COMPLEMENTI DEL CORSO DI MATEMATICA

Anno Accademico 2012/2013

Prof. Francesca Visentin

CAPITOLO III

Derivate e teoremi fondamentali del calcolo differenziale

1. Concetto di derivata.

Consideriamo un punto mobile lungo una curva qualsiasi, ad esempio lungo una traiettoria rettilinea. Spazio e tempo sono legati da una relazione funzionale che genericamente indichiamo con s=s(t) che va precisata di volta in volta a seconda del tipo di moto. Consideriamo due punti P e Q della traiettoria corrispondenti a due valori del tempo (variabile indipendente) t e t+h rispettivamente. La velocità media del punto mobile tra P e Q sarà data dal rapporto

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h}\ .$$

Tale rapporto corrisponde alla velocità di un punto che percorre con moto uniforme il tratto PQ. Però guardando un tachimetro in automobile, vediamo che questo segna una velocità diversa in ogni punto, secondo come si usa il pedale dell'acceleratore o del freno. Che significa questa velocità rispetto a quella media? La velocità media varia al variare di h, inoltre se h diventa piccolo, anche il tratto percorso in un tempo piccolo diventa piccolo e quindi man mano che h si avvicina a zero, la velocità media si avvicina alla velocità che il punto mobile assume in P, cioè a quella che si chiama velocità istantanea. Per ottenere proprio il valore della velocità all'istante t si deve passare al limite per $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Osserviamo che anche la velocità del punto mobile è una funzione del tempo che possiamo indicare con v=v(t). Al variare di t il rapporto:

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h}$$

rappresenta l'accelerazione media del punto mobile tra i due estremi della traiettoria P e Q corrispondenti ai valori della velocità dati da v(t) e v(t+h). Per ottenere l'accelerazione istantanea, anche qui bisogna passare al limite per $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{v(t+h)-v(t)}{h}.$$

Consideriamo un altro esempio. Supponiamo di avere delle cariche elettriche in moto nello spazio. La carica presente in ogni regione è una funzione del tempo, che indichiamo con q=q(t). Il rapporto:

$$\frac{q(t+h)-q(t)}{h},$$

dà la densità media di carica, e il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{q(t+h)-q(t)}{h},$$

dà la densità di carica all'istante t.

Ancora, sia N il numero di individui di una popolazione di animali o piante ad un certo istante. N si può considerare una funzione del tempo N=N(t), che per grandi numeri, con l'aiuto dell'interpolazione, si può immaginare come una funzione continua e non variabile per numeri interi. Dati due istanti t e t+h, la quantità $\Delta N=N(t+h)-N(t)$ rappresenta la variazione di popolazione nel tempo $\Delta t=h$. Naturalmente si ha un incremento di popolazione per $\Delta N>0$ e una diminuzione di popolazione per $\Delta N<0$. La quantità

$$\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{N(t+h)-N(t)}{h}$$

rappresenta la variazione di popolazione per unità di tempo; se vogliamo la variazione istantanea bisogna passare al limite per $h \to 0$.

Nel metabolismo ha interesse la velocità di una reazione chimica. Sia M=M(t) la massa di una sostanza nutritiva al tempo t. Tale massa è funzione del tempo. Se supponiamo che la sostanza, ad esempio, si disgrega chimicamente, la massa M decresce. Siano t e t+h due istanti e siano M(t) e M(t+h) i valori corrispondenti. La quantità $\Delta M=M(t+h)-M(t)$ rappresenta la variazione di massa nel tempo $\Delta t=h$ e la quantità

$$\frac{\Delta M}{\Delta t}=\frac{M(t+h)-M(t)}{h}$$

rappresenta la variazione di massa per unità di tempo. Questa variazione dà la velocità di reazione nell'unità di tempo. Se vogliamo la velocità di reazione istantanea bisogna passare al limite per $h\to 0$.

