Funzioni limitate, estremi di una funzione.

Funzioni limitate

Def. Assegnata una funzione

$$f\colon A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq R, \ A, B \neq \emptyset$$

- si dice che f è limitata superiormente se il suo insieme immagine $f(A)$ è limitato superiormente e cioè se $f(A)$ ammette maggioranti

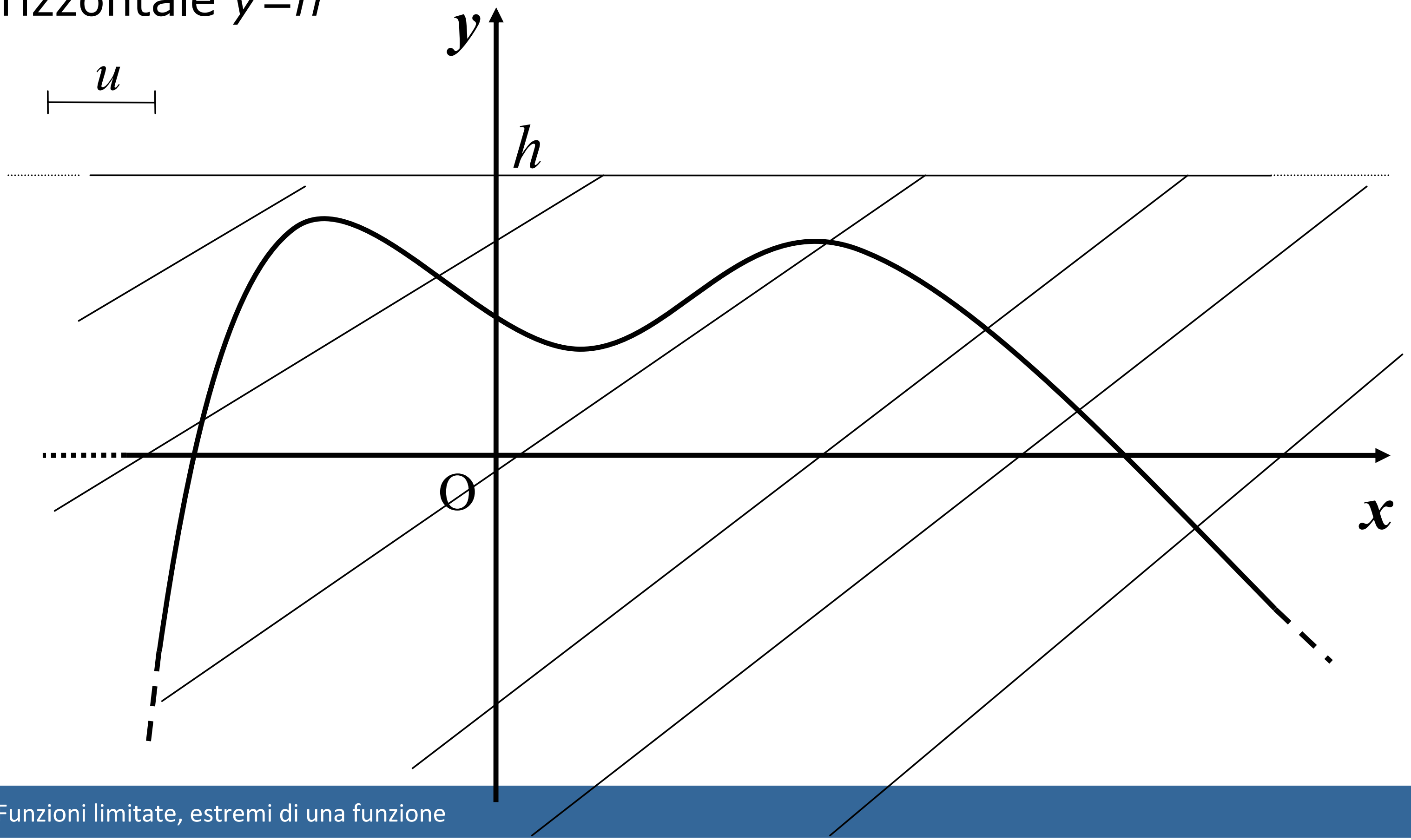
- si dice che f è limitata inferiormente se il suo insieme immagine $f(A)$ è limitato inferiormente e cioè se $f(A)$ ammette minoranti

- si dice che f è limitata se il suo insieme immagine $f(A)$ è limitato sia superiormente che inferiormente

Funzione limitata superiormente

$$f \text{ limitata superiormente} \Leftrightarrow \exists h \in R : f(x) \leq h, \forall x \in A$$

