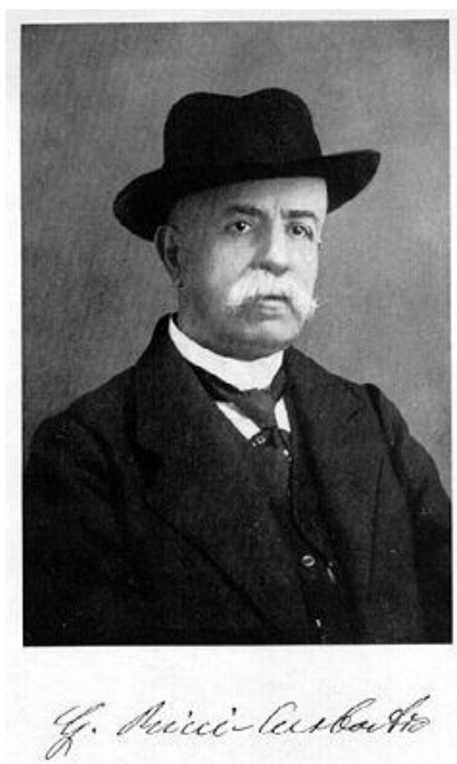
Monica De Angelis, Enrico Mazziotti

Breve manuale di Calcolo Tensoriale per le applicazioni



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ricci-Curbastro.jpg

Breve manuale di Calcolo tensoriale

per le applicazioni

Monica De Angelis, Enrico Mazziotti

Università degli Studi di Napoli Federico II
Facoltà di Ingegneria.([1])

Cenni storici

L' analisi tensoriale ritrova le sue prime origini sul finire del 19^0 secolo, nello studio degli invarianti geometrici associati agli operatori di derivata e di differenziale rispetto ad un generico cambiamento di coordinate. Questi studi risalgono infatti all'opera di Riemann, Beltrani, Cristoffel e Lipschitz.

Un nuovo approccio - ancora oggi seguito - fu introdotto da Gregorio Ricci Curbastro in un primo articolo del 1892 e successivamente con un altro redatto con il suo allievo Tullio Levi Civita. Si posero così le basi del cosidetto calcolo assoluto (cfr [8] p. 1309, [14]).

Il nome di tensore fu introdotto la prima volta dal fisico tedesco Woldemar Voigt nel 1882 nei suoi studi sui cristalli solidi ([14] p. 293). Tuttavia il termine si diffuse sopratutto per l' uso che nel 1916 Albert Einstein ne fece all'interno della relatività generale. E proprio in quell'anno l'illustre scienziato introdusse la convenzione moderna secondo cui il simbolo di sommatoria può essere soppresso rispetto agli indici ripetuti([9] p. 236).

Le operazioni eseguite sui tensori prendono poi il nome di algebra tensoriale. Interessante - anche perchè ricco di aneddoti - è il rapporto che Einstein ebbe con l' algebra tensoriale e le sue difficoltà.

Più testi riportano una frase che lo scienziato avrebbe pronunciato in occasione di un incontro con un vecchio compagno di studi il matematico Marcel Grossmann: *Grossmann mi devi aiutare o finirò per impazzire* ([7] p. 69, [9] p. 232).

Einstein in quel momento aveva bisogno di una geometria in grado di descrivere la curvatura dello spazio - tempo e Grossmann aiutò il fisico presentandogli la geometria di Riemann elaborata nel 1854 che applicava l' analisi infinitesimale ai vettori e ai tensori. Grossmann comunque precisava: *che si trattava di un terribile pasticcio nel quale i fisici avrebbero fatto bene a non impicciarsi* [9].

[1] `https://www.docenti.unina.it/MONICA.DE%20ANGELIS` e-mail `modeange@unina.it`
`https://www.docenti.unina.it/ENRICO.MAZZIOTTI` e-mail `mazziott@unina.it`

Lo stesso Einstein anni dopo ricordando le difficoltà incontrate con la nuova matematica, disse ad alcuni studenti delle medie inferiori: *Non preoccupatevi delle vostre difficoltà con la matematica, vi posso assicurare che le mie ancora oggi sono maggiori* ([7] p.69).

Il fisico M. Kaku commenta: *Riemann scoprì mondi matematici del tutto nuovi* [...] *ed Einstein era convinto che questa geometria avrebbe consentito una descrizione più accurata dell' universo. Per la prima volta il linguaggio matematico della geometria differenziale si stava facendo strada nel mondo della fisica. La geometria differenziale ovvero il calcolo tensoriale, un tempo considerata la branca più inutile della matematica, divenne il linguaggio stesso dell' universo* ([7] p. 70).

Fu cosí che *in un giorno di metà agosto del 1912, Albert Einstein fu lieto di fare la sua prima conoscenza con l' opera matematica di Gregorio Ricci Curbastro che ventanni prima aveva creato il calcolo tensoriale* ([14] p. 118-119).

È interessante ricordare che il tensore di curvatura, che divenne poi la chiave delle equazioni gravitazionali, è oggi comunemente detto tensore di Ricci ([7] p. 1314, [9] p. 239, [14] p. 240).

Ancora oggi nel mondo anglosassone il calcolo tensoriale assoluto viene chiamato *Ricci calculus* ([3] p. 383).([2])

È ben noto che ci fu anche un carteggio tra A. Einstein e T. Levi Civita relativamente a questioni di calcolo tensoriali ([3] p.456).

Nel 1921, in una conferenza a Padova sulla relatività generale(conferenza tenuta in italiano), fu proprio Gregorio Ricci Curbastro - allora docente della Facoltà di Scienze - ad introdurre Albert Einstein che, in quella occasione *espresse il più vivo compiacimento nel presentare la sua teoria nella città in cui insegnava l' artefice del calcolo differenziale assoluto* ([14] p. 252 e sc).

A tal proposito si ricorda che il termine assoluto sta ad indicare l' essenza concettuale del calcolo tensoriale ossia l' indipendenza dal riferimento delle leggi che hanno un carattere propriamente fisico. In tal modo la formulazione tensoriale da sola assicura l' indipendenza delle leggi fisiche dagli osservatori.

Applicazioni

Il calcolo tensoriale non trova applicazione unicamente nella teoria della relatività, ma da sempre ha permesso di lavorare nell' ambito di tutte le discipline della fisica, della matematica e dell'ingegneria spaziando dalla Meccanica analitica alla teoria dell' elasticità e viscoelasticità, nonchè in tutta la dinamica dei fluidi ([3] p.409).

1.1 Introduzione

Il calcolo tensoriale è uno degli strumenti matematici essenziali nelle applicazioni della fisica matematica. In esso bisogna distinguere tre livelli: quello geometrico, quello algebrico e quello analitico.

Il primo consiste nella rappresentazione geometrica degli enti fisici e matematici che intervengono nelle applicazioni. Si veda, ad esempio, la regola del parallelogrammo che si utilizza per valutare la somma o la differenza fra due vettori.

[2] Per un'immagine piu' diretta si clicchi su http://arc-geniuses.blogspot.com

Il secondo livello affronta la determinazione delle strutture astratte che sono alla base sia delle regole del calcolo geometrico che del calcolo analitico.

Il terzo infine, quello appunto analitico,riguarda l' introduzione delle componenti e la risoluzione dei problemi geometrici per mezzo dei calcoli analitici eseguiti sulle componenti.

In questo testo le tre trattazioni saranno affrontate completamente solo nel caso dei vettori, mentre per i tensori ci limiteremo alla trattazione analitica introdotta da Ricci Curbastro ([7] p. 1309).

1.2 I vettori

Livello geometrico - La trattazione geometrica consiste nella definizione di vettore libero ordinario e nelle relative operazioni di somma e di prodotto.

Livello algebrico - La definizione di vettore nel livello algebrico è fondata sulla struttura degli spazi vettoriali. Introduciamo quindi la seguente definizione di spzio vettoriale astratto (generico)

Definizione 1.2.1. *Sia S un insieme qualsiasi di elementi e siano $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ tre suoi elementi. Fissata con $''+''$ una qualsiasi operazione interna valgono le seguenti proprietà:*

1) $\boldsymbol{u}'' +'' \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'' +'' \boldsymbol{u}$ Proprietà commutativa,
2) $(\boldsymbol{u}'' +'' \boldsymbol{v})'' +'' \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}'' +'' (\boldsymbol{v}'' +'' \boldsymbol{w})$ Proprietà associativa,

esiste un elemento $\boldsymbol{0}$ per il quale si ha

3) $\boldsymbol{u}'' +'' \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}'' +'' \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ el.to neutro dell' addizione.

Qualunque sia l' elemento $\boldsymbol{u}$ deve esistere un elemento $-\boldsymbol{u}$ tale che :

4) $\boldsymbol{u}'' +'' (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ proprietà dell' opposto.

Inoltre detta $'' \cdot ''$ l' operazione esterna con operatori nei numeri reali $\Re$, si ha:

5) $1'' \cdot'' \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ el.to neutro del prodotto
6) $m'' \cdot'' (\boldsymbol{u}'' +'' \boldsymbol{v}) = m'' \cdot'' \boldsymbol{u}'' +'' m'' \cdot'' \boldsymbol{v}$ proprietà distributiva,
7) $(m+n)'' \cdot'' \boldsymbol{u} = m'' \cdot'' \boldsymbol{u} + n'' \cdot'' \boldsymbol{u}$ proprietà distributiva,
8) $m'' \cdot'' (n'' \cdot'' \boldsymbol{u}) = n'' \cdot'' (m'' \cdot'' \boldsymbol{u}) = (mn)'' \cdot'' \boldsymbol{u}$ proprietà dell' omogeinità.

La struttura algebrica formata dall' insieme S e dalle operazioni di somma e di prodotto che godono delle proprietà 1-8, è per definizione uno spazio vettoriale astratto.

