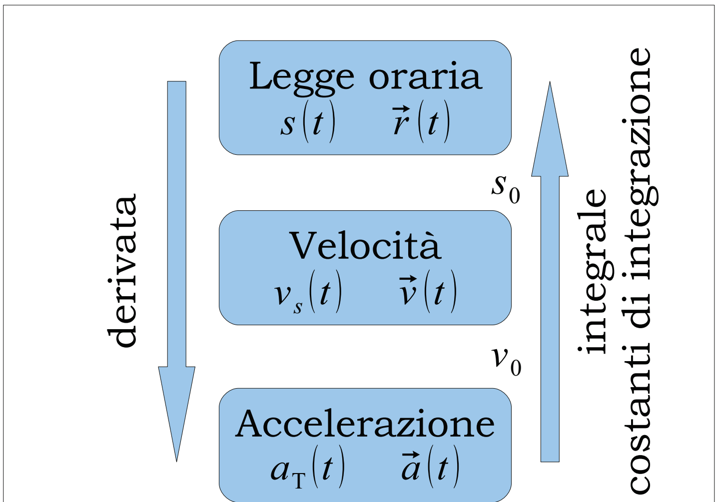


**Fig.5**

Dalla legge oraria è possibile, tramite derivazione, ricavare la velocità e l'accelerazione.

Dalla accelerazione è possibile, tramite integrazione, ricavare la velocità e la legge oraria, ma è necessario conoscere i valori di due “costanti di integrazione” (ad esempio: posizione iniziale e velocità iniziale).

$$s(t_2)-s(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} v_s(t')\,\mathrm{d}t' \qquad s(t)=s(t_0)+\int_{t_0}^{t} v_s(t')\,\mathrm{d}t' \qquad s(t)=s_0+\int_0^t v_s(t')\,\mathrm{d}t'$$

$$v_s(t_2)-v_s(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} a_T(t')\,\mathrm{d}t' \qquad v_s(t)=v_s(t_0)+\int_{t_0}^{t} a_T(t')\,\mathrm{d}t' \qquad v_s(t)=v_{s\,0}+\int_0^t a_T(t')\,\mathrm{d}t'$$

# Dall'accelerazione alla legge oraria

## Integrale di una grandezza vettoriale



L'integrale di una funzione vettoriale si ottiene facendo l'integrale di ciascuna delle sue componenti cartesiane.

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\int_0^t \vec{v}(t')\,\mathrm{d}t' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(t)=x_0+\int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t' \\ y(t)=y_0+\int_0^t v_y(t')\,\mathrm{d}t' \\ z(t)=z_0+\int_0^t v_z(t')\,\mathrm{d}t' \end{cases}$$

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\int_0^t \vec{a}(t')\,\mathrm{d}t' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_x(t)=v_{0\,x}+\int_0^t a_x(t')\,\mathrm{d}t' \\ v_y(t)=v_{0\,y}+\int_0^t a_y(t')\,\mathrm{d}t' \\ v_z(t)=v_{0\,z}+\int_0^t a_z(t')\,\mathrm{d}t' \end{cases}$$

# Dall'accelerazione alla legge oraria
-

[ ]

[ ]



# Dall'accelerazione alla legge oraria
## Sommario

[Sommario]

- Si è già visto che
  - facendo la derivata della legge oraria (più precisamente: applicando l'operatore derivata alla funzione che fornisce la posizione al trascorrere del tempo) è possibile ricavare la velocità (più precisamente: la funzione che dà la velocità al trascorrere del tempo).
  - facendo la derivata della velocità (più precisamente: applicando l'operatore derivata alla funzione che fornisce la velocità al trascorrere del tempo) è possibile ricavare l'accelerazione (più precisamente: la funzione che dà l'accelerazione al trascorrere del tempo).
- Qui vogliamo effettuare l'operazione inversa. Si trova che
  - l'integrale dell'accelerazione ci fornisce la velocità a patto di conoscerne il valore in un istante (solitamente la velocità iniziale)
  - l'integrale della velocità ci fornisce la legge oraria a patto di conoscere il valore della posizione del punto materiale in un istante (solitamente la posizione iniziale)
- Occorre tener presente che
  - l'integrale indefinito fornisce come risultato una funzione in quanto è un “operatore” (l'operatore inverso dell'operatore derivata)
  - la funzione fornita dall'integrale indefinito è determinata a meno di una costante additiva dato che esistono più funzioni che hanno la medesima derivata
  - l'integrale definito fornisce un valore numerico pari alla differenza tra due valori dell'integrale indefinito