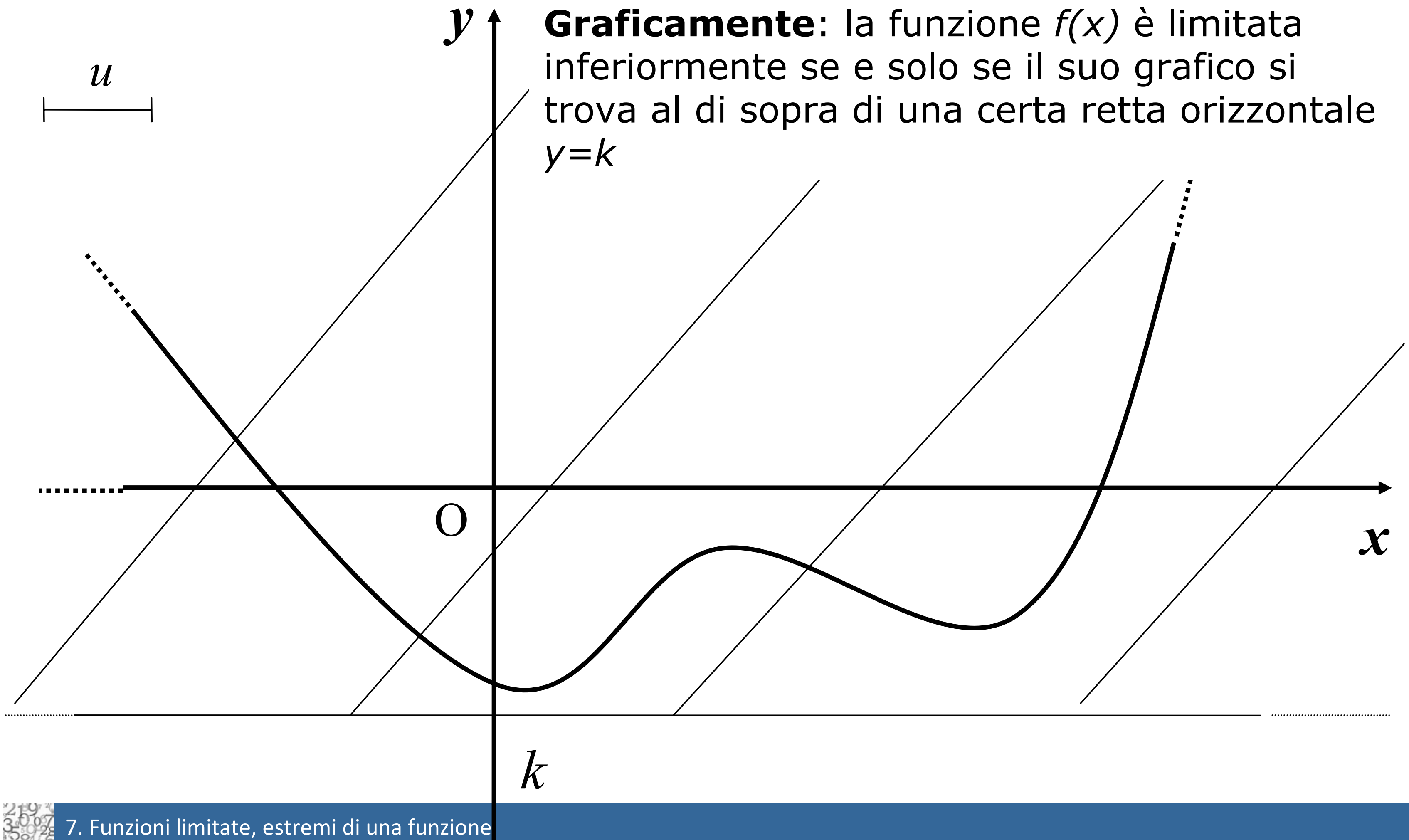
Graficamente: la funzione *f(x)* è limitata superiormente se e solo se il suo grafico si trova al di sotto di una certa retta orizzontale *y=h*



Funzione limitata inferiormente

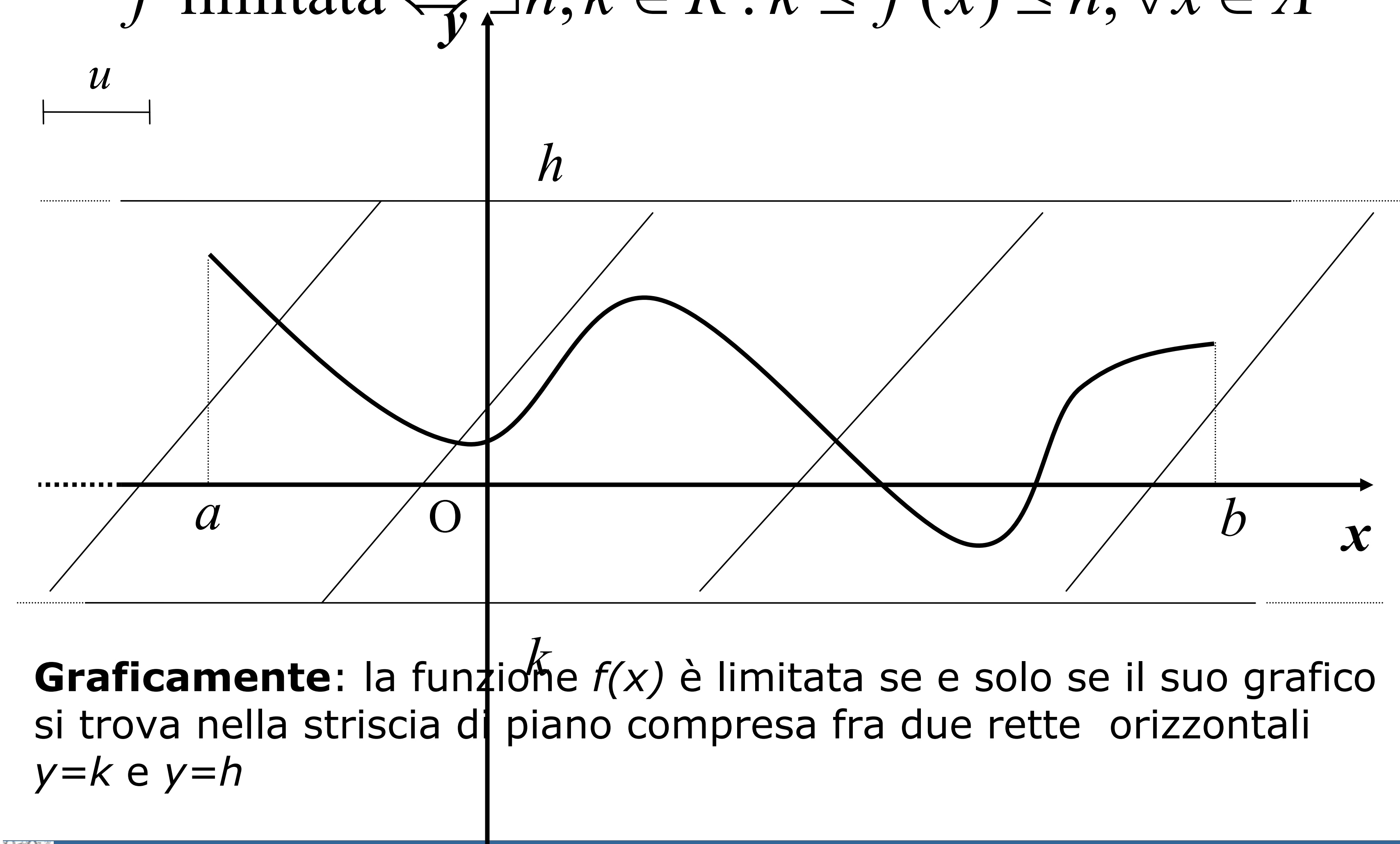
$$f \text{ limitata inferiormente} \Leftrightarrow \exists k \in R : f(x) \geq k, \forall x \in A$$

