

COMPLEMENTI DEL CORSO DI MATEMATICA

Anno Accademico 2012/2013

Prof. Francesca Visentin

CAPITOLO I

Elementi di teoria degli insiemi e dei numeri

1. Notazioni.

Cominciamo con indicare alcuni dei simboli matematici che useremo più di frequente nel seguito:

| | |
|-------------------|----------------------------|
| $=$ | uguale |
| \neq | diverso |
| \equiv | equivalente |
| $>$ | maggiore |
| $<$ | minore |
| \geq | maggiore o uguale |
| \leq | minore o uguale |
| \in | appartenente |
| \notin | non appartenente |
| \exists | esiste |
| \forall | per ogni |
| $:$ | tale che |
| \setminus | tale che |
| \Rightarrow | implica |
| \Leftrightarrow | equivale |
| \subseteq | contenuto |
| \subset | contenuto strettamente |
| $\not\subset$ | non contenuto strettamente |
| \cup | unione |
| \cap | intersezione |
| ∞ | infinito |
| \emptyset | vuoto |

| | |
|----------------|----------------------------------|
| \mathbb{N} | insieme dei numeri naturali da 1 |
| \mathbb{N}_0 | insieme dei numeri naturali da 0 |
| \mathbb{Z} | insieme dei numeri relativi |
| \mathbb{Q} | insieme dei numeri razionali |
| \mathbb{R} | insieme dei numeri reali |

2. Elementi di teoria degli insiemi.

2.1 Insiemi e sottoinsiemi

Consideriamo come primitivi i concetti di insieme, ente e proprietà. Ogni insieme viene caratterizzato dalle proprietà che sono verificate da tutti e soli gli elementi che lo costituiscono.

Sono esempi di insiemi: $S_1 = \{x: x \in \mathbb{Z}, x < 2\}$ (insieme infinito), $S_2 = \{\text{automobili immatricolate in Italia}\}$ (insieme finito), $S_3 = \{\text{città italiane la cui iniziale è P}\}$ (insieme finito), $S_4 = \{\text{studenti iscritti all'università "Federico II"}\}$ (insieme finito), e, naturalmente \mathbb{N} , \mathbb{N}_0 , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} (tutti insiemi infiniti).

Una proprietà verificata solo da alcuni elementi di un insieme S individua una parte di S che si dice sottoinsieme di S . Una proprietà falsa per ogni elemento di S (cioè che non è verificata da nessun elemento di S) si dice che individua l'insieme vuoto: \emptyset . Si assume che l'insieme vuoto, visto come l'insieme privo di elementi, è sottoinsieme di ogni insieme. Ad esempio l'insieme $\{-1, 1\}$ è un sottoinsieme di S_1 , l'insieme $\{\text{automobili immatricolate a Napoli}\}$ è un sottoinsieme di S_2 .

2.2 Inclusione

Sia S un insieme e siano X , Y due sottoinsiemi di S . Si dice che X è contenuto in Y , e si scrive $X \subseteq Y$, se ogni elemento di X è anche elemento di Y . Si dice che X è contenuto strettamente in Y , e si scrive $X \subset Y$, se ogni elemento di X è anche elemento di Y e i due insiemi X , Y non coincidono (cioè esiste almeno un elemento di Y che non appartiene ad X).

Esempi.

$S = \{\text{studenti iscritti alla Facoltà di Scienze M.F.N. dell'università "Federico II"}\}$

$X = \{\text{studenti iscritti al I anno del corso di Laurea in Fisica}\}$

$Y = \{\text{studenti iscritti al corso di Laurea in Fisica}\}$

X , Y sono sottoinsiemi di S e $X \subseteq Y$.

$S=\mathbb{N}$, $X=\{1,3,5\}$, $Y=\{1,2,3,5,8\}$, $W=\{1,2\}$. X , Y , W sono sottoinsiemi di \mathbb{N} . Si ha: $X\subseteq Y$, mentre W non è contenuto in X e neppure in Y .

