SOLUZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

NOTA INTRODUTTIVA

Queste poche pagine non hanno ovviamente la pretesa di una presentazione sistematica dei problemi delle equazioni differenziali ordinarie. E' inoltre assente il rigore formale tipico di un trattato di analisi matematica. Il solo obiettivo è di fornire agli allievi del corso di Fenomeni di Trasporto I alcuni richiami sull'argomento, che si ritengono indispensabili per poter affrontare e comprendere i fenomeni di trasporto di calore, materia e quantità di moto. E' ovvio quindi che, anche per poter utilizzare con efficacia queste note, lo studente debba avere già acquisito e maturato tali conoscenze nei corsi di Analisi Matematica I e II.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione che stabilisce un legame tra la variabile indipendente, x, la funzione incognita, $y=f(x)$, e le derivate di quest'ultima, y', y'', …, $y^{(n)}$, o anche dy/dx, d^2y/dx^2, …, d^ny/dx^n. L'aggettivo *ordinario* specifica la presenza di una sola variabile indipendente. Equazioni differenziali in cui compaiono derivate parziali di funzioni di più variabili sono dette equazioni *a derivate parziali*. L'*ordine* dell'equazione è l'ordine della massima derivata che vi compare.

Esempio. L'equazione differenziale:

$$\mathcal{D}\frac{d^2c}{dx^2}+kc=0 \tag{1}$$

descrive l'andamento della concentrazione di un reagente che diffonde e reagisce in un catalizzatore. E' un'equazione differenziale del secondo ordine nell'incognita $c(x)$ e nella variabile x.

CLASSIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI ORDINARIE

Le equazioni differenziali ordinarie possono essere classificate in base ad alcune loro proprietà. Un'equazione differenziale ordinaria può essere:

- **Omogenea** o **non omogenea.** In un'equazione omogenea manca il termine noto, cioè un termine nel quale non compare né la funzione f né alcuna delle sue derivate. Ovviamente un' equazione non omogenea è caratterizzata dalla presenza del termine noto
- **lineare o non lineare**. Nell'equazione lineare ciascun termine contiene o solo la funzione, o solo una delle sue derivate, e in ogni caso sempre in forma lineare. In ogni altro caso l'equazione è non lineare.
- a **coefficienti costanti** o **non costanti**. Nell'equazione a coefficienti costanti i termini dell'equazione contengono fattori costanti, in quella a coefficienti non costanti almeno un termine dell'equazione contiene una funzione non costante della variabile indipedente x.

Esempi. L'equazione differenziale (1) dell'esempio precedente è omogenea, lineare, e a coefficienti costanti. Infatti, nella (1) manca il termine noto (omogenea); nei due termini sono presenti, da sole e in forma lineare, la derivata seconda di $c(x)$ e la funzione stessa (lineare); infine queste due funzioni sono moltiplicate rispettivamente per la diffusività $\mathcal{D}$ e per la costante cinetica di reazione k, due parametri costanti (coefficienti costanti).
L'equazione

$$3\frac{dy}{dx}-y-5\sin x=0 \tag{2}$$

è un'equazione del primo ordine lineare, a coefficienti costanti e non omogenea. Infatti è presente il termine noto $5\sin x$.
L'equazione

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0 \tag{3}$$

che rappresenta l'andamento della temperatura in una sfera nella quale venga trasportato calore per conduzione, è un'equazione del secondo ordine lineare, omogenea, a coefficienti non costanti. Infatti, sviluppando la derivata, la (3) si può anche scrivere come:

$$r^2\frac{d^2T}{dr^2}+2r\frac{dT}{dr}=0 \tag{3}$$

Si noti appunto che r e $2r$ sono coefficienti non costanti dei due termini rispettivamente di secondo e di primo ordine.
L'equazione

$$3y\frac{dy}{dx}-\sqrt{y}-e^x=0 \tag{4}$$

è un'equazione non omogenea, non lineare, a coefficienti costanti. Il termine e^x è il termine noto, mentre la non linearità è duplice: da un lato è dovuta al termine $y dy/dx$, cioè il prodotto della funzione incognita per la sua derivata prima; dall'altro, al termine $\sqrt{y}$, anch'esso non lineare.

RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Integrazione, dominio e condizioni ai limiti

La risoluzione di un'equazione differenziale consiste nella determinazione della funzione incognita $y(x)$. La presenza di derivate della funzione fino all'ordine n dell'equazione suggerisce che tale soluzione vada ricercata attraverso l'esecuzione di più integrali. E' per questo motivo che si parla di *integrazione* dell'equazione differenziale. L'integrazione dell'equazione presuppone che sia stabilito il *dominio di integrazione*, cioè il campo di valori della variabile indipendente nel quale l'equazione è definita.

Nella fase di integrazione la soluzione viene determinata nella sua forma funzionale. In essa tuttavia, sono presenti delle *costanti di integrazione*, in numero pari all'ordine dell'equazione. La soluzione specifica (o *particolare*) dell'equazione può essere determinata solo stabilendo un ugual numero di *condizioni ai limiti*. Questo consiste nell'assegnare il valore della funzione, o delle sue derivate fino all'ordine n-*1*, o una loro combinazione, in corrispondenza di n valori della variabile indipendente.

Per esemplificare quanto detto, consideriamo la seguente equazione differenziale del secondo ordine:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \tag{5}$$

La soluzione della (5) richiede prima di tutto la definizione del dominio di integrazione. Supponiamo che questo sia costituito dall'intervallo [0,L]. Per risolvere la (5) effettuiamo l'integrale definito a primo e a secondo membro:

$$\int \frac{d^2T}{dx^2} dx = \int 0 dx \tag{6}$$

Ora, l'integrale indefinito della derivata seconda di una funzione è pari alla derivata prima, *più una costante arbitraria di integrazione*. L'integrale della funzione nulla è invece pari ad una costante, anch'essa indefinita. Abbiamo quindi:

$$\frac{dT}{dx} + C' = C'' \tag{7}$$

o anche, vista l'arbitrarietà delle due costanti:

$$\frac{dT}{dx} = C_1 \tag{8}$$

con $C_1=C'-C''$. Una seconda integrazione a primo e secondo membro della (8) fornisce, in maniera del tutto analoga:

$$T(x) = C_1 x + C_2 \tag{9}$$

dove C_2 è una seconda costante di integrazione, anch'essa del tutto arbitraria.

Si noti che il numero di costanti di integrazione è pari all'ordine dell'equazione. La (9) è una soluzione generale della(5), come si può verificare sostituendola nell'equazione e svolgendo le derivate. Come detto prima, una soluzione particolare viene ottenuta specificando due condizioni ai limiti. Supponiamo ad esempio noti i valori della funzione T agli estremi del dominio di integrazione, cioè:

$$\begin{aligned} T &= T_0 \ \ per \ x = 0 \\ T &= T_L \ per \ x = L \end{aligned} \tag{10}$$

con T_0 e T_L valori noti. Applicando le condizioni ai limiti (10) alla (9) si ottiene:

$$\begin{aligned} T_0 &= C_2 \\ T_L &= C_1 L + C_2 \end{aligned} \tag{11}$$

Quindi l'applicazione delle condizioni ai limiti porta ad un sistema di due equazioni algebriche nelle incognite C_1 e C_2, che possono essere così determinate. Risolvendo le (11) si ottiene finalmente la *soluzione particolare della (5) con le condizioni ai limiti (10)*:

$$T(x) = T_0 + (T_L - T_0)\frac{x}{L} \tag{12}$$

e si può facilmente verificare che la (12), oltre ad essere soluzione della (5), soddisfa le condizioni ai limiti (10).

La forma della soluzione dell'equazione differenziale è sempre dettata dall'integrale generale. La soluzione specifica, invece, dipende direttamente dalle condizioni ai limiti. Si supponga, ad esempio, che la (5) debba essere risolta con le nuove condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} &T = T_0 \quad per\ x = 0 \\ &\frac{dT}{dx} = q \quad per\ x = L \end{aligned} \tag{13}$$

In questo caso, cioè, in uno degli estremi non viene assegnato il valore della funzione, ma quello della sua derivata. Applicando le (13) alla soluzione generale (9) si ottiene:

$$\begin{aligned} &T_0 = C_2 \\ &q = \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = C_1 \end{aligned} \tag{14}$$

e la soluzione particolare in questo caso diventa:

$$T(x) = T_0 + qx \tag{15}$$

Vale la pena di notare che le condizioni al contorno non possono essere scelte in maniera completamente arbitraria. Ad esempio, nel caso della (5) non è possibile assegnare come condizioni ai limiti il valore della derivata in due punti:

$$\begin{aligned} &\frac{dT}{dx} = q_1 \quad per\ x = 0 \\ &\frac{dT}{dx} = q_2 \quad per\ x = L \end{aligned} \tag{16}$$