Graficamente: la funzione *f(x)* è limitata inferiormente se e solo se il suo grafico si trova al di sopra di una certa retta orizzontale *y=k*



Funzione limitata

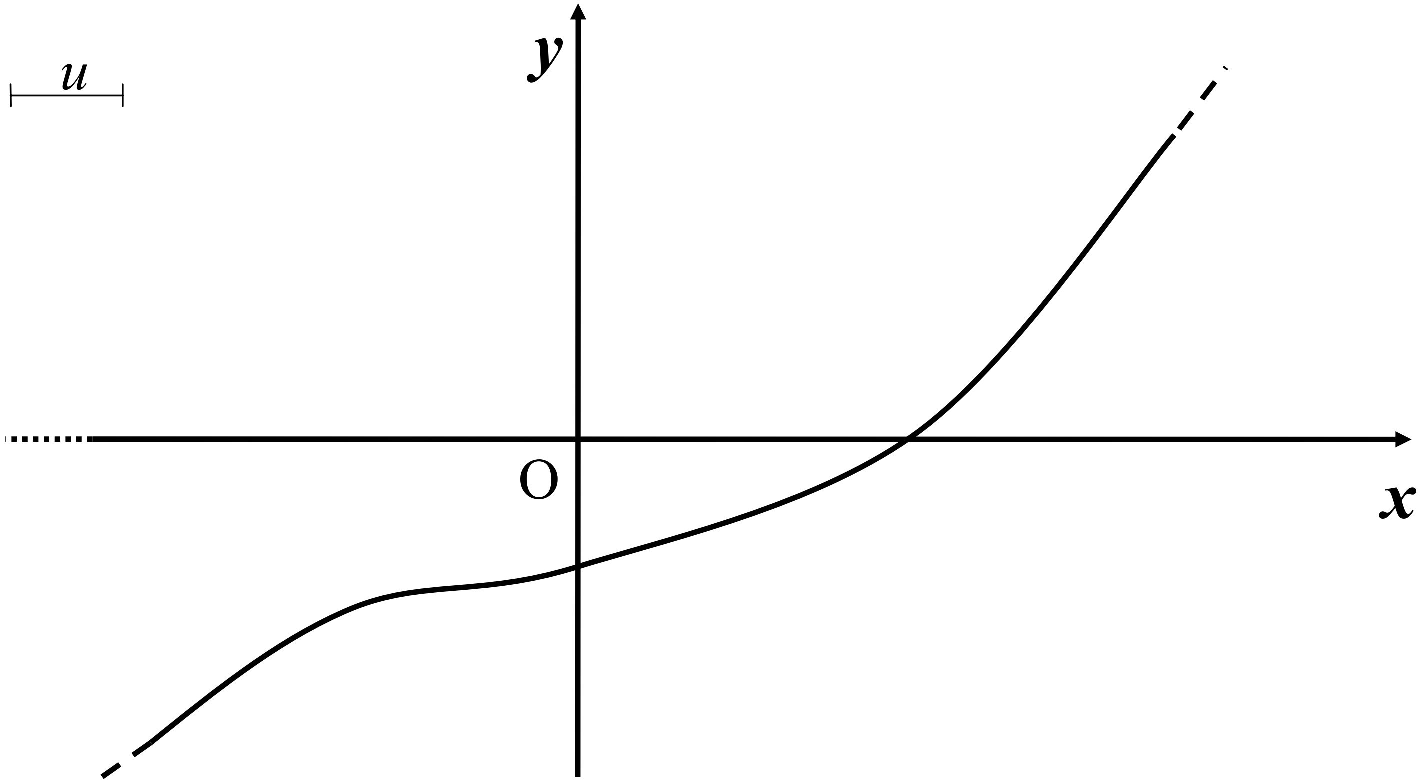
$$f \text{ limitata} \Leftrightarrow \exists h, k \in R : k \le f(x) \le h, \forall x \in A$$



Graficamente: la funzione *f(x)* è limitata se e solo se il suo grafico si trova nella striscia di piano compresa fra due rette orizzontali *y=k* e *y=h*