Se indichiamo con $y=f(x)$ una qualsiasi delle funzioni considerate negli esempi precedenti compare sempre un limite del tipo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Allora data una funzione f definita in un intervallo (a,b) e fissato qualsiasi $x\in(a,b)$ si può pensare di verificare se esiste sempre un limite del tipo indicato. Per ogni fissato h piccolo, a $\Delta f=f(t+h)-f(t)$ si dà il nome di incremento della funzione, a $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ si dà il nome di rapporto incrementale. Se esiste finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

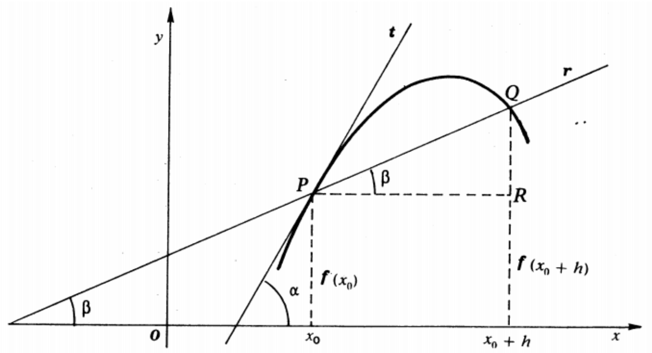
questo limite si dice derivata della funzione f(x) nel punto x e si indica con uno dei simboli $f'(x)$ o $Df(x)$. Fissati x e $x_0\in(a,b)$ e considerato l'incremento $f(x)-f(x_0)$, il rapporto incrementale diventa $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ e la derivata: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. In seguito faremo uso di uno di questi simboli indifferentemente.
Da quanto abbiamo detto prima segue ad esempio che la velocità istantanea è la derivata della funzione spazio nel punto considerato e la accelerazione istantanea è la derivata della funzione velocità nel punto considerato.
Si dimostra che una funzione derivabile in (a,b) è anche continua in (a,b). Non vale invece il viceversa.

2. Significato geometrico della derivata.

Sia f derivabile in un intervallo (a,b). La derivata di f in un qualunque punto $x_0 \in (a,b)$ è legata alla tangente al grafico di f nello stesso punto.
La tangente al grafico in un punto P del grafico è rappresentata dalla posizione limite, se esiste, della retta che congiunge P con un qualsiasi altro punto Q del grafico al tendere di Q a P. Consideriamo un punto P del grafico e siano $(x_0, f(x_0))$ le coordinate di P. Consideriamo la tangente t al grafico in P e sia α l'angolo che tale tangente forma con il semiasse positivo delle x. L'equazione della tangente al grafico in P è:

$$y - f(x_0) = m(x - x_0),$$

dove $m = \mathrm{tg}\alpha$ è il coefficiente angolare della retta r.



Consideriamo ora un altro punto Q sulla retta e siano $(x_0+h, f(x_0+h))$ le sue coordinate. Consideriamo la retta r che congiunge i punti P e Q e β l'angolo che tale retta forma con il semiasse positivo delle x. Il coefficiente angolare della retta r è $\mathrm{tg}\beta$. La retta t si ottiene da r facendo tendere Q a P, cioè facendo tendere h a zero. Si ha quindi $\lim_{h \to 0} \mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\alpha$.

D'altra parte, considerando il triangolo rettangolo PRQ si ha

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{RQ}{RP} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Di conseguenza:

$$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{h \to 0} \mathrm{tg}\beta = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

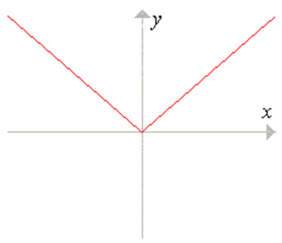
Allora l'esistenza della derivata in un punto della curva è legata all'esistenza della tangente alla curva nel punto e la derivata coincide con il coefficiente angolare della tangente al grafico nel punto. In conclusione possiamo dire che se la funzione è derivabile in un punto x_0 l'equazione della tangente in $(x_0,f(x_0))$ è

$$y-f(x_0) = f'(x_0)(x- x_0).$$

In particolare la retta tangente ad una retta è la retta stessa, quindi da quanto abbiamo dimostrato la derivata della funzione che rappresenta una retta $y=mx+q$ in ogni punto è uguale al coefficiente angolare m della retta stessa. Ad esempio data la funzione $f(x)=4x+1$ si ha $f'(x)=4$ in ogni punto x. Dimostreremo poi direttamente questa proprietà.
Nel paragrafo precedente abbiamo affermato (senza dimostrazione) che una funzione derivabile è anche continua mentre non è vero il viceversa: cioè esistono funzioni continue che non sono derivabili in tutto il loro insieme di definizione. Diamo un esempio, basato proprio sul legame tra tangente al grafico e derivata.
Consideriamo la funzione valore assoluto, cioè la funzione $f : x\in\mathbb{R} \rightarrow |x|\in[0,+\infty)$, tale che