Nota 1.2.1. *Il carattere astratto (generico) dello spazio comporta un analogo carattere astratto (generico) di operazione di somma e di prodotto.*

Si può giungere alla seguente

Definizione 1.2.2. *Il vettore è un elemento di uno spazio vettoriale*

Nota 1.2.2. *Questa differente definizione non è una semplice estensione del concetto geometrico di vettore libero ordinario. Infatti ci sono enti non geometrici che sono vettori perchè appartengono a spazi vettoriali (ad esempio i polinomi); al contrario ci sono enti geometrici con modulo direzione e verso che non sono vettori secondo quest' ultima definizione. Infatti il prodotto vettoriale* $\boldsymbol{u} \times \ \boldsymbol{v}$ *è un vettore libero. Tuttavia non può essere classificato come un vettore appartenente ad un spazio vettoriale perchè la sua definizione dipende dall'orientamento dello spazio fisico.*

Livello analitico - Nel livello geometrico si introducono le convenzionali componenti di un vettore libero ordinario.(si veda, ad esempio [11]). La trattazione dei vettori in maniera analitica richiede di estendere tale concetto al caso di uno spazio vettoriale generico.

Introduciamo dapprima la seguente

Definizione 1.2.3. *Considerata una combinazione lineare di* n *vettori appartenenti allo spazio vettoriale, si consideri l' equazione:*

$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + +.... + \lambda_n \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}\,. \tag{1.1}$$

I vettori $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ...\boldsymbol{u}_n)$ *si dicono linearmente indipendente se e solo se la (1.1) è verificata per* $\lambda_i = 0 \ \forall i$*. In caso contrario il sistema di vettori risulta linearmente dipendente.*

Distinguiamo ora gli spazi vettoriali di dimensione finita da quelli di dimensione infinita.

Definizione 1.2.4. *Uno spazio vettoriale* S *si dice di dimensione finita* n *- e si indicherà* S_n *- se ammette un sistema massimo di vettori* $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ...\boldsymbol{e}_n)$ *linearmente indipendenti. Se ciò non avviene lo spazio vettoriale* S *si dirà di dimensione infinita.*

In questo contesto ci occuperemo soltanto di spazi a dimensione finita. Ad esempio lo spazio fisico di dimensione 2 o 3.

Gli spazi di dimensione infinita intervengono nelle applicazioni dell' analisi funzionale, come ad esempio nell' analisi di Fourier.

Si è ora in grado di giungere alla definizione di componenti.
Sia S_n uno spazio vettoriale e sia $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ... \boldsymbol{e}_n)$ una ennupla di vettori linearmente indipendenti appartenenti ad S_n.

Il sistema $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ... \boldsymbol{e}_n)$ è necessariamente linearmente dipendente e ciò implica che esistono n scalari tali che :

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + +.... + x_n \boldsymbol{e}_n \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} x^i \boldsymbol{e}^i. \tag{1.2}$$

Definizione 1.2.5. *I vettori* $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ... \boldsymbol{e}_n)$ *definiscono una base dello spazio* S_n *mentre le* x_i $(i = 1, 2..n)$ *sono dette componenti controvarianti del vettore* $\boldsymbol{x}$ *nella base assegnata.*

L' importanza delle componenti può essere riconosciuta mediante l' applicazione al caso della somma come segue nel seguente

Esempio 1.2.1. *Considerati i vettori* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$, *sia* $''+''$ *l' operazione di somma definita nello spazio vettoriale. (Le virgolette stanno ad indicare il carattere astratto dell' operazione). Eseguiamo* $\boldsymbol{x}\,''+''\,\boldsymbol{y}$ *. Si avrà:*

$$\boldsymbol{x}\,''+''\,\boldsymbol{y} = (x_1\,\boldsymbol{e}_1\,''+''\,x_2\,\boldsymbol{e}_2\,''+''....''+''x_n\boldsymbol{e}_n)\,''+''\,(y_1\,\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2\,''+''....''+''y_n\boldsymbol{e}_n).$$

Tenuto conto delle proprietà della somma e del prodotto definite nello spazio risulta:

$$\boldsymbol{x}\,''+''\,\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\, e_i.$$

Da ciò si deduce che risultando $(x_i + y_i)$ *i coefficienti di un vettore nella base* $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ... \boldsymbol{e}_n)$, *esse rappresentano le componenti del vettore* $\boldsymbol{x}\,''+''\,\boldsymbol{y}$ *.*

Dunque, l' operazione di somma generica (astratta) definita nello spazio vettoriale viene sempre trasformata nell' ordinaria somma aritmetica, e ciò resta vero qualunque sia la definizione di somma considerata al primo membro: sia che si tratti di somma di vettori che di matrici o di polinomi etc.

1.3 I tensori cartesiani

Siano $(O\,x_1\,x_2\,x_3)$ $(O\,x'_1\,x'_2\,x'_3)$ due qualsiasi terne cartesiane levogire ([3])con l' origine in O e siano $\{\boldsymbol{e}_i\}$ e $\{\boldsymbol{e}'_j\}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ rispettivamente i versori degli assi.

La trasformazione delle basi è retta dalla legge $\boldsymbol{e}'_j = A^i_j\,\boldsymbol{e}_i$ dove gli elementi $A^i_j = \cos(\boldsymbol{e}'_j\,\boldsymbol{e}_i)$ rappresentano i nove coseni direttori del cambiamento di base $(\boldsymbol{e}'_j) \to (\boldsymbol{e}_i)$.

Tenendo conto che da ora in poi le terne considerate si supporranno sempre cartesiane levogire, si da' la seguente

Definizione 1.3.1. *Si consideri un ente* $\boldsymbol{T}$ *individuato nella base* $\{\boldsymbol{e}_i\}$ *dalle nove quantità* $\boldsymbol{T}^{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ *e nella base* $\{\boldsymbol{e}'_j\}$ *dai nove scalari* T'^{hk} $(h, k = 1, 2, 3)$.

Se è verificata la seguente trasformazione

$$T'^{\,hk} = \sum_{i,j=1}^{3} A^h_i\, A^k_j\, T^{\,ij}, \tag{1.3}$$

[3] Una terna si definisce cartesiana quando ad essa e' associata una base ortonormale

in accordo con la definizione classica ([5]), si dirà allora che $\boldsymbol{T}$ *è un tensore doppio euclideo e le* $\boldsymbol{T}^{ij}$ *sono le sue componenti cartesiane.*

Nota 1.3.1. *In presenza di terne cartesiane le notazioni* $\boldsymbol{T}_{ij}$ *o* $\boldsymbol{T}^{ij}$ *oppure* $\boldsymbol{T}_i^j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ *possono essere usate indifferentemente.*

Nota 1.3.2. *Mediante la notazione matriciale si ha una possibile e comoda rappresentazione di un tensore doppio:*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}_{(x_1, x_2, x_3)} . \tag{1.4}$$

Nota 1.3.3. *Un tensore può godere di una certa proprietà soltanto se essa è verificata in un qualsiasi sistema di riferimento.*

Esempio è la proprietà di simmetria e antisimmetria.

Ad esempio consideriamo il caso dei tensori simmetrici e emisimmetrici. Si ha:

Definizione 1.3.2. *Indicato con* T^T *il tensore trasposto di* T (${T^T}_{ij} = T_{ji}$) *se si verifica che*

$$T^T = T \Leftrightarrow T^{\,hk} = T^{\,kh} \quad \forall\, h \neq k, \tag{1.5}$$

il tensore doppio è detto simmetrico.

Si verifica facilmente che la permutabilità degli indici si conserva in ogni riferimento.

Analogamente

Definizione 1.3.3. *Quando si ha*

$$T^T = -T \Leftrightarrow T^{\,hk} = -T^{\,kh} \quad \forall\, h \neq k, \tag{1.6}$$

il tensore doppio è detto antisimmetrico o emisimmetrico.

Nota 1.3.4. *Quanto detto per i tensori doppi nello spazio tridimensionale può riproporsi in uno spazio euclideo ad* n *dimensioni. In questo caso il tensore è caratterizzato da* n^2 *scalari. In particolare nel piano si avranno* 2^2 *scalari* $\boldsymbol{T}_i^j$ $(i, j = 1, 2)$.

Inoltre è naturale poter considerare oltre ai tensori doppi (chiamati anche tensori di ordine due), i tensori tripli (caratterizzati, nello spazio tridimensionale, da 3^3 *scalari* $\boldsymbol{T}_{ijk}$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$*), tensori quadrupli e così via.*

Così un vettore (con 3^1 *componenti) può essere considerato quale tensore di ordine uno. Chiameremo infine un tensore di ordine zero (o scalare intrinseco) uno scalare che sia indipendente dalla scelta del sistema di riferimento.*

1.4 Convenzione di Einstein

La convenzione di Einstein riguarda il cosidetto indice ripetuto. Lo scienziato la stabilí per qualunque tipo di tensore(coovariante , controvariante etc..) Pertanto se non si lavora con tensori cartesiani va tenuto conto anche della posizione occupata dall'indice. Vale quindi la seguente regola:

Quando in un monomio compare al piu' due volte uno stesso indice una volta in posizione superiore e un'altra in posizione inferiore, per quell'indice si sottointende il segno di sommatoria.

L'indice ripetuto é detto indice muto (dummy index) metre gli altri indici son detti liberi.