Funzione non limitata

Una funzione non limitata è una funzione il cui insieme immagine non ammette né maggioranti né minoranti



Estremo superiore

Def. Sia assegnata una funzione

$f\colon A \longrightarrow B$, con $A, B \subseteq R$, $A, B \neq \varnothing$

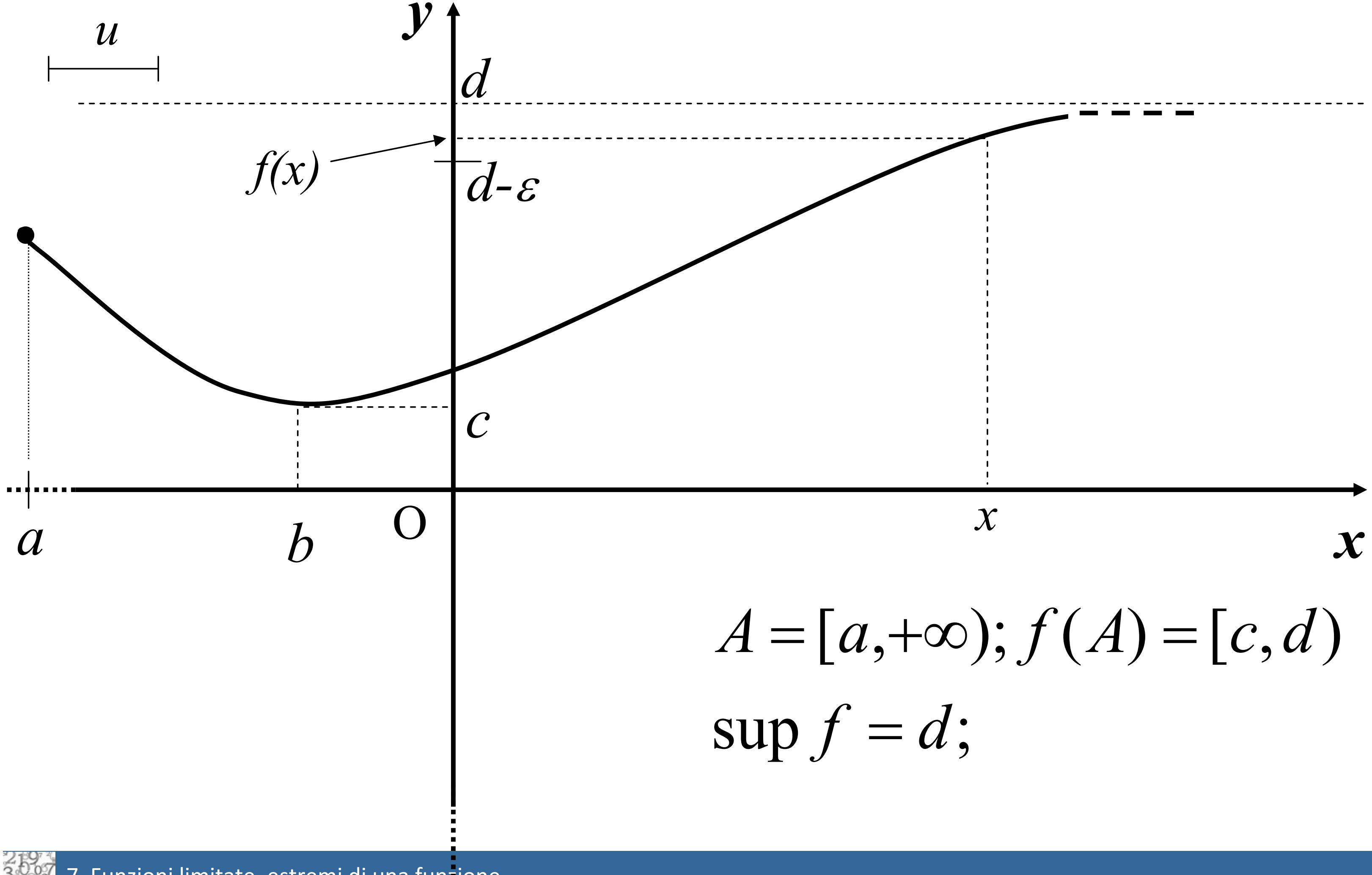
limitata superiormente ($\Rightarrow$il suo codominio $f(A)$ ammette maggioranti). Allora si dice che M è l'estremo superiore di f se è l'estremo superiore di $f(A)$. In simboli:

$$M = \sup f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A\,, f(x) \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < f(x) \end{cases}$$

Se f non è limitata allora si pone: $\sup f = +\infty$

Esempio:

Esercizio: dal grafico dedurre dominio, codominio, estremo superiore



$$A=[a,+\infty);\, f(A)=[c,d)$$

$$\sup f=d;$$

Estremo inferiore

Def. Sia assegnata una funzione

$f\colon A \longrightarrow B$, con $A, B \subseteq R$, $A, B \neq \varnothing$

limitata inferiormente ($\Rightarrow$il suo codominio $f(A)$ ammette minoranti). Allora si dice che M è l'estremo inferiore di f se è l'estremo inferiore di $f(A)$. In simboli:

$$m = \inf f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A\,, f(x) \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : m + \varepsilon > f(x) \end{cases}$$