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Il cui grafico è:



Dal grafico si vede che il coefficiente angolare della tangente nell'intorno sinistro di $x=0$ è -1 e nell'intorno destro di $x=0$ è 1, quindi il limite sinistro e il limite destro del rapporto incrementale sono diversi e la funzione non è derivabile in $x=0$. In questo caso però, dato che i due limiti sono finiti, si parla di derivata sinistra e derivata destra nel punto $x=0$.

3. Calcolo di derivate.

Applicando la definizione di derivata, calcoliamo le derivate di alcune funzioni.

1) Consideriamo la funzione costante, cioè la funzione $f : x\in\mathbb{R} \to c\in\mathbb{R}$. Si ha $f(x)=c$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ e quindi

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$$

Allora la derivata di una costante è nulla. Potevamo rendercene conto anche dal significato geometrico di derivata, in quanto la funzione $f(x)=c$ rappresenta una retta parallela all'asse x e quindi di coefficiente angolare zero.

2) Consideriamo la funzione identità, cioè la funzione $f : x\in\mathbb{R} \to x\in\mathbb{R}$. Si ha $f(x)=x$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ e quindi

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1\,.$$

Allora $Dx=1$.

3) Consideriamo la funzione potenza: $f:\ x\in[0,+\infty) \to x^{\alpha}\in[0,+\infty)$, cioè $f(x)= x^{\alpha}$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^{\alpha}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\alpha}-x^{\alpha}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} x^{\alpha-1}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{h}{x}} = x^{\alpha-1},$$

ricordando i limiti notevoli. Allora $Dx^{\alpha}=x^{\alpha-1}$. Se $\alpha=1$ ritroviamo $Dx=1$.

4) Consideriamo la funzione: $x\in\mathbb{R} \to a^{x}\in(0,+\infty)$, cioè la funzione $f(x)= a^{x}$. Si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^{x}}{h} = \lim_{h\to 0} a^{x}\frac{a^{h}-1}{h} = a^{x}\log a\ ,$$

sempre ricordando i limiti notevoli. Allora $Da^{x}=a^{x}\log a$. In particolare $De^{x}=e^{x}$.

5) Consideriamo la funzione $x\in(0,+\infty)\to \log_a x\in\mathbb{R}$, cioè la funzione $f(x)=\log_a x$. Si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\frac{x+h}{x}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\log_a e$$

ricordando i limiti notevoli. Allora D $\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e$. In particolare Dlogx = $\frac{1}{x}$.

6) Consideriamo la funzione $f\ :\ x\in\mathbb{R}\to \text{sen}\,x\in[-1,1]$, cioè f(x) = senx. Si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}x\cos h+\text{sen}h\cos x-\text{sen}x}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}x(\cos h-1)+\text{sen}h\cos x}{h}=-\text{sen}x\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}h}{h}=\cos x,$$

ricordando i limiti notevoli. Allora Dsenx = cosx.

7) Consideriamo la funzione $f\ :\ x\in\mathbb{R}\to \cos x\in[-1,1]$, cioè f(x) = cosx. Si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\text{sen}x\,\text{sen}h-\cos x}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-\cos x(1-\cos h)-\text{sen}h\cos x}{h}=-\cos x\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)}{h}-\text{sen}x\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}h}{h}=-\text{sen}x,$$

ricordando i limiti notevoli. Allora Dcosx = -senx

8) Consideriamo la funzione $f\ :\ x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\text{ dispari}\right\}\to \text{tg}\,x\in\mathbb{R}$, cioè f(x) = tgx.