1.5 Operazioni fra tensori

Le operazioni fra tensori costituiscono la cosidetta algebra vettoriale e così come le proprietà hanno carattere tensoriale anche le operazioni se sono valide in un riferimento lo sono anche in tutti gli altri. Cosicchè si ha:

Prodotto di uno scalare per un tensore

Definizione 1.5.1. *Assegnato un tensore $\boldsymbol{T}$ di ordine m ed un scalare reale λ, si definisce prodotto del tensore per lo scalare assegnato, il tensore $\lambda\boldsymbol{T}$ di ordine m che in ogni riferimento ha per componenti il prodotto di λ per le omologhe componenti di $\boldsymbol{T}$.*

Tensore opposto

Definizione 1.5.2. *Se $\lambda = -1$ il prodotto $(-1)\boldsymbol{T}$ definisce il tensore opposto che verrà indicato con $-\boldsymbol{T}$.*

Somma di tensori

Definizione 1.5.3. *Assegnati due tensori $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{Y}$ dello stesso ordine m si definisce somma di tali tensori, il tensore $\boldsymbol{T} + \boldsymbol{Y}$ di ordine m che in ogni riferimento ha per componenti la somma delle omologhe componenti.*

Proprietà 1.5.1. *Sia $\boldsymbol{T}$ un tensore doppio di componenti T^{ij}. Esso può essere sempre scomposto in maniera univoca nella somma del tensore simmetrico $\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji})$ e del tensore antisimmetrico $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji})$. Ovvero:*

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{A} \tag{1.7}$$

Moltiplicazione - Prodotto tensoriale

Definizione 1.5.4. *Assegnati due tensori* $\boldsymbol{T}$ *e* $\boldsymbol{Y}$ *di ordine rispettivamente* m *ed* n*, si definisce moltiplicazione o prodotto tensoriale di tali tensori - e si indica con* $\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{Y}$ *- il tensore di ordine* $m+n$ *di componenti:*

$$(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{Y})_{i_1.....i_{m+n}} = T_{i_1 i_2 ... i_m} \, Y_{i_{m+1}...i_{m+n}}$$

dove si è inteso che $Y_{i_{m+k}} = Y_{i_k}$ *.*

Esempio 1.5.1. *Uno dei più semplici esempi di prodotto tensoriale sono le cosidette* **diadi** *. Tali tensori si costruiscono a partire da due vettori. Assegnati arbitrariamente i vettori* $\boldsymbol{a} = a^i \, \boldsymbol{e}_i$ *e* $\boldsymbol{b} = b^j \, \boldsymbol{e}_j$*, si definisce diade il seguente prodotto [6]:*

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 & a^1 b^3 \\ a^2 b^1 & a^2 b^2 & a^2 b^3 \\ a^3 b^1 & a^3 b^2 & a^3 b^3 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Si dimostra facilmente che una diade è un tensore doppio in quanto soddisfa la relazione 1.3.

Nota 1.5.1. *É interessante osservare che, considerati i versori* $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$*, risulta:*

$$\boldsymbol{e_1} \otimes \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{e_3} \otimes \boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Cosí in base alle proprietà delle diade (vedi,ad esempio [6]) ogni tensore doppio puó essere formalmente scritto come somma di nove diadi. Infatti se T^{ij} *indicano le componenti di un tensore* $\boldsymbol{T}$ *in una base ortonormale* $(\boldsymbol{e}_i)_{i=1,2,3}$*, si avrà:*

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i,j=1}^{3} T^{ij} \, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j. \tag{1.10}$$

Esercizio 1.5.1. *Assegnati nello spazio bidimensionale i tensori doppi:*

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

si determinino i tensori $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{Y}$ *e* $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{Y}$.

SVOLGIMENTO:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0+4 & 1+0 \\ 5+7 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Il tensore $\boldsymbol{P}$ *è un tensore di ordine 2+2 e quindi presenterà* 2^4 *componenti* $\boldsymbol{P}_{ijmn}$*:*

$$\begin{array}{ll}
P_{1111} = T_{11}Y_{11} = 0 & P_{1112} = T_{11}Y_{12} = 0 \\
P_{1121} = T_{11}Y_{21} = 0 & P_{1122} = T_{11}Y_{22} = 0 \\
\\
P_{1211} = T_{12}Y_{11} = 4 & P_{1212} = T_{12}Y_{12} = 0 \\
C_{1221} = T_{12}Y_{21} = 7 & P_{1222} = T_{12}Y_{22} = 3 \\
\\
P_{2111} = T_{21}Y_{11} = 20 & P_{2112} = T_{21}Y_{12} = 0 \\
P_{2121} = T_{21}Y_{21} = 35 & P_{2122} = T_{21}Y_{22} = 15 \\
\\
P_{2211} = T_{22}Y_{11} = 8 & P_{2212} = T_{22}Y_{12} = 0 \\
P_{2221} = T_{22}Y_{21} = 14 & P_{2222} = T_{22}Y_{22} = 6
\end{array}$$

Operazione di saturazione - Contrazione di due indici

Definizione 1.5.5. *Si definisce l' operazione di saturazione o contrazione di due indici, l' operazione nella quale si eguagliano due indici e si somma rispetto all' indice uguagliato (saturato).*

Proprietà 1.5.2. *L' operazione di saturazione abbassa di due unità l' ordine del tensore. (Legge di saturazione).*

Esempio 1.5.2. *Si consideri il tensore doppio*

$$T^{\,ij}\,\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j.$$

Se si eguagliano i due indici $(i = j)$ *e si somma rispetto all' indice ottenuto risulta*

$$\sum_{i=1}^{3} T^{\,ii} = T^{\,11} + T^{\,22} + T^{\,33}$$

che è appunto uno scalare intrinseco che coincide con la $Tr\,\boldsymbol{T}$.

Prodotto contratto

Definizione 1.5.6. *Il prodotto contratto tra due tensori e' l'operazione che si ottiene moltiplicando i due tensori e saturando un indice dell'uno e un indice dell'altro. L'operazione puo' essere ripetuta piu' volte.*

Ad esempio, nel caso di un tensore doppio $\mathbf{T}$ e di un vettore $\mathbf{v}$ si ottengono due vettori a seconda dell'indice di saturazione di $\mathbf{T}$.
Nel caso di due tensori doppi $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ si ottengono quattro tensori doppi.

Nota 1.5.2. *Se nel prodotto contratto si saturano indici adiacenti fra di loro si ottiene il cosidetto* prodotto interno.

Prodotto interno tra due vettori

Un primo esempio di prodotto contratto si incontra quando si valuta il prodotto scalare tra due vettori.
Infatti considerati i vettori $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} u^i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{3} v^j \boldsymbol{e}_j$ uguagliando gli indici e operando la sommatoria rispetto all' indice ottenuto si ha:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u^i \boldsymbol{e}_i \cdot v^j \boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} u^i v_i. \tag{1.12}$$

Un ulteriore esempio e' dato dal

Prodotto interno tra un tensore e un vettore

Definizione 1.5.7. *Considerato il tensore doppio $\boldsymbol{T}$ e il vettore $\boldsymbol{u}$:*

$$\boldsymbol{T} = \sum_{h,k=1}^{3} T^{\,hk} \boldsymbol{e}_h \otimes \boldsymbol{e}_k \qquad \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} u^i \boldsymbol{e}_i, \tag{1.13}$$

si definisce prodotto interno di $\boldsymbol{T}$ per $\boldsymbol{u}$ e si indica $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}$ (si legge T interno u oppure T tensore contratto u), il vettore che si ottiene eseguendo il prodotto tensoriale di $\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{u}$ e saturando il secondo indice di $\boldsymbol{T}$ con quello di $\boldsymbol{u}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} \cdot \mathbf{u} &= (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u})_h \, \mathbf{e_h} \\ &= T^{hk} \, u^k \;\; \mathbf{e_h} = \; (T^{11}u^1 + T^{12}u^2 + T^{13}u^3)\boldsymbol{e}_1 + ... \end{aligned} \tag{1.14}$$

Analogamente si definisce $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T}$ il vettore ottenuto da $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{T}$ saturando il primo indice di $\boldsymbol{T}$ con quello di $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T} = T^{hk} \; u^h \; \boldsymbol{e}_k.$$

Proprietà 1.5.3.

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{u}$$

Pertanto il prodotto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}$ e' riconducibile a $\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}$.
Si deduce inoltre che

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T} \Leftrightarrow \boldsymbol{T} \text{ è simmetrico.}$$

Nota 1.5.3. *Il prodotto interno può essere rappresentata usando la notazione matriciale. Ad esempio si ha:*

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{11}u^1 + T^{12}u^2 + T^{13}u^3 \\ T^{21}u^1 + T^{22}u^2 + T^{23}u^3 \\ T^{31}u^1 + T^{32}u^2 + T^{33}u^3 \end{pmatrix}.$$

Infine si consideri il

Prodotto interno tra due tensori

Considerati i due tensori doppi

$$\mathbf{A} = A_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j; \qquad \mathbf{B} = B_{hk}\mathbf{e}_h \otimes \mathbf{e}_k;$$

e seguendo il prodotto interno del primo per il secondo si ha:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}_{im}\, \mathbf{B}_{mk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \tag{1.15}$$

Nota 1.5.4. *I tre prodotti interni ora esposti si ottengono mediante l'operazione di saturazione che in a accordo con la proprieta' 1.5.2 abbassano di due gradi l'ordine del tensore. Infatti risulta:*

$$\begin{cases} 1+1-2=0 & \text{nella (1.12)}, \\ 2+1-2=1 & \text{nella (1.14)}, \\ 2+2-2=2 & \text{nella (1.15)}. \end{cases} \tag{1.16}$$

Doppio prodotto scalare (tra tensori)

Definizione 1.5.8. *S' intende per prodotto scalare fra due tensori (anche detto doppio prodotto scalare)* $\mathbf{T}$ *e* $\mathbf{D}$ *e si indica con* $\mathbf{T} : \mathbf{D}$ *(si legge T scalare D ovvero T saturato completamente da D) lo scalare*

$$\mathbf{T} : \mathbf{D} = T_{ij} D_{ij} = Tr(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}). \tag{1.17}$$

Nota 1.5.5. *Se* T *è un qualunque tensore doppio simmetrico e* A *è un generico tensore doppio antisimmetrico, risulta*

$$T : A = 0. \tag{1.18}$$

1.6 Tensori doppi e applicazioni lineari

Definizione 1.6.1. *Sia* E *uno spazio vettoriale. Si intende per endomorfismo un'applicazione lineare di* E *in* E.

Proprietà 1.6.1. *Considerata l'applicazione* $\boldsymbol{T}\cdot$ *che ad ogni vettore* $\mathbf{u}$ *dello spazio vettoriale associa il vettore* $\boldsymbol{T} \cdot \mathbf{u}$, *si dimostra che* $\boldsymbol{T}\cdot$ *é lineare e pertanto é un endomorfismo dello spazio vettoriale in sé. Viceversa se* τ *é un endomorfismo é possibile dimostrare che esiste un tensore doppio* $\mathbf{T}$ *per il quale*

$$\tau(\mathbf{u}) = \boldsymbol{T} \cdot \mathbf{u}. \tag{1.19}$$

Pertanto un tensore doppio $\mathbf{T}$ puó sempre essere identificato attraverso l' applicazione lineare $\boldsymbol{T}\cdot$

1.7 Tensori emisimmetrici e vettori aggiunti

Sia T un generico tensore doppio emisimmetrico nello spazio vettoriale E_3^+ orientato positivamente.