Se f non è limitata allora si pone: $\inf f = -\infty$

Massimo assoluto

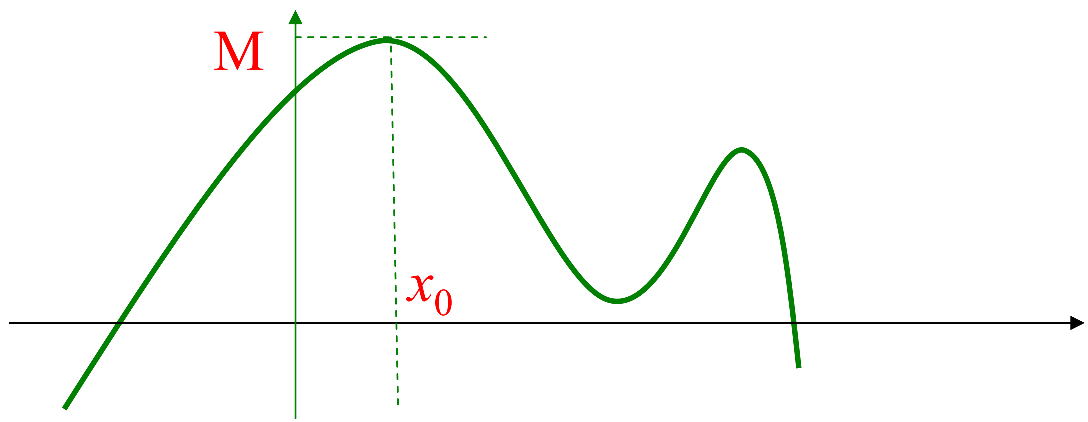
Def. Assegnata una funzione

$$f\colon A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq R,\ A, B \neq \varnothing$$

• si dice che il numero reale M è il massimo assoluto di f se M è un valore appartenente all'immagine di f e se è il più grande valore

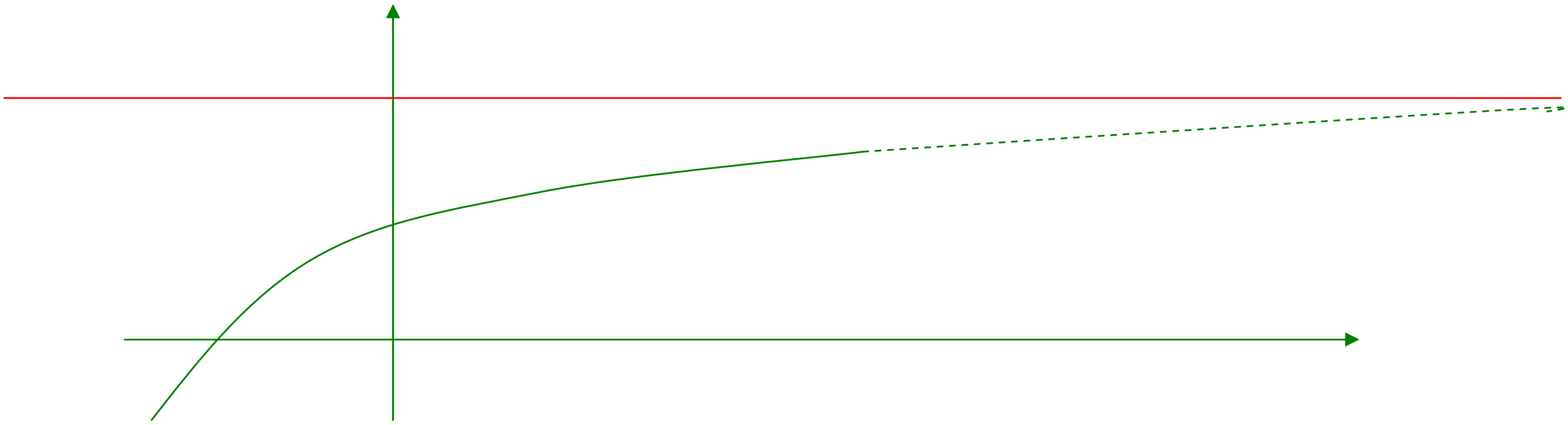
$$M = \max f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in A : f(x_0) = M \\ \forall x \in A, f(x) \leq M \end{cases}$$

x_0 punto di massimo assoluto



Massimo assoluto: osservazioni

- Il massimo di una funzione, se esiste, è il valore massimo assunto dalla funzione
- Se una funzione ammette massimo assoluto, essa è limitata superiormente
- Se una funzione è limitata superiormente essa ammette estremo superiore, non necessariamente massimo assoluto



Massimo assoluto: osservazioni

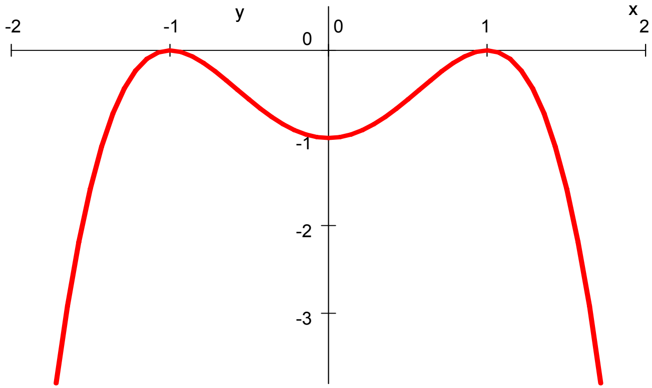
- Il massimo di una funzione, se esiste, è unico
- Una funzione può avere più punti di massimo