Si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{tg}(x+h)-\text{tg}x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\text{tg}x+\text{tg}h}{1-\text{tg}x\,\text{tg}h}-\text{tg}x}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\text{tg}x+\text{tg}h-\text{tg}x+\text{tg}^2x\,\text{tg}h}{h(1-\text{tg}x\,\text{tg}h)}=\left(1+\text{tg}^2x\right)\lim_{h\to 0}\frac{\text{tg}h}{h(1-\text{tg}x\,\text{tg}h)}=$$

$$\left(1+\text{tg}^2x\right)\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}h}{h}\frac{\cos h}{1-\text{tg}x\,\text{tg}h}=\frac{1}{\cos^2x},$$

ricordando i limiti notevoli. Notiamo che dalla formula fondamentale $\text{sen}^2x+\cos^2x=1$ segue anche

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x\,.$$

Allora $\text{Dtg}x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$.

4. Regole di derivazione.

Siano f e g due funzioni derivabili in un intervallo (a,b). Valgono le seguenti proprietà che diamo senza dimostrazione:

(1) La derivata della somma f(x) + g(x) è uguale alla somma delle derivate

$$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x);$$

(2) la derivata della differenza f(x) - g(x) è uguale alla differenza delle derivate

$$D[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x);$$

(3) la derivata del prodotto f(x)g(x) è data da

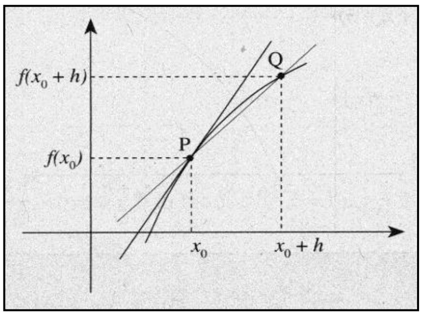
$$D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

(4) se $g(x) \neq 0$, la derivata del quoziente f(x)/g(x) è data da

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\,.$$

Applicazioni del calcolo di derivate.

Equazione della tangente ad una curva: ricordando il significato geometrico della derivata,



assegnata l'equazione di una curva è possibile determinare l'equazione della tangente alla curva in ogni suo punto in cui la funzione che rappresenta il grafico della curva sia derivabile: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ rappresenta l'equazione al grafico della funzione $y=f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$. Ad esempio consideriamo la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ e scriviamo l'equazione della tangente al grafico nei punti (0,1) e (1,-1). Si ha $f'(x) = 3x^2 - 6x$ e $f'(0)=0$, $f'(1)=-3$. Allora la tangente al grafico nel punto (0,1) ha equazione $y=1$, e nel punto (1,-1) ha equazione $y+1=-3(x-1)$, cioè $y=-3x+2$.

Equazione della normale ad una curva: una retta si dice normale ad una curva in un punto se è perpendicolare alla tangente alla curva nel punto. Allora se la curva ha equazione y=f(x) e il punto in cui vogliamo calcolare la normale è $(x_0,f(x_0))$, il coefficiente angolare della tangente alla curva in questo punto è $m=f'(x_0)$. Due rette sono perpendicolari se e solo se i loro coefficienti angolari m e m′ verificano la relazione mm′=-1. Allora il coefficiente angolare della normale alla curva in $(x_0,f(x_0))$ è

$$m'=-\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Ad esempio per la curva rappresentata dalla funzione $f(x) = x^3-3x^2+1$ la normale in (0,1) ha equazione x=1 e la normale in (1,-1) ha equazione $y+1=\frac{1}{3}(x-1)$.

5. Derivate delle funzioni inverse.

Vale il seguente teorema che diamo senza dimostrazione.

Teorema 5.1 Sia f: $x\in[a,b] \to y=f(x)\in[\alpha,\beta]$ una funzione dotata di inversa $f^{-1} : y\in[\alpha,\beta] \to x\in[a,b] : f(x)=y$. Se f è derivabile nell'intervallo (a,b) in ogni punto in cui $f'(x)\neq 0$ anche f^{-1} è derivabile (α,β) e si ha:

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)} \; .$$

Calcoliamo, utilizzando il Teorema 5.1, le derivate delle funzioni arcsen, arccos e arctg.