Sussiste la seguente proprietá: ([4])

Proprietà 1.7.1. *Per ogni tensore doppio emisimmetrico* $\mathbf{T}$ *dello spazio* E_3^+ *esiste uno ed uno solo vettore* $\mathbf{a}$ *per il quale si ha:*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \qquad \forall \mathbf{v} \in E_3^+ \tag{1.20}$$

Il vettore $\mathbf{a}$ *é detto aggiunto di* $\mathbf{T}$ *e vale:*

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i \tag{1.21}$$

dove gli $\mathbf{e}_i$ *sono i versori di una base ortonormale.*

[4] Si veda, ad esempio [13]

1.8 Tensori isotropi

Definizione 1.8.1. *Un tensore si dice isotropo se le sue componenti non variano al variare della base. Quindi le componenti del tensore in una qualsiasi base sono determinate attraverso la semplice operazione:*

$$T^{\,hk} = \sum_{i,j=1}^{3} A_i^h\, A_j^k\, T^{\,ij}. \tag{1.22}$$

Il tensore di Kronecker Il tensore di Kronecker $\boldsymbol{\delta}$ di componenti δ_{ij} è isotropo essendo definito come:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \; per \;\; i = j, \\ \\ 0 \; per \;\; i \neq j. \end{cases} \tag{1.23}$$

Pertanto le componenti di un generico tensore doppio isotropo possono essere sempre espresse dalla formula:([5])

$$T^{\,ij} = K\, \delta_{ij}, \tag{1.24}$$

dove K è una costante arbitraria. La (1.24) rappresenta la piu' generale rappresentazione cartesiana di un tensore isotropo.

Nota 1.8.1. *E' facile verificare che il tensore isotropo ha le stesse caratteristiche in qualunque direzione dello spazio.*

Esempio 1.8.1. *Il tensore degli sforzi per un fluido in quiete (o per un fluido perfetto) e'*

$$\mathbf{T} = -\,p_0(\mathbf{x}, t)\, \mathbf{I} \qquad (p_0 = const) \tag{1.25}$$

e pertanto e' isotropo.

Definizione 1.8.2. *Se Tij sono le componenti di un tensore doppio, lo scalare*

$$\sum_{i=1}^{3} T^{\,ii} = T^{\,11} + T^{\,22} + T^{\,33} = Tr(\mathbf{T}) \tag{1.26}$$

si chiama traccia del tensore $\mathbf{T}$*; mentre lo scalare* $\frac{1}{3}\, Tr(\mathbf{T})$ *é detto deviatore.*

Valendo

$$T_{ij} = [T_{ij} - \frac{1}{3}\, Tr(T)\, \delta_{ij}\,] + \frac{1}{3}\, Tr(\mathbf{T})\, \delta_{ij} \tag{1.27}$$

si ha il seguente [5]

[5] Per una dimostrazione, si veda [5]pag 93

Teorema 1.8.1. *Ogni tensore doppio può essere decomposto nella somma di un tensore a traccia nulla e di un tensore isotropo.*

Nota 1.8.2. *In generale vale che:*

$$T_{ij}\ \delta_{ij}\ = T_{ii}\ = Tr(\mathbf{T})$$

$$T_{ij}\ \delta_{ik}\ = T_{jk}$$

ovvero il tensore di Kronecker elimina l' indice ripetuto e lo sostituisce con quello libero.

1.9 Tensore definito positivo

Ricordiamo che una forma quadratica e' definita positiva [definita negativa] se per valori non nulli delle variabili assume soltanto valori positivi [negativi].
Se assume solo valori ≥ 0 [≤ 0] e' detta semidefinita positiva [semidefinita negativa]. E' invece indefinita se assume sia valori positivi che negativi.

Queste proprieta' potrebbero essere verificate solo in alcuni sistemi di riferimento. Qualora invece siano soddisfatte in tutti i riferimenti possono assumere un carattere tensoriale e quindi si ha la seguente:

Definizione 1.9.3. *Il tensore doppio* $\mathbf{T}$ *e' detto definito positivo [definito negativo] se soddisfa le condizioni:*

$$(\mathbf{T}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\ \geq\ 0\ \forall\mathbf{v}; \qquad (\mathbf{T}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = 0\ \Leftrightarrow \mathbf{v}\ =\ 0 \tag{1.28}$$

$$[\ (\mathbf{T}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\ \leq\ 0\ \forall\mathbf{v}; \qquad (\mathbf{T}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = 0\ \Leftrightarrow \mathbf{v}\ =\ 0\ ]$$

Il tensore $\mathbf{T}$ *e' detto semidefinito positivo [semidefinito negativo] quando soddisfa la seguente proprieta':*

$$(\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}) \geq 0 \quad \forall\mathbf{v} \tag{1.29}$$

$$[\ (\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}) \leq 0 \quad \forall\mathbf{v}\ ]$$

1.10 Il tensore di inerzia

Un esempio di tensore doppio simmetrico e' il tensore di inerzia cosi' chiamato in quanto le componenti sono rappresentate dai prodotti e dai momenti d'inerzia di un sistema materiale rispetto gli assi cartesiani.

Considerato un sistema materiale S_N e un riferimento di assi (x^1, x^2, x^3), siano Y^{11}, Y^{22}, Y^{33} rispettivamente i momenti di inerzia rispetto agli asse x^1, x^2, x^3 , mentre Y^{12}, Y^{13}, Y^{23} indicano i prodotti di inerzia (o momenti di deviazione)di S_N associati al riferimento.

E' possibile dimostrare, [11], che i nove scalari Y^{ij} $(i = j = 1, 2, 3)$ rappresentano le componenti di un tensore doppio simmetrico detto *tensore di inerzia.*

1.11 Autovalori e autovettori

Considerato un tensore T, esso può definire una corrispondenza tra vettori data da

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}. \tag{1.30}$$

La (1.30) è in generale una trasformazione tra vettori, ma se si impone che il vettore $\boldsymbol{v}$ sia parallelo al vettore $\boldsymbol{u}$ ovvero $\boldsymbol{v} = \lambda\, \boldsymbol{u}$ la (1.30) diviene

$$T \cdot \boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}, \tag{1.31}$$

che rappresenta un' equazione nell' incognita $\boldsymbol{u}$ che in generale non ammette soluzione qualunque sia λ (problema della compatibilità). Si dà pertanto la seguente

Definizione 1.11.1. *La ricerca dei valori di λ per i quali la (1.31) è compatibile è detta problema di autovalori.*

Dalla (1.31) si ha

$$T \cdot \boldsymbol{u} = \lambda\, I\, \boldsymbol{u} \Leftrightarrow (T - \lambda\, I)\, \boldsymbol{u} = 0$$

ossia

$$\begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{1.32}$$

Come é ben noto in questo caso si ottengono soluzioni non nulle se e solo il determinante della *matrice secolare* $|T - \lambda\, I|$ é nullo. Quindi bisogna imporre che sia:

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{1.33}$$

Da qui, svolgendo:

$$
(1.34) \qquad -\lambda^3 + \lambda^2 \,(T_{11} + T_{22} + T_{33}) \; - \lambda \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} +
$$

$$
- \lambda \begin{vmatrix} T_{33} & T_{31} \\ T_{13} & T_{11} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = 0
$$

Così, introdotti rispettivamente il primo , il secondo e il terzo invariante:

$$
I_1 = tr(T) = T_{11} + T_{22} + T_{33}
$$

$$
I_2 = T_{22}T_{33} - T_{23}T_{32} + T_{33}T_{11} - T_{13}T_{31} + T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}
$$

$$
I_3 = \det T
$$

riesce:

$$
(1.35) \qquad \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0,
$$

la cui risoluzione dà appunto gli autovalori λ_i $(i = 1, 2, 3)$ per cui si ha la seguente

Definizione 1.11.2. *La (1.35) è detta equazione secolare ed ammette tre radici reali o complesse che sono dette autovalori del tensore. Le soluzioni corrispondenti agli autovalori così trovati si dicono autovettori del problema.*

Nota 1.11.1. *Ad un autovettore corrisponde un unico autovalore. Al contrario, ad un autovalore corrispondono infiniti autovettori paralleli tra di loro.*

Nota 1.11.2. *Si possono presentare tre casi:*

i) i tre autovalori sono distinti: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. Il rango della matrice secolare é 2 e per ciascun autovalore esiste un autovettore del tipo $\mathbf{u} = m(u_1, u_2, u_3)$ (m scalare arbitrario). I tre autovettori sono distinti tra loro.

ii) due dei tre autovalori coincidono: $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Il rango della matrice secolare é 1 in corrispondenza degli autovalori uguali, mentre é 2 in corrispondenza dell' altro autovalore. In corrispondenza di $\lambda_1 = \lambda_2$ gli autovettori assumono la forma $\mathbf{u} = (u_1, u_2, m(u_1 + u_2))$.

iii)i tre autovalori coincidono. Il rango della matrice secolare é zero e ogni vettore é un autovettore.

Inoltre, sono ben note le seguenti proprietà

Proprietà 1.11.1. *Assegnati due autovalori distinti anche gli autovettori ad essi associati sono distinti.*

Proprietà 1.11.2. *Per un tensore doppio simmetrico gli autovettori associati a due autovalori distinti sono ortogonali.*

Proprietà 1.11.3. *In uno spazio euclideo gli autovalori di un tensore doppio simmetrico sono reali. Inoltre esiste almeno una base ortonormale costituita dagli autovettori di tale tensore rispetto alla quale solo le componenti di ugual indice sono non nulle e coincidono con gli autovalori associati.*

Esercizio 1.11.1. *Assegnato il tensore doppio:*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

si determinino gli autovalori e i rispettivi autovettori.

Svolgimento: Le formule precedenti permettono di ricavare facilmente i tre invarianti. Si ha quindi $I_1 = 2$; $I_2 = -1$; $I_3 = -2$; e l' equazione secolare (1.35) diviene:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \tag{1.37}$$

Si ottengono cosí gli autovalori:

$$\lambda = 1, \ \lambda = -1, \ \lambda = 2.$$

Per determinare gli autovettori occorre considerare la (1.32) dalla quale discende il sistema

$$\begin{cases} (2-\lambda)\,u_1 + 6\,u_3 = 0 \\ (1-\lambda)\,u_2 + 2\,u_3 = 0 \\ (\lambda+1)\,u_3 = 0 \end{cases} \tag{1.38}$$

In corrispondenza di $\lambda = -1$ il sistema che si ottiene dalla (1.38) evidenzia che u_3 puó essere qualunque e pertanto, indicato con m uno scalare arbitrario , gli autovettori sono tutti e soli quelli del tipo: $\mathbf{w} = m(2, 1, -1)$.