2.3 Unione e intersezione di insiemi

Sia S un insieme e siano X , Y due sottoinsiemi di S . Si dice unione di X e Y , e si indica con il simbolo $X\cup Y$, il sottoinsieme di S :

$$X\cup Y = \{x \in S : x \in X \text{ o } x \in Y\},$$

cioè l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi dati. Se $X\subseteq Y$, si ha $X\cup Y=Y$.

In modo analogo si definisce l'unione di un numero n qualsiasi di sottoinsiemi X_1, X_2, \dots, X_n di S :

$$X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = \{x \in S : x \in X_1 \text{ o } x \in X_2, \text{ o } \dots \text{ o } X_n\}.$$

Si può definire allo stesso modo l'unione di una famiglia qualsiasi di insiemi (finita o infinita): $X_i, i \in \mathcal{I}$ (\mathcal{I} insieme di indici finito o infinito):

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i = \{x \in S : \exists j \in \mathcal{I} : x \in X_j\}.$$

Sia S un insieme e siano X , Y due sottoinsiemi di S . Si dice intersezione di X e Y , e si indica con il simbolo $X\cap Y$, il sottoinsieme di S :

$$X\cap Y = \{x \in S : x \in X \text{ e } x \in Y\},$$

cioè l'insieme degli elementi che appartengono sia a X che a Y (cioè contemporaneamente ad entrambi gli insiemi dati). Due sottoinsiemi X e Y di S che non hanno elementi in comune si dicono disgiunti e si scrive $X\cap Y=\emptyset$. Se invece $X\subseteq Y$, si ha $X\cap Y=X$.

In modo analogo si definisce l'intersezione di un numero n qualsiasi di sottoinsiemi X_1, X_2, \dots, X_n di S :

$$X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n = \{x \in S : x \in X_1 \text{ e } x \in X_2, \text{ e } \dots \text{ e } X_n\}.$$

Si può definire allo stesso modo l'intersezione di una famiglia qualsiasi di insiemi (finita o infinita): $X_i, i \in \mathcal{I}$ (\mathcal{I} insieme di indici finito o infinito):

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} X_i = \{x \in S : x \in X_j, \forall j \in \mathcal{I}\}.$$

Esempi

1) $S = \{\text{città italiane}\}$, $X = \{\text{città italiane la cui iniziale è M}\}$, $Y = \{\text{città italiane con più di 500000 abitanti}\}$, $X\cup Y = \{\text{tutte le città italiane la cui iniziale è M e tutte le città italiane con più di 500000 abitanti}\}$, $X\cap Y = \{\text{città italiane la cui iniziale è M che hanno più di 500000 abitanti}\}$. Notiamo che $X\cap Y \neq \emptyset$, perché almeno la città di Milano ha entrambe le caratteristiche.

2) $S=\mathbb{N}$, $X=\{1,2,5\}$, $Y=\{1,3,5,7\}$, $X\cup Y=\{1,2,3,5,7\}$, $X\cap Y=\{1,5\}$.

3) $S=\mathbb{R}$, $X=\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$, $Y=\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < 5\}$, $X\cup Y=\{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$, $X\cap Y=\{2\}$;

4) $S=\mathbb{R}$, $X=\{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$, $Y=\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < 5\}$, $X\cup Y=\{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$, $X\cap Y=\emptyset$.

2.4 Ricoprimento e partizione di un insieme

Sia S un insieme e sia $\{X_i, i \in \mathcal{I}\}$ una famiglia di sottoinsiemi di S . Gli insiemi X_i costituiscono un ricoprimento di S se $S \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i$; costituiscono una partizione di S se sono non vuoti, disgiunti a due a due, e $S = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i$.

Esempio

Sia $S = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 9\}$,

gli insiemi $X_1 = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 3\}$, $X_2 = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 5\}$, $X_3 = \{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x < 7\}$, $X_4 = \{x \in \mathbb{R} : 4 < x \leq 8\}$, $X_5 = \{x \in \mathbb{R} : 7 < x \leq 9\}$ costituiscono un ricoprimento di S ;

gli insiemi $X_1 = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 3\}$, $X_2 = \{3\}$, $X_3 = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x \leq 6\}$, $X_4 = \{x \in \mathbb{R} : 6 < x < 9\}$ costituiscono una partizione di S .