1) f(x) = senx, $f^{-1}(y)$= arcseny. Si ha:

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \; .$$

Notiamo che per la definizione di funzione inversa consideriamo la restrizione di f(x) = senx all'intervallo $[a,b]=[-\pi/2,\pi/2]$ e quindi è possibile applicare il teorema perché nell'intervallo $(-\pi/2,\pi/2)$ si ha $f'(x)=\cos x\neq 0$; anzi in tale intervallo cosx>0 e quindi davanti alla radice va considerato solo il segno +.

2) f(x) = cosx, $f^{-1}(y)$= arccosy. Si ha:

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=-\frac{1}{\mathrm{senx}}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\ .$$

Notiamo che per la definizione di funzione inversa consideriamo la restrizione di f(x) = senx all'intervallo $[a,b]=[0,\pi]$ e quindi è possibile applicare il teorema perché nell'intervallo $(0,\pi)$ si ha $f'(x)=\mathrm{senx}\neq 0$; anzi in tale intervallo senx>0 e quindi davanti alla radice va considerato solo il segno +.

3) f(x) = tgx, $f^{-1}(y)$= arccostgy. Si ha:

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\cos^2 x=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{1}{1+y^2}\ .$$

In conclusione, cambiando i nomi delle variabili otteniamo le ulteriori formule di derivazione:

$$\mathrm{Darcsenx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ;$$

$$\mathrm{Darccosx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ;$$

$$\mathrm{Darctgx} = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

6. Derivata di una funzione composta.

Siano date le funzioni: $f:(a,b)\to(\alpha,\beta)$ e $g:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$. Consideriamo la funzione composta: $F: x\in(a,b)\to z=g(f(x))\in\mathbb{R}$. Vale il seguente teorema che diamo senza dimostrazione:

Teorema 6.1 Se le funzioni: $f:(a,b)\to(\alpha,\beta)$ e $g:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ sono derivabili, allora anche la funzione composta $F: x\in(a,b)\to z=g(f(x))\in\mathbb{R}$ è derivabile e si ha:

$$F'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Se la funzione composta è del tipo

$$F(x) = [f(x)]^{g(x)} ,$$

per applicare il Teorema 6.1 conviene usare l'uguaglianza:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}.$$

Si ha allora

$$D[f(x)]^{g(x)} = De^{g(x)\log f(x)} = e^{g(x)\log f(x)}D[g(x)\log f(x)]= [f(x)]^{g(x)}\left[g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x)\lg f(x) \right].$$

Diamo alcuni esempi di derivazione di funzione composta.

1) $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \left(\cos\sqrt[3]{x}\right)D\sqrt[3]{x} = \cos\sqrt[3]{x}\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

2) $f(x) = \log x^2$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\,Dx^2 = \dfrac{1}{x^2}\,2x = \dfrac{2}{x}$.

3) $f(x) = a^{3x+1}$, $f'(x) = a^{3x+1}\log a\ D(3x+1) = 3a^{3x+1}\log a$.

4) $f(x)= x^{\frac{1}{x}}$, $f'(x) = Dx^{\frac{1}{x}} = De^{\frac{1}{x}\lg x} = e^{\frac{1}{x}\lg x}D\left(\dfrac{1}{x}\log x\right) = x^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\log x}{x^2}\right) = \dfrac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1-\log x)$.

7. Derivate di ordine superiore.

Sia f: (a,b) $\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a,b) e sia f' la sua derivata. Anche f' è una funzione, precisamente:

$$f': x\in(a,b) \to f'(x)\in\mathbb{R}.$$

Se la funzione f' è anch'essa derivabile in (a,b), la sua derivata si dice derivata seconda di f e si indica con uno dei simboli:

$$f'',\quad D^2f,\quad f^{(2)}.$$

Anche f'' è una funzione, precisamente: $f'': x\in(a,b) \to f''(x)\in\mathbb{R}$. Se la funzione f'' è anch'essa derivabile in (a,b), la sua derivata si dice derivata terza di f e si indica con uno dei simboli:

$$f''',\quad D^3f,\quad f^{(3)}.$$

Continuando in questo modo, si definisce, quando è possibile, la derivata n-sima della funzione f, con $n\in N$, indicata con $D^n f$ oppure $f^{(n)}$.