Per $\lambda = 1$, u_2 puó assumere valore arbitrario e quindi gli autovettori associati sono dati da $\mathbf{v} = n\,(0, 1, 0)$ dove per n s'intende uno qual si voglia scalare.

Infine per $\lambda = 2$, se $u_1 = 1$, gli autovettori sono: $l\,\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ con l scalare arbitrario.

Esercizio 1.11.2. *Considerato il tensore doppio:*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

si valutino gli autovalori.

Essendo $I_1 = -4$ $I_2 = 1$ $I_3 = 6$, si ha

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) \tag{1.40}$$

cosí gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = -3$.

Gli autovettori si deducono dal seguente sistema:

$$\begin{cases} -\lambda u_1 + u_3 = 0 \\ -(2 + \lambda) u_2 = 0 \\ 3 u_1 + u_2 - (2 + \lambda) u_3 = 0 \end{cases} \tag{1.41}$$

Per $\lambda_1 = 1$ si ha $\mathbf{u}_1 = l(1, 0, 1)$. Per $\lambda_2 = -2$ riesce $\mathbf{u}_2 = m(1, 3, -2)$. Infine si ottiene $\mathbf{u}_3 = n(1, 0, -3)$.

Esercizio 1.11.3. *Assegnato il tensore doppio simmetrico:*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

si valutino gli autovalori e si dimostri che gli autovettori associati agli autovalori distinti sono ortogonali. Infine si determini una terna ortonormale associata e si valuti il tensore rispetto a tale base mostrando che gli autovalori rappresentano gli unici elementi non nulli.

Valendo $I_1 = 5$ $I_2 = 0$ $I_3 = -4$, dall'equazione secolare

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda - 4) = 0 \tag{1.43}$$

si ricavano gli autovalori: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2(1 - \sqrt{2})$; $\lambda_3 = 2(1 + \sqrt{2})$.

In corrispondenza di $\lambda_1 = 1$ si ottiene $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$.
Per $\lambda_2 = 2(1 - \sqrt{2})$, scegliendo arbitrariamente u_2 riesce $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1 - \sqrt{2})$.
Infine si ha $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 1 + \sqrt{2})$.

É facile verificare che

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$$

Una possibile terna ortonormale puó essere associata alla base:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1; \;\; \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}; \;\; \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}.$$

Considerata la matrice A le componenti del tensore $\mathbf{T}$ nel nuovo riferimento possono essere ottenute mediante la legge di trasformazione (1.3) o equivalentemente considerando che $\mathbf{T}' = A\,\mathbf{T}\,A^T$.

Cosí per

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/|u_2| & (1-\sqrt{2})/|u_2| \\ 0 & 1/|u_3| & (1+\sqrt{2})/|u_3| \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

si ha:

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|u_2|} & \frac{1-\sqrt{2}}{|u_2|} \\ 0 & \frac{1}{|u_3|} & \frac{1+\sqrt{2}}{|u_3|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|u_2|} & \frac{1}{|u_3|} \\ 0 & \frac{1-\sqrt{2}}{|u_2|} & \frac{1+\sqrt{2}}{|u_3|} \end{pmatrix} = \tag{1.45}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2-2\sqrt{2}}{|u_2|} & \frac{6-4\sqrt{2}}{|u_2|} \\ 0 & \frac{2+2\sqrt{2}}{|u_3|} & \frac{6+4\sqrt{2}}{|u_3|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|u_2|} & \frac{1}{|u_3|} \\ 0 & \frac{1-\sqrt{2}}{|u_2|} & \frac{1+\sqrt{2}}{|u_3|} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2-2\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})}{|u_2|^2} & \frac{2-2\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})}{|u_2||u_3|} \\ 0 & \frac{2+2\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})(6+4\sqrt{2})}{|u_2||u_3|} & \frac{2+2\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})(6+4\sqrt{2})}{|u_3|^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Nota 1.11.3. *Quando si considera il tensore d'inerzia, esso e' simmetrico e gli autovalori ad esso associati coincidono con i momenti d'inerzia. Le direzioni individuate dagli autovettori si dicono autodirezioni e la terna ortonormale definita mediante gli autovettori é detta terna principale d'inerzia.*

Si possono cosi' presentare tre casi:

i) i tre autovalori sono distinti e quindi si individuano tre autovettori unitari per cui esiste una ed una sola terna principale d'inerzia.

ii) due dei tre autovalori sono uguali e gli autovettori ad essi associati sono entrambi ortogonali all' autovettore associato al terzo autovalore. Cosí esistono ∞^2 *terne principali d'inerzia: tutte e sole formate da una qualunque coppia di autovettori unitari e ortogonali associati agli autovalori identici e un autovettore unitario ad essi ortogonale.*

iii) i tre autovalori sono coincidenti. In questo caso esistono ∞^3 *terne principali d'inerzia formate da una qualunque terna ortogonale di autovettori unitari.*

1.12 Un esempio di tensore triplo

Uno dei più utili e pratici tensori del terzo ordine è il cosi detto *tensore di permutazione di Levi-Civita* [6].

Definizione 1.12.1. *Introdotta una base* $\{\mathbf{e}_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ *ortonormale, si definisce il tensore di permutazione di componenti*

$$\varepsilon_{ijk} = -(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_j)_i$$

Proprietà 1.12.1. *Dalla definizione discende che:*

$$\varepsilon_{ijk} = \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i .$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \textit{quando almeno due indici sono uguali} \\ +1 & \textit{se la permutazione degli indici è dispari} \\ -1 & \textit{se la permutazione degli indici è pari} \end{cases} \tag{1.46}$$

e quindi:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik}.$$

Proprietà 1.12.2. *Il tensore di permutszione permette di esprimere il prodotto vettoriale tra i vettori* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *:*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \varepsilon_{ijk}\ a_j\ b_k\ \mathbf{e}_i .$$

1.13 Criteri di tensorialità

Si intende per *Criteri di tensorialità* le condizioni necessarie e sufficienti affinchè n^k scalari siano le componenti di un tensore di ordine k nello spazio ad n dimensioni.

Criterio 1.13.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè n^k scalari siano le componenti di un tensore di ordine k nello spazio ad n dimensioni, è che saturando tutti gli indici con un altro tensore di ordine k si ottenga un tensore di ordine zero, ovvero uno scalare intrinseco.*

Esempio 1.13.1. *Se lo spazio è tridimensionale $(n = 3)$ e $k = 2$, fissato il tensore doppio $\boldsymbol{T}$ e due vettori arbitrari $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ si ha:*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i,j=1}^{3} u^i \, T^{ij} \, v^j$$

che rappresenta uno scalare intrinseco.

Criterio 1.13.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè n^k scalari siano le componenti di un tensore di ordine k nello spazio ad n dimensioni, è che saturando $m < k$ suoi indici con quelli di tensore arbitrario di ordine m, si ottiene un tensore di ordine $k - m$.*

1.14 Operatori differenziali

Nelle applicazioni della fisica matematica vengono frequentemente utilizzati alcuni operatori differenziali di carattere tensoriale. In particolare si introduranno l'operatore gradiente, la divergenza, l'operatore rotore e l'operatore laplaciano.

1.14.1 Operatore gradiente

Gradiente di una funzione scalare

Sia (x^1, x^2, x^3) una scelta di coordinate qualsiasi in corrispondenza di un punto P determinato (per esempio coordinate cartesiane, polari, sferiche, etc.) e sia $f(x^1, x^2, x^3)$ una funzione scalare di classe C^1.

Si considerino le derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ $(i = 1, 2, 3)$.

È possibile dimostrare che queste quantità rappresentano le componenti di un vettore e pertanto si ha la seguente

Definizione 1.14.1. *Indicati con $\boldsymbol{e}_i$ i versori degli assi associati alle coordinate nel punto P, il vettore*

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \, \boldsymbol{e}_i, \tag{1.47}$$

è detto gradiente di f e può essere denotato con ∇f oppure con grad f.

Significato geometrico

Per capire come si colloca il gradiente nello spazio, consideriamo una funzione scalare

$$f(x^1, x^2, x^3) = f(\boldsymbol{x}) = \lambda. \tag{1.48}$$

La (1.48) identifica nello spazio tridimensionale una famiglia di superfici dette *superfici di livello o superfici equipotenziali.*

Sia σ una di queste superfici. Considerata una curva biregolare γ, si indichi con $\boldsymbol{t}$ il versore della tangente. Si introduca anche un sistema di ascisse curvilinee s.

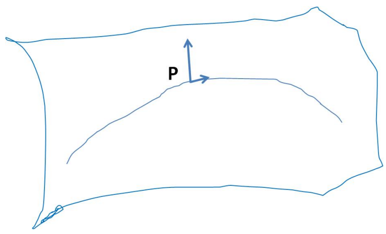


Figura 1.1: superficie equipotenziale

In tutti i punti della curva vale la relazione

$$f(\boldsymbol{x}(s)) = C \tag{1.49}$$

dove C dipende solo da λ e non da s.
Derivando si ha :

$$\frac{d}{ds} f(\boldsymbol{x}(s)) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s} = 0 \tag{1.50}$$

ma $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{ds} = \boldsymbol{t}$ e quindi $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{t} = 0$. Da ciò si deduce che $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} \perp \boldsymbol{t}$.

Essendo γ arbitraria, anche $\boldsymbol{t}$ è qualsiasi e pertanto il vettore $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}$ è ortogonale a tutte le curve di γ passanti per $\boldsymbol{x}$.

Di conseguenza ∇f è ortogonale alla superficie σ.

Per quanto riguarda il verso di ∇f, si puo' osservare che è quello rivolto verso le superfici corrispondenti a valori crescenti di λ.

Infatti dalla (1.50) si deduce che

$$df = \nabla f \cdot dP \tag{1.51}$$

avendo indicato con P il punto sulla superficie equipotenziale di coordinate $\boldsymbol{x}$.