2.5 Differenza di insiemi, complementare di un insieme

Sia S un insieme e siano X, Y due sottoinsiemi di S . Si dice differenza tra X e Y e si indica con $X \setminus Y$, oppure $X - Y$, l'insieme degli elementi di X che non appartengono ad Y :

$$X - Y = \{x \in S : x \in X \text{ e } x \notin Y\}.$$

Naturalmente $X - Y \neq Y - X$. Inoltre se $X \cap Y = \emptyset$ si ha $X - Y = X$ e $Y - X = Y$.

Se $Y \subseteq X$, la differenza $X - Y$ si dice complementare di Y rispetto a X e si indica con $C_X Y$.

Il complementare di un sottoinsieme X di S rispetto ad S si indica semplicemente con CX .

Esempi

1) $S = \{\text{città italiane}\}$, $X = \{\text{città italiane la cui iniziale è M}\}$, $Y = \{\text{città italiane con più di 500000 abitanti}\}$, $X - Y = \{\text{tutte le città italiane la cui iniziale è M che hanno meno di 500000 abitanti}\}$, $Y - X = \{\text{città italiane che hanno più di 500000 abitanti e la cui iniziale non è M}\}$.

2) $S = \{\text{automobili immatricolate in Italia}\}$, $X = \{\text{automobili immatricolate a Napoli}\}$, $CX = \{\text{automobili immatricolate in Italia tranne che a Napoli}\}$.

3) $S = \mathbb{N}$, $X = \{1, 2, 5\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$, $X - Y = \{1, 2\}$, $Y - X = \{3, 4\}$.

4) $S = \mathbb{R}$, $X = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$, $Y = \{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x < 7\}$, $X \cap Y = \emptyset$, $X - Y = X$, $Y - X = Y$.

5) $S = \mathbb{R}$, $X = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 8\}$, $Y = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 5\}$, $X - Y = \{x \in \mathbb{R} : 5 < x \leq 8\}$, $Y - X = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 3\}$.

3. Insiemi numerici e loro proprietà

Abbiamo già introdotto l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ con la sua generalizzazione $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Tali numeri sono insufficienti anche per effettuare le

operazioni più semplici, infatti solo la somma e il prodotto di due numeri naturali danno ancora un numero naturale, per la sottrazione questo non è più vero; si introduce allora l'insieme dei numeri relativi $\mathbf{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Anche questo non basta a dare sempre senso alla divisione. Nasce allora l'esigenza di ampliare la classe dei numeri relativi, si arriva così all'introduzione dei numeri razionali. L'insieme di tali numeri viene indicato con $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0 \right\}$ e consiste quindi di tutti i numeri frazionari (compresi i numeri interi) positivi o negativi. Quindi si ha: $\mathbf{N} \subset \mathbf{N}_0 \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. Osserviamo che nel sistema di numerazione decimale un qualunque numero razionale si può sempre scrivere in forma di numero decimale periodico. Ad esempio $1/3 = 0,333\dots$; $1/5 = 0,200\dots$; $1/7 = 0,142857142857\dots$. Dati due numeri razionali, si possono eseguire su di essi le quattro operazioni, ovviamente tranne la divisione per zero, ottenendo ancora un numero razionale. Questo non è più vero quando si passa ad operazioni più complesse come l'estrazione di radice: ad esempio non è possibile calcolare $\sqrt{2}$ nell'insieme dei numeri razionali, in altri termini non esiste alcun numero razionale il cui quadrato è 2. Questo problema è collegato al concetto di commensurabilità e incommensurabilità di segmenti: ad esempio $\sqrt{2}$ rappresenta la misura della diagonale di un quadrato di lato unitario, la quale diagonale è incommensurabile con il lato del quadrato. È quindi necessario considerare una classe ancora più ampia di numeri in modo da dare un senso ad altre operazioni, oltre le quattro fondamentali, come ad esempio l'estrazione di radice quadrata di un numero positivo o il calcolo del logaritmo di un numero positivo. Si introduce così l'insieme \mathbf{R} dei numeri reali che verifica ovviamente la condizione: $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. La più semplice definizione che si può dare di numero reale è la seguente: un numero reale è un numero decimale (positivo o negativo) con infinite cifre decimali. Non ci soffermeremo su definizioni più precise o sulla costruzione dei numeri reali. Ci limitiamo ad indicare una proprietà importante dei numeri reali senza dimostrazione: i numeri reali rappresentano un "continuo" nel senso che se consideriamo una retta su cui fissiamo un'origine O (a cui associamo il numero zero), un verso di percorrenza e un'unità di misura, allora ad ogni punto P della retta corrisponde un numero reale che rappresenta la misura del segmento OP , con il segno $+$ oppure con il segno $-$ secondo che P segue o precede O nel verso di percorrenza assegnato. Viceversa ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta assegnato con il procedimento appena descritto. Nel caso del numero $\sqrt{2}$ ad esempio è facile determinare il punto corrispondente sulla retta. Consideriamo il quadrato di lato $OP=1$ e tracciamo la diagonale OQ dal vertice O , poi con centro in O tracciamo il cerchio di raggio OQ e indichiamo con A il punto di incontro con la retta. Il segmento OA ha lunghezza $\sqrt{2}$, quindi al punto A della retta corrisponde il numero $\sqrt{2}$.