Esempio

$$f(x) = -(x-1)^2(x+1)^2$$

$$M = 0$$

$$x_0 = 1; \quad x_1 = -1$$



Minimo assoluto

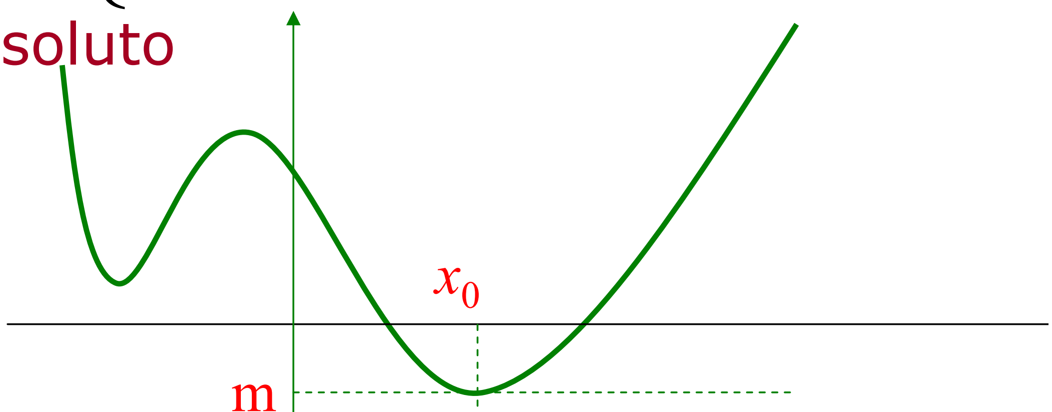
Def. Assegnata una funzione

$$f\colon A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq R,\ A, B \neq \varnothing$$

- si dice che il numero reale m è il minimo assoluto di f se m è un valore appartenente all'immagine di f e se è il più piccolo valore

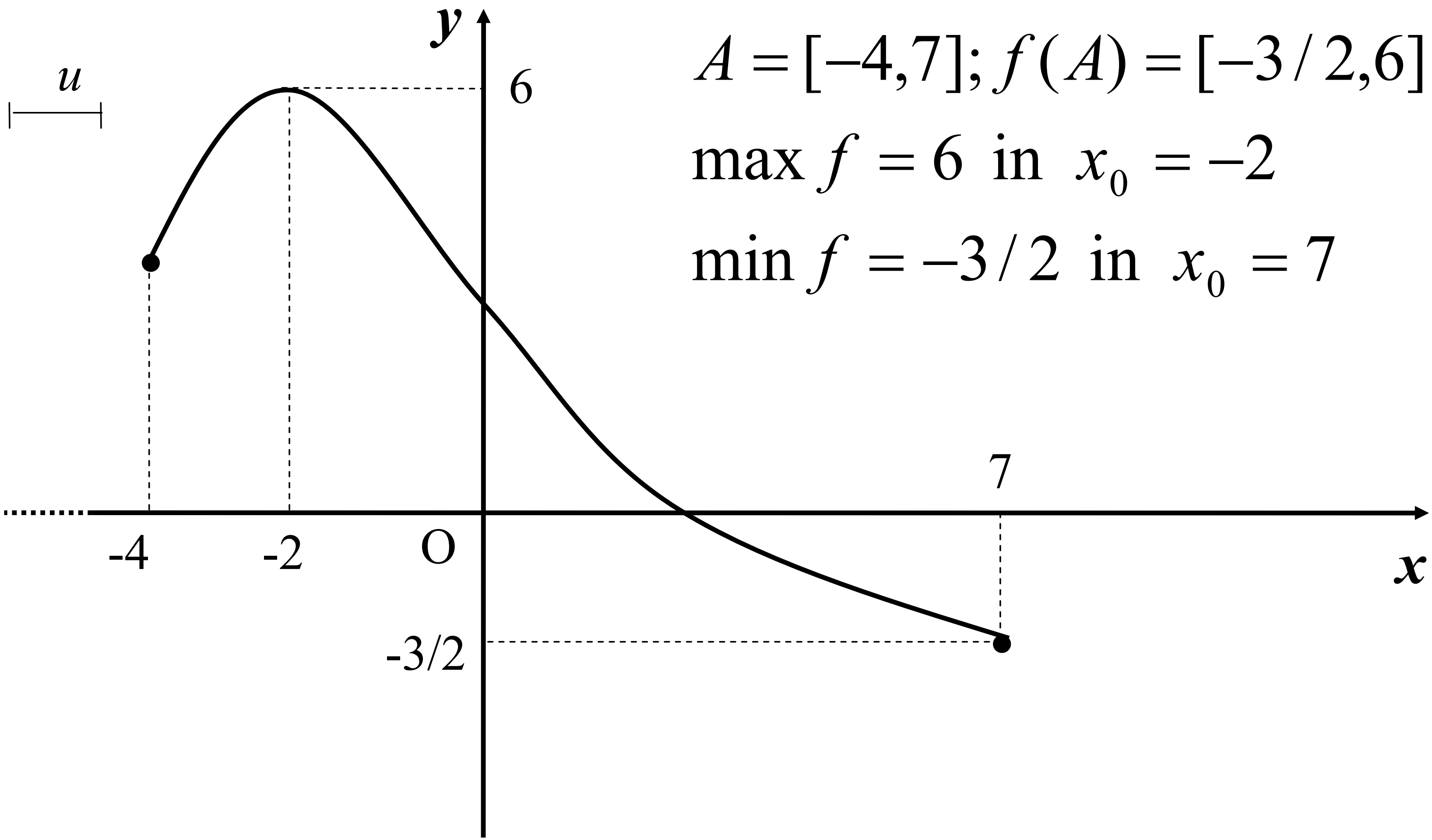
$$m = \min f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in A : f(x_0) = m \\ \forall x \in A, f(x) \geq m \end{cases}$$