L'applicazione delle (13) alla (5) porterebbe all'assurdo matematico:

$$\begin{aligned} &q_1 = \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = C_1 \\ &q_2 = \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = C_1 \end{aligned} \tag{17}$$

Infatti, essendo la soluzione generale una funzione lineare, è impossibile che una retta abbia una pendenza diversa in due punti del dominio di integrazione! Nell'applicazione ai fenomeni di trasporto, la "non assurdità" delle condizioni ai limiti corrisponde all'imposizione di condizioni fisicamente realistiche al problema. Per inciso si noti come le condizioni ai limiti in un problema in cui la variabile indipendente è il tempo prendono generalmente il nome di *condizioni iniziali*, quelle in cui la variabile è una coordinata spaziale *condizioni al contorno.*

Equazioni differenziali a variabili separabili

Sono equazioni riconducibili alla forma:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y) \tag{18}$$

La loro risoluzione avviene appunto per *separazione di variabili*. In pratica, si isolano in un membro dell'equazione tutti i termini che dipendono dalla sola y, e nell'altro tutti quelli che dipendono dalla sola x:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \tag{19}$$

L'integrazione indefinita a primo e secondo membro porta a:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C \tag{20}$$

dove C è la costante di integrazione da determinarsi come al solito applicando la condizione ai limiti.

Esempi. Risolviamo l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0 \tag{21}$$

con la condizione ai limiti:

$$y = y_0 \quad per\ x = x_0 \tag{22}$$

Separando le variabili si ottiene:

$$ydy = -xdx \tag{23}$$

che integrata fornisce:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C' \tag{24}$$

o anche, vista l'arbitrarietà della costante di integrazione

$$y^2 = -x^2 + C \tag{25}$$

Applicando la condizione ai limiti si ottiene infine:

$$y^2 + x^2 = y_0^2 + x_0^2 \quad (26)$$

che è poi l'equazione della circonferenza di centro (x_0,y_0). In termini espliciti la soluzione è:

$$y = \pm\sqrt{y_0^2 + x_0^2 - x^2} \quad (27)$$

sottoposta ovviamente alla limitazione sul dominio di integrazione:

$$x^2 \le y_0^2 + x_0^2 \quad (28)$$

L'equazione:

$$\frac{dc}{dt} + ct = 0 \quad (29)$$

con la condizione iniziale:

$$c = c_0 \quad per\ t = 0 \quad (30)$$

viene risolta per separazione di variabili:

$$\frac{dc}{c} = -t \quad (31)$$

L'integrazione della (31) fornisce:

$$\ln c = -\frac{t^2}{2} + C' \quad (32)$$

La (32), in virtù dell'arbitrarietà di C', può anche essere riscritta come:

$$\ln c = -\frac{t^2}{2} + \ln C \quad (33)$$

con C'=ln$C$. Sfruttando le proprietà dei logaritmi si ottiene:

$$\ln\frac{c}{C} = -\frac{t^2}{2} \quad (34)$$

e passando dai logartmi agli esponenziali:

$$c = C\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (35)$$

Infine, applicando la condizione iniziale (30) si ottiene la soluzione:

$$c = c_0\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (36)$$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

La forma generale dell'equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine è:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (37)$$

con $P(x)$ e $Q(x)$ funzioni continue di x nel dominio di integrazione. Alla (37) va associata una condizione ai limiti del tipo:

$$y(x_0) = y_0 \quad (38)$$

L'equazione:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad (39)$$

viene detta *equazione omogenea associata* alla (37).

I teoremi del calcolo del differenziale ci informano che per le (37)-(38) esiste una sola soluzione, data dalla combinazione lineare dell'integrale generale dell'omogenea associata e da un'integrala particolare della completa, combinazione che ovviamente deve rispettare la condizione ai limiti (38). La soluzione di un'equazione differenziale di questo tipo procede quindi secondo i seguenti passaggi:

- risoluzione dell'omogenea associata (39). Si noti che la (39) è un'equazione a variabili separabili. Se ne ricava l'integrale generale dell'omogenea associata, y_h;
- determinazione dell'integrale particolare dell'equazione completa (37), y_c. Un metodo generale per determinare y_c verrà mostrato successivamente;
- determinazione della soluzione della (37) come:

$$y(x) = y_h(x) + y_c(x) \tag{40}$$

imponendo nel contempo che la (40) soddisfi la condizione ai limiti (38).