Supponiamo ora di passare da un punto P_1 appartenente alla superficie equipotenziale $\sigma(\lambda_1)$ ad un punto P_2 appartenente alla superficie equipotenziale $\sigma(\lambda_2)$ dove $\lambda_2 > \lambda_1$. In questo caso $df = \lambda_2 - \lambda_1 > 0$.

Pertanto risulta anche $\nabla f \cdot dP > 0$. Da ciò si deduce che ∇f e dP formano un angolo acuto e quindi il verso di ∇f è lo stesso di dP e cioè delle cosidette f crescenti.

Resta così dimostrato il seguente

Teorema 1.14.1. *Il gradiente di una funzione scalare è un vettore ortogonale alle superfici equipotenziali e diretto nel verso di crescenza di tali superfici.*

Esempio 1.14.1. *Si consideri la forza peso di cui è ben noto il potenziale* $U = -mgz$.

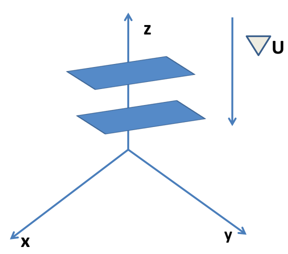


Figura 1.2: gradiente relativo alla forza peso

In questo caso la famiglia delle superfici equipotenziali è individuata da:

$$f(x, y, z) = -mgz = U. \tag{1.52}$$

Come si è dimostrato, il verso del ∇U *sarà quello che va da superfici a potenziale* U *più basso a quelle di potenziale* U *più alto, e quindi da una quota più alta ad una più bassa. Di conseguenza il* ∇U *sarà rivolto verso il basso. (fig.1.2)*

Gradiente di un vettore

Si consideri ora il vettore $\boldsymbol{v}(x^1, x^2, x^3) = v^j\, e_j$ e siano $\dfrac{\partial v^j}{\partial x^i}$ le derivate parziali di v^j rispetto alle variabili x^i. Esse costituiscono un sistema di quantità a due indici che come si può verificare soddisfano le leggi di trasformazione tensoriale (1.3) e quindi rappresentano le componenti di un nuovo tensore. Pertanto sussiste la seguente

Definizione 1.14.2. *Il tensore*

$$\nabla \mathbf{v} \;=\; \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial\, v^j}{\partial\, x^i}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \;=\; \partial_i\, v_j\; \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j . \tag{1.53}$$

è detto gradiente di $\boldsymbol{v}$.

Nota 1.14.1. *Come qualunque altro tensore doppio, anche il grad* $\boldsymbol{v}$ *può essere rappresentato in forma matriciale, e si ha:*

$$\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\, v^1}{\partial\, x^1} & \dfrac{\partial\, v^2}{\partial\, x^1} & \dfrac{\partial\, v^3}{\partial\, x^1} \\[2ex] \dfrac{\partial\, v^1}{\partial\, x^2} & \dfrac{\partial\, v^2}{\partial\, x^2} & \dfrac{\partial\, v^3}{\partial\, x^2} \\[2ex] \dfrac{\partial\, v^1}{\partial\, x^3} & \dfrac{\partial\, v^2}{\partial\, x^3} & \dfrac{\partial\, v^3}{\partial\, x^3} \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

(cf. ad esempio in [6], [13])

1.14.2 Operatore divergenza

Divergenza di un vettore

Sia $\boldsymbol{v} = v^i\, \boldsymbol{e}_i$ una funzione vettoriale di classe C^1 dipendente dalle variabili x^i $(i = 1, 2, 3)$.

È possibile dimostrare che la seguente quantità

$$\frac{\partial\, v^1}{\partial\, x^1} + \frac{\partial\, v^2}{\partial\, x^2} + \frac{\partial\, v^3}{\partial\, x^3} \;=\; \frac{\partial\, v^i}{\partial\, x^i} \tag{1.55}$$

punto per punto è uno scalare indipendente dalla scelta delle coordinate; ovvero è uno scalare assoluto (intrinseco).

Ciò permette di introdurre la seguente

Definizione 1.14.3. *Lo scalare intrinseco (1.55) rappresenta la divergenza del vettore* $\boldsymbol{v}$ *e si denota con div* $\boldsymbol{v} \equiv \nabla\,\cdot\,v$.

È facile dimostrare la seguente identità:

Nota 1.14.2.

$$\nabla\,\cdot\,\mathbf{v} = \frac{\partial\, v^i}{\partial\, x^i} \;=\; Tr\,(\nabla\;\mathbf{v}\,) \tag{1.56}$$

Divergenza di un tensore

Si consideri il tensore doppio $T^{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$. È possibile dimostrare che le quantità ad un indice $\dfrac{\partial T^{ij}}{\partial x^i}$ e $\dfrac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}$ si trasformano secondo la legge tensoriale (1.3). Esse quindi definiscono due vettori. Più precisamente si ha:

Definizione 1.14.4. *Assegnato un tensore doppio, si possono definire le seguenti divergenze:*

(1.57) $$div\, T = \frac{\partial}{\partial x^i}\; T^{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i}\, \boldsymbol{e}_j =$$

$$= \boldsymbol{e}_1 \left(\frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial T^{31}}{\partial x^3} \right) + \boldsymbol{e}_2 \left(\frac{\partial T^{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial T^{32}}{\partial x^3} \right) + etc..$$

(1.58) $$div^T\, T = \frac{\partial}{\partial x^j}\; T^{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}\, \boldsymbol{e}_i =$$

$$= \boldsymbol{e}_1 \left(\frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial T^{13}}{\partial x^3} \right) + \boldsymbol{e}_2 \left(\frac{\partial T^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial T^{23}}{\partial x^3} \right) + etc..$$

Nota 1.14.3. *Le (1.57),(1.58) differiscono tra loro per l' indice sulla derivazione e se il tensore è simmetrico le due divergenze coincidono. Se il tensore è emisimmetrico le due divergenze sono opposte.*

Nota 1.14.4. *Si noti che mentre l' operatore gradiente fa passare da un tensore di ordine m ad un altro di ordine $m+1$, la divergenza abbassa di un grado l' ordine del tensore.*

1.14.3 Operatore rotore

Assegnato il vettore $\boldsymbol{v} = v^1(x^1,x^2,x^3)\boldsymbol{e}_1 + v^2(x^1,x^2,x^3)\boldsymbol{e}_2 + v^3(x^1,x^2,x^3)\boldsymbol{e}_3$ di classe C^1si ha la seguente

Definizione 1.14.5. *Gli scalari*

(1.59) $$\frac{\partial v^3}{\partial x^2} - \frac{\partial v^2}{\partial x^3} \qquad \frac{\partial v^1}{\partial x^3} - \frac{\partial v^3}{\partial x^1} \qquad \frac{\partial v^2}{\partial x^1} - \frac{\partial v^1}{\partial x^2}$$

rappresentano le componenti cartesiane del vettore rot $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v}$.

È possibile dimostrare che il $rot\boldsymbol{v}$ è indipendente dal riferimento. ([6])

[6] Si veda, ad esempio [5, pag 136]

Nota 1.14.5. *Il* $rot\,\boldsymbol{v}$ *può essere rappresentato simbolicamente mediante la scrittura:*

$$rot\,\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} . \tag{1.60}$$

Molteplici sono i significati fisici del $rot\,v$. Ad esempio a seconda che $\boldsymbol{v}$ rappresenti lo spostamento infinitesimo di un generico punto P di un continuo o la sua velocità, il $rot\,v$ coincide con il doppio del vettore rotazione $\boldsymbol{\psi}$ o la metà della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ relativo ad un elemento infinitesimo al quale appartiene P. Le leggi di Maxwell poi ci ricordano che il rotore è coinvolto sia per la valutazione della corrente elettrica che per quella magnetica di spostamento.

1.14.4 Operatore Laplaciano

Definizione 1.14.6. *L'operatore*

$$\triangle \ = \ div\, grad \equiv \nabla^2 \tag{1.61}$$

è detto operatore di Laplace. In coordinate cartesiane ortogonali si puo' esprimere come:([7]).

$$\triangle_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{1.62}$$

Definizione 1.14.7. *Le funzioni soluzione dell'equazione di Laplace:* $\triangle_2 = 0$, *si dicono funzioni armoniche.*

1.14.5 Operazioni

È possibile dimostrare che, considerata una funzione scalare f, un vettore $\boldsymbol{v}$ e un tensore $\mathbf{T}$, valgono le seguenti relazioni:([8])

$$div\,(\,f\,\boldsymbol{v}\,) = \boldsymbol{v}\cdot\nabla\, f \,+\, f\, div\,\boldsymbol{v} \tag{1.63}$$

$$div\,(\,\mathbf{T}\,\cdot\boldsymbol{v}\,) = \mathbf{T} : \nabla\,\boldsymbol{v} \,+\, div\, T\cdot\,\boldsymbol{v} \tag{1.64}$$

$$\triangle_2 \mathbf{v} = grad\,(div\mathbf{v}) - rot\ rot\,\mathbf{v} \tag{1.65}$$

[7] L'operatore di Laplace si indica anche con $\triangle_2$.
[8] Per una tavola piu' completa di proprieta' si puó consultare [10] pag 39 e pag 57

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times rot\, \mathbf{v} \tag{1.66}$$

dove per $\mathbf{T} : \nabla \boldsymbol{v}$ s' intende il prodotto scalare tra tensori (definizione (1.5.8)).

Inoltre valgono:

$$rot\ grad = 0 \qquad div\ rot = 0. \tag{1.67}$$

1.15 Coordinate curvilinee

Generalmente, per rappresentare un punto nello spazio mediante terne ordinate, si considerano le coordinate cartesiane. Tuttavia situazioni fisiche quali,ad esempio, il moto di un fluido all'esterno di una sfera, oppure .... possono richiedere l'utilizzo anche di altri possibili parametri, quali le coordinate cilindriche o le coordinate sferiche(anche dette coordinate polari nello spazio.)

Il passaggio da una riferimento all'altro segue delle leggi ben precise che qui si cercheranno di illustrare incominciando a puntualizzare alcuni aspetti del ben noto riferimento cartesiano.