x_0 punto di minimo assoluto



Esempio

Esercizio: dal grafico dedurre dominio, codominio, massimo e minimo



$$A = [-4,7]; f(A) = [-3/2, 6]$$

$$\max f = 6 \text{ in } x_0 = -2$$

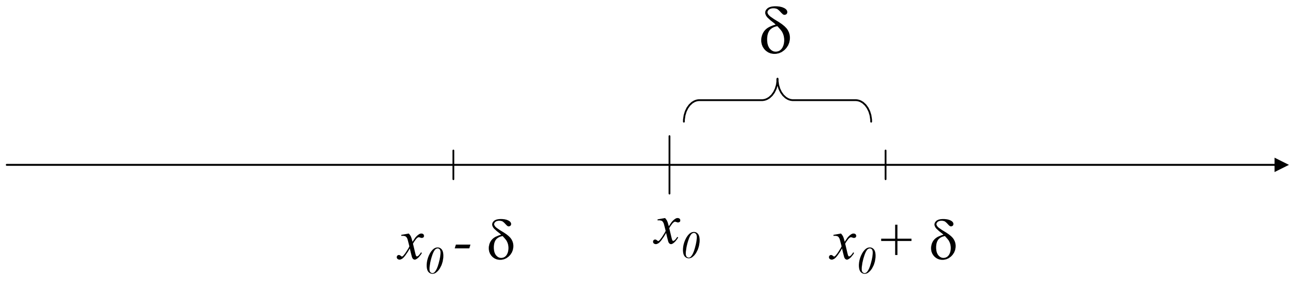
$$\min f = -3/2 \text{ in } x_0 = 7$$

Intorno

Def. Fissato un punto x_0 sull'asse reale si definisce intorno I_{x0} del punto x_0 un intervallo aperto contenente x_0.

Solitamente, detta δ la semi-ampiezza di tale intervallo, l'intorno si indica come segue

$$\left(x_0 - \delta, x_0 + \delta\right)$$



Massimo relativo

Def. Assegnata una funzione

$$f\colon A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq R,\ A, B \neq \emptyset$$

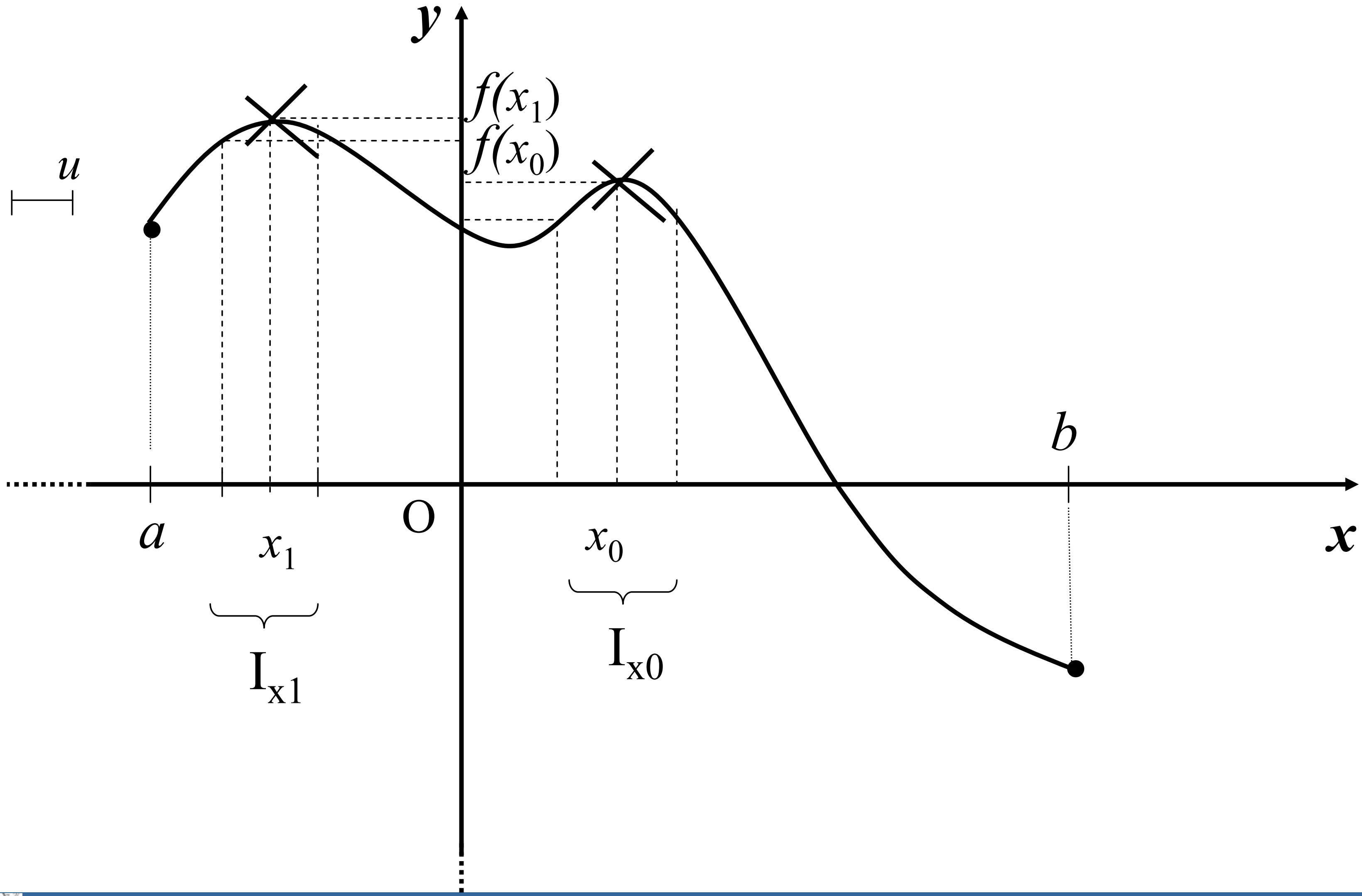
- dato un punto x_0 di A si dice che $L = f(x_0)$ è un massimo relativo per f se