Notiamo infine che neppure i numeri reali sono sufficienti per tutte le operazioni, ad esempio l'equazione $x^2+1=0$ non ha soluzioni nell'insieme dei numeri reali. Si introducono così i numeri complessi il cui insieme viene indicato con \mathbb{C} .

3.1 Estremi di un insieme di numeri reali

Sia X un sottoinsieme di \mathbb{R} .

Definizione 3.1

3.1.1 Si dice che X è limitato superiormente se esiste un numero k maggiore di tutti gli elementi di X ;

3.1.2 si dice che X è limitato inferiormente se esiste un numero h minore di tutti gli elementi di X ;

3.1.3 si dice che X è limitato se è limitato sia superiormente che inferiormente.

Notiamo che X di conseguenza X non è limitato superiormente (inferiormente) se per ogni intero m esiste un elemento di X che è maggiore (minore) di m . X si dice semplicemente illimitato se non è limitato nè inferiormente, nè superiormente.

Possiamo dare analoghe definizioni se X è un sottoinsieme di \mathbb{N} , \mathbb{N}_0 , \mathbb{Z} , o \mathbb{Q} .

Esempi

- 1) $X = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$ è limitato superiormente e illimitato inferiormente.
- 2) $X = \{x \in \mathbb{R} : x > -3\}$ è limitato inferiormente e illimitato superiormente.
- 3) $X = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 8\}$ è limitato.
- 4) $X = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$, sottoinsieme di \mathbb{Q} , è limitato, $X = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$, sottoinsieme di \mathbb{R} , è limitato.
- 5) $X = \mathbb{N}$, $X = \mathbb{N}_0$ è limitato inferiormente e illimitato superiormente.
- 6) $X = \mathbb{Z}$ è illimitato.
- 7) $X = \mathbb{R}$ è illimitato.

Se X è limitato superiormente, si dice maggiorante di X ogni numero maggiore o al più uguale di tutti gli elementi di X , si dice minorante di X ogni numero minore o al più uguale di tutti gli elementi di X ,

Negli esempi precedenti: in 1) tutti i numeri reali ≥ 2 sono maggioranti di X , in 2) tutti i numeri reali ≤ -3 sono minoranti di X , in 3) tutti i numeri reali ≤ 3 sono minoranti di X e tutti i numeri reali ≥ 8 sono maggioranti di X , in 4) nel primo caso sono minoranti di X tutti i numeri razionali $< -\sqrt{2}$ e sono maggioranti di X tutti i numeri razionali $> \sqrt{2}$, nel secondo caso sono minoranti di X tutti i numeri reali $\leq -\sqrt{2}$ e sono maggioranti di X tutti

i numeri reali $\geq \sqrt{2}$, in 5) tutti i numeri reali ≤ 1 sono minoranti di \mathbb{N} e tutti i numeri reali ≤ 0 sono minoranti di \mathbb{N}_0 .

Definizione 3.2

Sia X un sottoinsieme numerico.