Esempio. Risolviamo l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} + 5y = 3 \tag{41}$$

con la condizione ai limiti:

$$y = 1 \quad per\, x = 0 \tag{42}$$

Risolviamo prima l'omogenea associata:

$$\frac{dy}{dx} + 5y = 0 \tag{43}$$

Questo avviene per separazione di variabili, e porta facilmente alla soluzione generale:

$$y_h = C_1 \exp(-5x) \tag{44}$$

con C_1 costante arbitraria di integrazione.
E' facile dimostrare (vedi sotto) che in questo caso un integrale particolare della completa ha la forma di una costante:

$$y_c = C_2 \tag{45}$$

Per determinare il valore di C_2 è sufficiente inserire la (45) nella (41). Questo dà:

$$5C_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.6 \tag{46}$$

La soluzione della (41) è quindi data da:

$$y(x) = y_h(x) + y_c(x) = C_1 \exp(-5x) + 0.6 \tag{47}$$

Infine, C_1 è determinato imponendo la condizione ai limiti (42):

$$y(0) = C_1 + 0.6 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.4 \tag{48}$$

Quindi la soluzione delle (41)-(42) è:

$$y(x) = 0.4 \exp(-5x) + 0.6 \tag{49}$$

Nel caso speciale in cui i coefficienti della (37) siano costanti, cioè se $P(x)$=A=costante, il calcolo dell'integrale particolare della completa è particolarmente facile nei seguenti casi:

- se $Q(x)$ è un polinomio di grado n:

$$Q(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n \tag{50}$$

  anche y_c è un polinomio di grado n:

$$y_c = C_0 + C_1 x + \ldots + C_n x^n \tag{51}$$

  I suoi coefficienti possono essere facilmente calcolati inserendo l'espressione polinomiale di y_c nell'equazione completa e applicando il principio di identità dei polinomi;
- se $Q(x)$ è una funzione periodica del tipo:

$$Q(x) = A\sin(ax) + B\cos(bx) \tag{52}$$

  in cui almeno uno dei due coefficienti A o B è diverso da zero, anche y_c è una funzione periodica:

$$y_c = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(bx) \tag{53}$$

  Anche in questo caso C_1 e C_2 vanno determinate per confronto dopo aver inserito la (51) nella (37)
- Se $Q(x)$ è una funzione esponenziale:

$$Q(x) = A\exp(bx) \tag{54}$$

  anche y_c è una funzione esponenziale del tipo:

$$y_c = C\exp(bx) \tag{55}$$

  con C costante che va determinata.

<u>Metodo dei molitiplicatori di Lagrange</u>

La risoluzione delle equazioni ordinarie lineari del primo ordine può essere effettuata secondo un metodo del tutto generale detto dei *moltiplicatori di Lagrange*. Con riferimento alla equazione (37) consideriamo prima di tutto la sua omogenea associata (39). Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \tag{56}$$

La (56) può quindi essere integrata. Chiamiamo $y_h(x)$ la sua soluzione:

$$y_h(x) = C_1 \exp\left(-\int P(x)dx\right) \tag{57}$$

con C_1 costante arbitraria di integrazione. Ricerchiamo a questo punto una soluzione della (37) che abbia la forma seguente:

$$y(x) = u(x)y_h(x) \tag{58}$$

cioè, la soluzione è ottenuta a partire dalla quella della omogenea attraverso un opportuno *moltiplicatore*. Sostituendo la (58) nella (37) si ottiene, applicando la regola di derivazione di un prodotto e dopo alcuni passaggi algebrici:

$$u\left(\frac{dy_h}{dx} + Py_h\right) + y_h\frac{du}{dx} = Q \tag{59}$$

Il primo termine della (59) è però nullo, in quanto $y_h(x)$ è soluzione dell'omogenea. Ciò permette di ricavare un'equazione indipendente per la $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q}{y_h} \tag{60}$$

La (60), integrata, fornisce:

$$u(x) = C + \int \frac{Q(x)}{y_h(x)}dx \tag{61}$$

Quindi la soluzione complessiva della (37) è data da:

$$y(x) = u(x)y_h(x) = y_h(x)\left[C + \int \frac{Q(x)}{y_h(x)}dx\right] \tag{62}$$

Si noti che, in virtù dell'arbitrarietà delle costanti C_1 e C, una delle due può essere fissata a piacere, l'altra essendo determinata dall'applicazione della condizione ai limiti (38).