$$\exists \text{ intorno } I_{x_0} \text{ tale che}$$

$$\forall x \in I_{x_0} \cap A, f(x) \leq L$$

x_0 punto di massimo relativo

Massimo relativo: esempio



Minimo relativo

Def. Assegnata una funzione

$$f\colon A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq R, \; A, B \neq \varnothing$$

- dato un punto x_0 di A si dice che $l = f(x_0)$ è un minimo relativo per f se

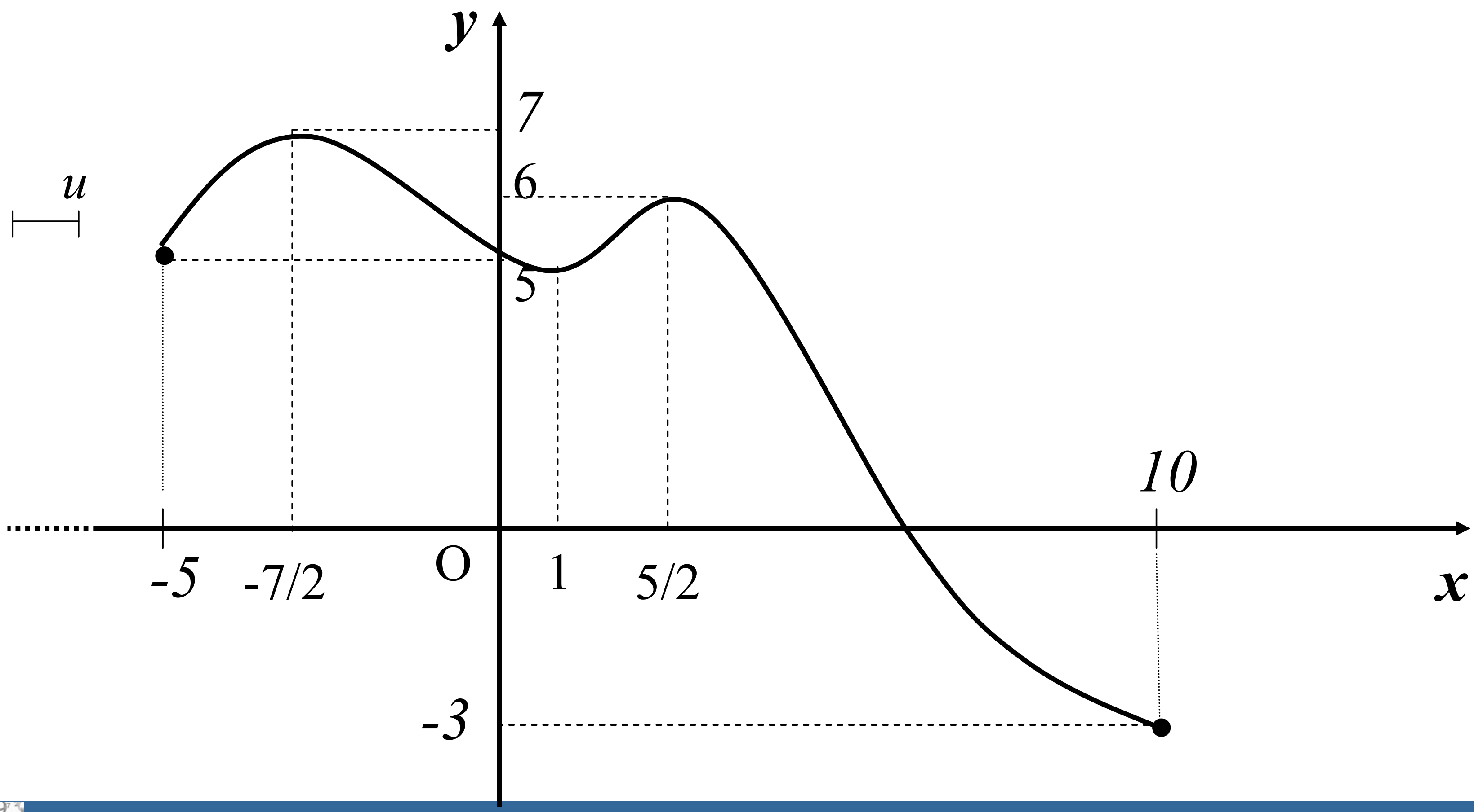
$$\exists \text{ intorno } I_{x_0} \text{ tale che}$$

$$\forall x \in I_{x_0} \cap A, f(x) \geq l$$

x_0 punto di minimo relativo

Esempio

Esercizio: Dal grafico di f dedurre dominio, immagine, massimo (rel e ass), minimo (rel e ass), estremo superiore e inferiore di f, i valori f(0) e f(10) e i valori x tali che f(x)=5



Esempio

Esercizio. Dal grafico di f determinare dominio, immagine, massimo (rel e ass), minimo (rel e ass), estremo superiore e inferiore di f, i valori f(-2) e f(9/2) e i valori x tali che f(x)=0