3.2.1 Si dice estremo superiore di X il più piccolo dei maggioranti (se esiste);

3.2.2 Si dice estremo inferiore di X il più grande dei minoranti (se esiste).

Se l'estremo superiore appartiene all'insieme si dice massimo dell'insieme, se l'estremo inferiore appartiene all'insieme si dice minimo dell'insieme. Possiamo allora dire che M è massimo per l'insieme X se $M \in X$ e $M \geq x$, per ogni $x \in X$; m è minimo per l'insieme X se $m \in X$ e $m \leq x$, per ogni $x \in X$.

Negli esempi dati: in 1) 2 è estremo superiore e anche massimo di X , in 2) -3 è estremo inferiore, ma non è minimo di X , quindi X ha estremo inferiore, ma non ha minimo, in 3) 8 è estremo superiore e anche massimo di X e 3 è estremo inferiore e anche minimo di X , in 5) se $X = \mathbb{N}$, 1 è estremo inferiore e anche minimo di X , se $X = \mathbb{N}_0$ 0 è estremo inferiore e anche minimo di X , il caso dell'esempio 4) sarà esaminato successivamente a parte.

In \mathbb{R} se X è limitato superiormente esiste sempre l'estremo superiore, se X è limitato inferiormente esiste sempre l'estremo inferiore. Se l'ambito numerico è più ristretto, ad esempio in \mathbb{Q} , questo non è più vero. Se consideriamo infatti l'insieme $X = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$, dell'esempio 4), questo pur essendo limitato in \mathbb{Q} non ha in \mathbb{Q} nè estremo inferiore, nè estremo superiore, mentre $X = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ ha in \mathbb{R} come estremo inferiore $-\sqrt{2}$ e come estremo superiore $\sqrt{2}$, questi però non sono nè minimo nè massimo, rispettivamente, di X .

L'estremo inferiore e superiore di un insieme sono caratterizzati dalla seguente proprietà che diamo senza dimostrazione.

Teorema 3.1 Sia X un sottoinsieme di \mathbb{R} .

3.1.1 $e' = \inf X$ se e solo se $\begin{cases} 1) e' < x, \quad \forall x \in X, \\ 2) \forall y \in \mathbb{R} : e' < y \quad \exists x \in X : x < y. \end{cases}$

3.1.2 $e'' = \sup X$ se e solo se $\begin{cases} 1) e'' > x, \quad \forall x \in X, \\ 2) \forall y \in \mathbb{R} : e'' > y \quad \exists x \in X : x > y. \end{cases}$

3.2 Intervalli

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, l'insieme dei numeri reali compresi tra a e b si dice intervallo di estremi a e b e si indica a seconda dei casi con uno dei simboli:

$$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\},$$

$$(a,b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\},$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\},$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}.$$

Questi sono tutti insiemi limitati di \mathbf{R} e quindi per tutti a è l'estremo inferiore e b è l'estremo superiore. Inoltre $[a,b]$ è dotato di minimo e di massimo e il minimo è a e il massimo è b ; (a,b) non è dotato nè di minimo nè di massimo; $[a,b)$ non è dotato di minimo ma è dotato di massimo che è b ; $(a,b]$ è dotato di minimo ma non è dotato di massimo e il minimo è a .

I punti di un intervallo distinti dagli estremi si dicono interni.

Analogamente, se $a \in \mathbf{R}$, si definiscono gli intervalli illimitati di estremo a :

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} : x \leq a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} : x < a\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > a\}.$$

I primi due intervalli sono limitati superiormente e hanno come estremo superiore a che nel primo caso è anche il massimo. Gli ultimi due intervalli sono limitati inferiormente e hanno come estremo inferiore a , che per il primo dei due è anche il minimo. Secondo queste notazioni possiamo anche porre $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$.

Sia ora x_0 il punto medio di uno degli intervalli $[a,b]$ o (a,b) considerati. Consideriamo la semiampiezza dell'intervallo e poniamo

$$h = \frac{b-a}{2},$$

allora l'insieme dei punti $x \in [a,b]$ può essere indicato con $|x-x_0| \leq h$ e l'insieme dei punti $x \in (a,b)$ può essere indicato con $|x-x_0| < h$.