Introdotta la terna cartesiana di versori $\{\mathbf{e}_i,\}_{i=1,2,3}$ siano (x^1, x^2, x^3) le coordinate del punto P nello spazio e sia $\mathbf{r}$ il vettore che ne individua la posizione.

Fissati (x^1, x^2), al variare di x^3 si descrive una retta parallela all'asse x^3. Analogamente, fissati (x^1, x^3) si puo' far variare di x^2 e fissati (x^2, x^3) si fa variare x^1. Si ottengono cosi' tre famiglie di rette dette *linee coordinate* del riferimento cartesiano che percio' viene anche detto riferimento rettilineo.

Le derivate parziali del vettore $\mathbf{r}$ rispetto ad (x^1, x^2, x^3) risultano uguali in ogni punto dello spazio ai versori degli assi:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} = \mathbf{e}_1; \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} = \mathbf{e}_2; \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3} = \mathbf{e}_3 \tag{1.68}$$

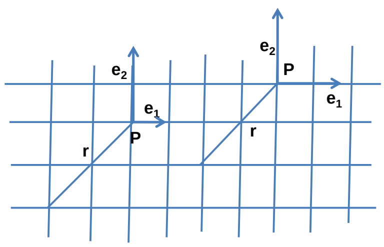


Figura 1.3: Linee coordinate nel piano cartesiano

e il riferimento cartesiano e' contrassegnato tanto dal carattere rettilineo delle linee coordinate quanto dalla costanza dei versori $\{\mathbf{e}_i,\}_{i=1,2,3}$ in tutti i punti dello spazio.

Si introducono ora i cosidetti sistemi di coordinate curvilinee.
Si definiscono *coordinate curvilinee,* una terna di parametri (y^1, y^2, y^3) in corrispondenza biunivoca con le (x^1, x^2, x^3):

$$\begin{cases} x^1 = f_1(y^1, y^2, y^3) \\ x^2 = f_2(y^1, y^2, y^3) \\ x^3 = f_3(y^1, y^2, y^3) \end{cases} \tag{1.69}$$

dove le $f_i (i = 1, 2, 3)$ sono funzioni non lineari.

Analogamente a quanto fatto prima, si possono definire le cosidette linee coordinate di un sistema curvilineo.

Si riconosce che i vettore $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^i}$ $(i = 1, 2, 3)$ sono tangenti in ogni punto dello spazio alle linee coordinate y^i $(i = 1, 2, 3)$ Pertanto se $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1,2,3}$ sono i versori tangenti a tali linee, risulta:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1} = h_1 \mathbf{u}_1; \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^2} = h_2 \mathbf{u}_2; \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^3} = h_3 \mathbf{u}_3 \tag{1.70}$$

dove

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^i} \right| \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.71}$$

sono detti i *fattori di scala* e se $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1,2,3}$ sono a due a due perpendicolari, il sistema di coordinate e' detto *ortogonale.*

Da cio' si possono ricavare le espressioni degli operatori piu' comuni tenendo presente che la procedura non e' semplicissima in quanto va considerata anche la variabilita' dei versori $\mathbf{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Esempio 1.15.2.

Si consideri il riferimento polare nel piano: (ρ, θ).

Per determinare le linee coordinate basta fissare ρ e far variare θ. In tal caso le curve sono delle circonferenze.(fig.1.4(a))

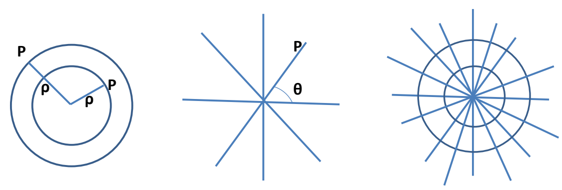


Figura 1.4: Linee coordinate a), b), c)

Poi, fissato θ, bisogna far variare ρ e si ottengono delle rette.(fig.1.4(b))
In definitiva, le linee coordinate descrivono una ragnatela (fig.1.4(c)).

Per determinare i fattori di scala si puo' procedere tenendo fissi uno alla volta le coordinate polari. Ad esempio fissato ρ ed introdotta l'ascissa curvilinea $s = \rho\,\theta$ si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial \theta} = \rho\,\mathbf{u}_1$$

e ρ e' il fattore di scala.

Se si fissa θ, al variare di ρ il punto si muove su rette e l'ascissa curvilinea s si identifica con ρ. Pertanto

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \mathbf{u}_2$$

e il fattore di scala e' 1.

Cosi' in generale, tenendo conto dei fattori di scala,mentre il gradiente di una funzione scalare in coordinate cartesiane e' dato da:

$$\nabla \equiv \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.72}$$

e' possibile dimostrare [6] che in coordinate curvilinee sara' espresso da

$$\nabla \equiv \mathbf{u}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial y^1} + \mathbf{u}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial y^2} + \mathbf{u}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial y^3} \tag{1.73}$$

mentre il laplaciano assumera' la forma:

$$\nabla^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} \left[\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{1}{h_i^2 h_j} \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial h_j}{\partial y^i} \right) + \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{1}{h_i^2} \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \right] \tag{1.74}$$

Considerato inoltre il vettore $\mathbf{v}(v^1, v^2 v^3)$, riesce:

$$\nabla \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left[\frac{v^j}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial y^j}\, \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j + \frac{1}{h_i} \left(\frac{\partial v^j}{\partial y^i} \frac{v^i}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial y^j} \right) \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \right] \tag{1.75}$$

Per altre formule si possono consultare, ad esempio, [10](pag 41); [6] (pag 135 e ss oppure [12] pag 126 e ss).

Coordinate cilindriche

Fissato nello spazio il sistema di coordinate cartesiane di versori $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3)$, si assuma nel piano (x^1, x^2) il sistema di coordinate polari (r, θ) con il polo nell'origine della terna e l'asse polare coincidente con il semiasse positivo della x^1. Dato il punto P e detto Q la sua proiezione nel piano (x^1, x^2), il punto P e' univocamente determinato dalle coordinate polari (r, θ) di Q e dalla coordinate $z = x^3$.

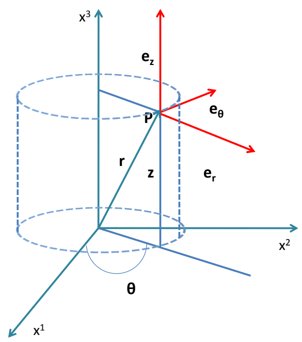


Figura 1.5: coordinate cilindriche

I parametri (r, θ, z) vengono detti coordinate cilindriche del punto P e indicati con $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$, i versori risulta:

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\theta, \;\; x^2 = r\sin\theta, \;\; x^3 = z, \\ \mathbf{r} = r\,\cos\theta\,\mathbf{e}_1 \,+\, r\sin\,\theta\mathbf{e}_2 \,+ z\,\mathbf{e}_3 \end{cases} \tag{1.76}$$

e

$$\mathbf{e_r} = \cos\theta\;\mathbf{e_1} + \sin\;\theta\;\;\mathbf{e_2};\;\;\mathbf{e}_\theta\;=-\sin\theta\,\mathbf{e_1}\;+\;\cos\theta\,\mathbf{e_2};\;\;\mathbf{e_z} = \mathbf{e_3}.$$

Ovvero, in forma matriciale riesce:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \tag{1.77}$$

e viceversa:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{\mathbf{r}} \\ \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} \tag{1.78}$$

Dalla $(1.76)_2$ si ricava:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \\ \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1) \end{cases} \tag{1.79}$$

per cui:

$$h_1^2 = 1 \qquad h_2^2 = r^2 \qquad h_3^2 = 1 \tag{1.80}$$

Analogo risultato si ottiene ragionando soltanto in termini di coordinate cilindriche conformemente a quanto gia' fatto nell'esempio precedente.

Cosi' risulta:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{e}_z \tag{1.81}$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

In particolare il gradiente di un vettore $\mathbf{v} = v^i(r, \theta, z)(i = 1, 2, 3)$ sara' individuato dalle nove componenti:

$$\nabla\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v^1}{\partial r} & \dfrac{\partial v^2}{\partial r} & \dfrac{\partial v^3}{\partial r} \\ \\ \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial v^1}{\partial \theta} - \dfrac{v^2}{r} & \dfrac{v_1}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v^2}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v^3}{\partial \theta} \\ \\ \dfrac{\partial v^1}{\partial z} & \dfrac{\partial v^2}{\partial z} & \dfrac{\partial v^3}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1.82}$$

e il laplaciano $\Delta\mathbf{v}$:

$$
(1.83) \qquad \begin{cases} (\nabla^2 \mathbf{v})_1 = \nabla^2 v^1 - \dfrac{v^1}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v^2}{\partial \theta} \\[2ex] (\nabla^2 \mathbf{v})_2 = \nabla^2 v^2 + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v^1}{\partial \theta} - \dfrac{v^2}{r^2} \\[2ex] (\nabla^2 \mathbf{v})_3 = \nabla^2 v^3 \end{cases}
$$

Coordinate sferiche o coordinate polari nello spazio

Indicata con (O, x^1, x^2, x^3) il sistema di coordinate cartesiane , sia P un punto diverso dall'origine e sia $r = |OP|$. Indicato con θ l'angolo che la proiezione di OP forma con l'asse di x^1, si indichi con $0 < \phi < \pi$ l'angolo che OP forma con l'asse x^3. Gli scalari (r, ϕ, θ) si chiamano coordinate sferiche o anche coordinate polari nello spazio.