Esempio. Risolviamo l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3 \tag{63}$$

con la condizione ai limiti:

$$y = 0 \quad per\, x = 0 \tag{64}$$

Risolviamo prima l'omogenea associata. Usando la (57) si ha :

$$y_h(x) = \exp\left(\int \frac{2}{x+1}dx\right) = \exp\left[2\ln|x+1|\right] = (x+1)^2 \tag{65}$$

dove si è scelto C_1=1 per semplicità. A questo punto si può utilizzare la (62) per calcolare l'integrale completo:

$$\begin{aligned} y(x) &= (x+1)^2\left[C + \int \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2}dx\right] = \\ &= (x+1)^2\left[C + \frac{(x+1)^2}{2}\right] \end{aligned} \tag{66}$$

La costante di integrazione viene determinata applicando la (64):

$$y(0) = 0 = C + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{2} \tag{67}$$

In definitiva la soluzione della (63) è:

$$y(x) = \frac{(x+1)^2}{2}\left[(x+1)^2 - 1\right] \tag{68}$$

<u>Equazioni ordinarie lineari del secondo ordine a coefficienti costanti</u>

Buona parte del corso di Fenomeni di Trasporto I è dedicato al trasporto diffusivo. Ciò si traduce sempre in equazioni differenziali del secondo ordine. Nel seguito viene considerato il caso più semplice (ma anche più utilizzato) di equazioni lineari a coefficienti costanti, cioè della forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=f(x) \qquad (69)$$

Ovviamente in questo caso saranno necessarie due condizioni ai limiti per specificare la soluzione.

Consideriamo innanzitutto la soluzione dell'equazione omogenea:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0 \qquad (70)$$

In questo caso vanno prima determinate le radici, λ_1, λ_2 della cosiddetta *equazione caratteristica*:

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \qquad (71)$$

Si distinguono allora tre casi:

- Le due radici sono reali e distinte. In questo caso la soluzione della (70) è:

$$y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x} \qquad (72)$$

con C_1 e C_2 costanti di integrazione .

- Le due radici sono complesse e coniugate, cioè sono due numeri complessi della forma:

$$\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta \qquad (73)$$

con α e β numeri reali. Anche in questo caso si può dimostrare che la soluzione è del tipo (72), ma essa può essere messa nella forma:

$$y(x)=e^{\alpha x}\left[C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x\right] \qquad (74)$$

- Le due radici sono reali e identiche (λ_1=λ_2=λ). In questo caso la soluzione è del tipo:

$$y(x)=e^{\lambda x}\left[C_1+C_2x\right] \qquad (75)$$

Esempi. Sia data l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=0 \qquad (76)$$

con le condizione ai limiti:

$$\begin{aligned} &y=0 \quad per\, x=0\\ &\frac{dy}{dx}=1 \quad per\, x=0 \end{aligned} \qquad (77)$$

L'equazione caratteristica:

$$\lambda^2+\lambda-2=0 \qquad (78)$$

ha soluzioni λ_1=1 e λ_2=-2. La soluzione è quindi del tipo:

$$y(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-2x} \qquad (79)$$

Applicando le (77) si ottiene:

$$\begin{aligned} &C_1+C_2=0\\ &C_1-2C_2=1 \end{aligned} \qquad (80)$$

Il sistema (80) risolto dà C_1=–C_2=1/3, per cui la soluzione della In definitiva la soluzione della (76) è:

$$y(x)=\frac{1}{3}\left(e^{x}-e^{-2x}\right) \qquad (81)$$

Risolviamo l'equazione:

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0 \qquad (82)$$

con le condizioni ai limiti:

$$T(0)=T_0, \quad T(L)=T_L \qquad (83)$$

L'equazione caratteristica è semplicemente:

$$\lambda^2=0 \qquad (84)$$

che ha ovviamente due soluzioni reali uguali e nulle. Dalla (75) si ricava che la soluzione è del tipo:

$$T(x)=C_1+C_2x \qquad (85)$$

Applicando le condizioni ai limiti (83) si ricava facilmente:

$$T(x) = T_0 + (T_L - T_0)\frac{x}{L} \qquad (86)$$

Si noti che la stessa soluzione si poteva ottenere integrando due volte la (82) con il metodo delle variabili separabili.