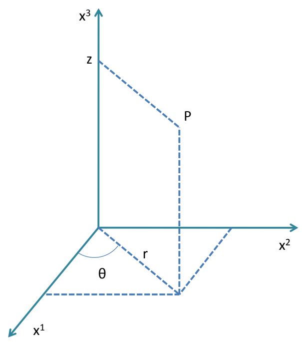


Figura 1.6: coordinate sferiche

Si ha:

$$
(1.84) \qquad \begin{cases} x^1 = r\cos\theta\ \sin\phi, \quad x^2 = r\sin\theta\ \sin\phi \quad x^3 = r\ \cos\phi, \\[2ex] \mathbf{r} = r\ \sin\phi\cos\theta\,\mathbf{e}_1\ +\ r\sin\theta\ \sin\phi\,\mathbf{e}_2\ + r\ \cos\phi\,\mathbf{e}_3 \end{cases}
$$

con

$$
(1.85) \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\[2ex] \boldsymbol{e}_\phi \\[2ex] \boldsymbol{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi\ \cos\theta & \sin\phi\ \sin\theta & \cos\phi \\[2ex] \cos\theta\ \cos\phi & \cos\phi\ \sin\theta & -\sin\phi \\[2ex] -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\[2ex] \boldsymbol{e}_2 \\[2ex] \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}
$$

ossia, reciprocamente:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi\,\cos\theta & \cos\theta\,\cos\phi & -\sin\theta \\ \sin\theta\,\sin\phi & \cos\phi\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\phi & -\sin\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_\theta \end{pmatrix} \tag{1.86}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\cos\theta\,\sin\phi,\,\sin\theta\sin\phi,\cos\phi) \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (r\cos\theta\cos\phi, r\sin\theta\cos\phi, -r\sin\phi) \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta\sin\phi, 0) \end{cases} \tag{1.87}$$

per cui i fattori di scala sono:

$$h_1^2 = 1 \qquad h_2^2 = r^2 \qquad h_3^2 = r^2\sin^2\phi \tag{1.88}$$

Nota 1.15.6. *Le (1.88) si possono determinare ragionando in termini di coordinate sferiche. Fissato ϕ, le coordinate r e θ divengono coordinate polari e si avra' $h_1 = 1$ e $h_2 = r$. Per determinare h_3, fissati r e θ, facciamo variare soltanto ϕ Il punto P descrive in tal caso una circonerenza di raggio pari ad $r\,\sin\phi$ e quindi $h_3 = r\sin\phi$.*

La rappresentazione per il gradiente e il laplaciano in tali coordinate e' data da:

$$\nabla \equiv \mathbf{e}_r\,\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\phi\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}, + \mathbf{e}_\theta\,\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{1.89}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{1.90}$$

In particolare indicato con $\mathbf{v}$ il vettore di coordinate $v^i(r,\phi,\theta)$ $(i = 1,2,3)$, risulta:

$$\nabla\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v^1}{\partial r} & \dfrac{\partial v^2}{\partial r} & \dfrac{\partial v^3}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v^1}{\partial\phi} - \dfrac{v^2}{r} & \dfrac{v^1}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v^2}{\partial\phi} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v^3}{\partial\phi} \\ \dfrac{1}{r\sin\phi}\dfrac{\partial v^1}{\partial\theta} - \dfrac{v^3}{r} & \dfrac{1}{r\sin\phi}\dfrac{\partial v^2}{\partial\theta} - \dfrac{v^3\cot\phi}{r} & \dfrac{v^1}{r} + \dfrac{v^2\cot\phi}{r} + \dfrac{1}{r\sin\phi}\dfrac{\partial v^3}{\partial\theta} \end{pmatrix}$$

Inoltre essendo $\nabla \cdot \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v})_{ii}$ riesce

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v^1) + \frac{1}{r \sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(v^2 \sin\phi) + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial v^3}{\partial \theta}$$

Introdotto con $\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]$ il tensore simmetrico della velocita' di deformazione, risulta:

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathbf{D}_{11} = \dfrac{\partial v^1}{\partial r} \qquad \mathbf{D}_{22} = \dfrac{v^1}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v^2}{\partial \phi} \\[2ex]
\mathbf{D}_{33} = \dfrac{v^1}{r} + \dfrac{v^2 \cot\phi}{r} + \dfrac{1}{r\sin\phi}\dfrac{\partial v^3}{\partial \theta} \\[2ex]
\mathbf{D}_{12} = \mathbf{D}_{21} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v^1}{\partial \phi} + r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v^2}{r}\right)\right] \\[2ex]
\mathbf{D}_{13} = \mathbf{D}_{31} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r\sin\phi}\dfrac{\partial v^1}{\partial \theta} + r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v^3}{r}\right)\right] \\[2ex]
\mathbf{D}_{23} = \mathbf{D}_{32} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r\sin\phi}\dfrac{\partial v^2}{\partial \theta} + \dfrac{\sin\phi}{r}\dfrac{\partial}{\partial \phi}\left(\dfrac{v^3}{\sin\phi}\right)\right]
\end{array}\right. \tag{1.91}$$

In base alla (1.65) e' possibile dimostrare [6] che le componenti di $\nabla^2 \mathbf{v}$ sono:

$$\left\{\begin{array}{l}
(\nabla^2 \mathbf{v})_1 = \nabla^2 v^1 - \dfrac{2v^1}{r^2} - \dfrac{2}{r^2\sin\phi}\dfrac{\partial}{\partial\phi}(v^2\, sin\phi) - \dfrac{2}{r^2\sin\phi}\dfrac{\partial v^3}{\partial\theta} \\[2ex]
(\nabla^2 \mathbf{v})_2 = \nabla^2 v_2 + \dfrac{2}{r^2} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v^1}{\partial \theta} - \dfrac{v^2}{r^2\sin^2\theta} - \dfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial v^3}{\partial\phi} \\[2ex]
(\nabla^2 \mathbf{v})_3 = \nabla^2 \mathbf{v}_3 + \dfrac{2}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial v^1}{\partial\phi} + \dfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial v^2}{\partial \phi} - \dfrac{v^3}{r^2\sin^2\theta}
\end{array}\right. \tag{1.92}$$

Volendo presentare una applicazione di vettori e tensori espressi in coordinate sferiche, l'esempio che segue considera il moto di un fluido all'esterno di una sfera sotto condizioni al contorno di tipo frontiera libera [1].

Esempio 1.15.3.

Fissato un dominio D esterno ad una sfera D_0, si consideri in tale dominio esterno, il moto di un fluido newtoniano incompressibile dovuto ad una sorgente posta nel punto $O \in D_0$.

Introdotte le coordinate polari (r, θ, ϕ) in ogni punto P del dominio D, si puo' considerare il potenziale cinetico rappresentato dalla funzione armonica [4]

$$\phi(r) = -\frac{q}{4\pi r},$$

dove q e' la portata della sorgente che coincide il flusso di $\nabla\,\phi(r)$ attraverso una qualunque superficie chiusa circostante il punto O. Quando $q > 0$ si e' in presenza di una sorgente (source), quando $q < 0$ si ha un pozzo (sink).

Se il fluido e' soggetto ad una forza conservativa $F = \nabla U$,il corrispondente moto stazionario deve soddisfare le seguenti equazioni di Navier-Stokes:

$$\begin{cases} div\,\mathbf{v} \;=\; 0 \\ \\ \mathbf{v}\cdot\;\nabla\;\mathbf{v} \;=\; \nabla\;U_p \;-\; \dfrac{1}{\rho}\;\nabla\;p\;+\mu\,\triangle_2\,\mathbf{v}, \end{cases} \tag{1.93}$$

le cui soluzioni sono date da: [4]

$$(\mathbf{v}, p) = \left(\frac{q}{4\pi r^2}\;\mathbf{e}_r, \quad -\frac{q^2}{32\pi^2 r^4} + U + cost\right). \tag{1.94}$$

dove $\nabla^2\mathbf{v} = 0$.

Introdotto con $\mathbf{n}_i$ la normale interna a ∂D (e quindi esterna al dominio considerato) e con $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^T)$ il tensore di velocita' di deformazione, e' facile verificare che tale moto soddisfa le seguenti condizioni iniziali e le condizioni al contorno di tipo frontiera libera:

$$\begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) \;= \mathbf{v}_0(x) & \mathbf{x} \in D \\ \\ \mathbf{v}(P, t)\;\cdot\mathbf{n}_i = -\dfrac{q}{4\pi\,r_0^2} & \text{on}\;\; \partial D_0, \\ \\ \mathbf{n}_i\cdot\mathbf{D}\times\;\mathbf{n}_i \;= 0 & \text{on}\; \partial D_0. \end{cases} \tag{1.95}$$

In questo caso infatti il tensore $\mathbf{D}$ e' individuato dalle componenti:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\dfrac{q}{2\pi r^3} & 0 & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{q}{4\pi r^3} & 0 \\ \\ 0 & 0 & \dfrac{q}{4\pi r^3} \end{pmatrix}$$

e $\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{D}\times\;\mathbf{n}_i$ e' nullo in quanto $\mathbf{n}_i = -\mathbf{e}_r$ e si ha

$$\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{D}\times\;\mathbf{n}_i \;\;=\; \frac{q}{2\pi r^3}\;\mathbf{e}_r\;\times\mathbf{e}_r\;=\;0 \tag{1.96}$$

Bibliografia

1. F.Capone, M.De Angelis *On the energy stability of fluid motions in exterior of a sphere under free boundary like conditions* Rend. Acc. Sci Fis.Mat Napoli serie IV vol LX anno CXXXII 1993
2. C. Banfi *Introduzione alla meccanica dei continui* Ed Cedam Padova 1990
3. Simonetta Di Sieno, Angelo Guerraggio, Pietro Nastasi *La Matematica dopo l'unitá. Gli anni tra le due guerre mondiali* Marcos y Marcos, 1998
4. B. Finzi *Lezioni di Aeronautica* Tamburini (1960)
5. B. Finzi, M. Pastori *Calcolo tensoriale e applicazioni* Ed Zanichelli Bologna. Italia (1971)
6. A. M. Goodbody, *Cartesian Tensors with applications to Mechanics, Fluid Mechanics and elasticity* Wiley 1982
7. Michio Kaku *Il cosmo di Einstein* Ed Codice Torino, italia 2005
8. M. Kline *Storia del pensiero matematico* vol II (dal settecento a oggi . Einaudi 1972
9. Abraham Pais *La scienza e la vita di Albert Einstain* Boringhieri 2008
10. J.N.Reddy *An Introduction to Continuum Mechanics*Cambridge 2010
11. A. D'Anna, P.Renno *Elementi di Meccanica Razionale I* Eedizione Cuen 1992
12. M.R. Spiegel *Manuale di Matematica* Etas Libri 1974
13. S. Rionero *Lezioni di meccanica razionale* Ed Liguori. Napoli Italia 1976
14. F. Toscano *Il genio e il gentiluomo* Ed Sironi Milano Italia 2004

Indice

Indice analitico