Analizziamo ora l'equazione completa, cioè non omogenea, data dalla (69). Come nel caso delle equazioni del primo ordine, l'integrale è dato sempre dalla somma di quello generale dell'omogenea associata, y_h, (vedi sopra) e di un integrale particolare della completa, y_c. Spesso anche in questo caso l'integrale della completa è ottenibile facilmente per particolari forme del termine noto $f(x)$. Vediamo alcuni casi:

- Se

$$f(x) = e^{ax}P_n(x) \qquad (87)$$

dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n e α non è una radice dell'equazione caratteristica, allora anche l'integrale della completa è della forma:

$$y_c = e^{ax}Q_n(x) \qquad (88)$$

con $Q_n(x)$ anch'esso polinomio di grado n. Nel caso in cui α è anche una radice *semplice* dell'equazione caratteristica, l'integrale della completa sarà della forma:

$$y_c = e^{ax}Q_n(x)\,x \qquad (89)$$

Se infine α è anche una radice *doppia* dell'equazione caratteristica, l'integrale della completa sarà del tipo:

$$y_c = e^{ax}Q_n(x)\,x^2 \qquad (90)$$

Si noti che le (88)-(90) racchiudono anche i casi in cui la $f(x)$ è solo un esponenziale o solo un polinomio.

- Se

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\sin(\beta x) + Q_m(x)\cos(\beta x)\right] \qquad (91)$$

con $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ polinomi di grado n ed m rispettivamente, l'integrale della completa sarà della forma:

$$y_c(x) = e^{\alpha x}\left[U(x)\sin(\beta x) + V(x)\cos(\beta x)\right] \qquad (92)$$

dove U(x) e V(x) sono anch'essi polinomi di grado pari al grado più elevato tra P_n e Q_m. Ancora una volta, nel caso particolare in cui α+iβ sia una radice dell'equazione caratteristica, l'integrale particolare assumerà la forma:

$$y_c(x) = xe^{\alpha x}\left[U(x)\sin(\beta x) + V(x)\cos(\beta x)\right] \qquad (93)$$

Anche nel caso delle equazioni del secondo ordine esistono metodi più generali per la loro risoluzione. Si ritiene tuttavia che i casi particolari su mostrati siano i più significativi, e quelli che uno studente di ingegneria chimica ha più probabilità di trovare nel corso dei suoi studi.

Esempi. Troviamo l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \left(x^2 + 1\right)e^{3x} \qquad (94)$$

L'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \qquad (95)$$

ha soluzioni $\lambda_{1,2}=\pm i3$. La soluzione dell'omogenea è quindi del tipo:

$$y_h(x) = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x \qquad (96)$$

Il secondo membro della (94), contenente un polinomio di secondo grado, indica che l'integrale particolare della completa deve essere della forma:

$$y_c(x) = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{3x} \qquad (97)$$

Sostituendo la (97) nella (94) si ha:

$$e^{3x}\begin{bmatrix} 9\left(Ax^2 + Bx + C\right) + 6\left(2Ax + B\right) + \\ +2A + 9\left(Ax^2 + Bx + C\right) \end{bmatrix} = \left(x^2 + 1\right)e^{3x} \qquad (98)$$

Dividendo per l'esponenziale e uguagliando i coefficienti delle potenze di x dello stesso grado si giunge alla determinazione di A, B, C:

$$A = \frac{1}{18};\quad B = -\frac{1}{27};\quad C = \frac{5}{81} \qquad (99)$$

Quindi la soluzione generale della (94) è

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + e^{3x}\left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}\right) \tag{100}$$

Risolviamo l'equazione:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 3e^{2x}\cos x \tag{101}$$

L'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \tag{102}$$

ha soluzioni $\lambda_{1,2}=\pm 1$. La soluzione dell'omogenea è quindi del tipo:

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \tag{103}$$

Il secondo membro della (101), contenente il prodotto di un esponenziale e di un coseno, indica che l'integrale particolare della completa deve essere della forma:

$$y_c(x) = (A\cos x + B\sin x)e^{2x} \tag{104}$$

Sostituendo la (104) nella (101) si ha:

$$e^{2x}\left[(2A+4B)\cos x + (-4A+2B)\sin x\right] = 3e^{2x}\cos x \tag{105}$$

Dividendo per l'esponenziale e uguagliando i coefficienti in sin$x$ e cos$x$, si giunge alla determinazione di A e B:

$$A = \frac{3}{10}; \quad B = \frac{3}{5} \tag{106}$$

per cui l'integrale generale della (101) è:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x\right)e^{2x} \tag{107}$$