Esempi.

1) Consideriamo la funzione $f: x\in \mathbb{R} \to f(x) = x^7+x^6+5\in\Re$. Si ha:

$Df(x) = 7x^6+6x^5$,

$D^2f(x) = 42x^5+30x^4$,

$D^3f(x) = 210x^4+120x^3 = 30(7x^4+4x^3)$,

$D^4f(x) = 30(28x^3+12x^2) = 120(7x^3+3x^2)$,

$D^5f(x) = 120(21x^2+6x) = 360(7x^2+2x)$,

$D^6f(x) = 360(14x+2) = 720(7x+1)$,

$D^7f(x) = 5040$,

$D^8f(x) = 0$,

$D^9f(x) = 0$,

…………

La funzione è derivabile per ogni $n\in\mathbb{N}$ e le derivate $D^nf(x)$ sono nulle da n=8 in poi.

2) Consideriamo la funzione $f: x\in(0,+\infty) \to f(x) = \log x \in \mathbb{R}$. Si ha:

$Df(x) = \frac{1}{x}$,

$D^2f(x) = -\frac{1}{x^2}$,

$D^3f(x) = \frac{2}{x^3}$,

$D^4f(x) = -\frac{6}{x^4}$,

$D^5f(x) = \frac{24}{x^5}$,

....

e la funzione è derivabile ad ogni ordine nell'insieme di definizione.

8. Massimi e minimi relativi e assoluti. Proprietà delle funzioni derivabili: i teoremi di Fermat, Rolle e Lagrange e loro conseguenze.

Richiamiamo le nozioni di massimo e minimo assoluto per una funzione. Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di (a,b). Il punto x_0 si dice:

8.1 di massimo assoluto per la funzione f se $f(x) \le f(x_0)$ per ogni $x\in(a,b)$;

8.2 di minimo assoluto per la funzione f se $f(x) \ge f(x_0)$ per ogni $x\in(a,b)$.

Esistono altri tipi di massimi e minimi: i punti di estremo locale.
Sia f: (a,b) $\to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto interno ad (a,b). Il punto x_0 si dice:

8.3 di massimo relativo (o locale) per la funzione f se esiste h>0 e un intorno (x_0-h, x_0+h) di x_0 tale che per ogni $x \in (x_0-h, x_0+h)$ si ha $f(x) \le f(x_0)$;

8.4 di minimo relativo (o locale) per la funzione f se esiste h>0 e un intorno (x_0-h, x_0+h) di x_0 tale che per ogni $x \in (x_0-h, x_0+h)$ si ha $f(x) \ge f(x_0)$.

Osserviamo che il massimo o minimo assoluti (se esistono) sono unici. Invece i massimi e minimi relativi possono essere più di uno, inoltre un estremo locale può anche essere assoluto.
Se l'intervallo di definizione di f è aperto non è detto che il massimo e/o il minimo assoluto esista; invece se f è definita in un intervallo chiuso e limitato [a,b], ed è continua, allora il massimo e il minimo assoluto esistono sempre (teorema di Weierstrass) e se il punto in cui f prende il valore massimo e/o il valore minimo è un punto x_0 interno all'intervallo [a,b], allora tale punto è anche di massimo o di minimo relativo. Se la funzione f è derivabile, abbiamo ulteriori proprietà interessanti che permettono di riconoscere i punti di massimo e di minimo, e gli intervalli di monotonia di f.

Teorema 8.1. (Fermat) Sia Sia f: (a,b) $\to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto interno ad (a,b). Se f è derivabile in x_0 e se x_0 è un punto di massimo o di minimo relativo, allora $f'(x_0)=0$, cioè la tangente al grafico in $(x_0,f(x_0))$ è orizzontale.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema se x_0 è un punto di massimo relativo, analogamente si procede se x_0 è un punto di minimo relativo. Dalla definizione 8.3 segue che esiste h>0 e un intorno (x_0-h, x_0+h) di x_0 tale che per ogni $x \in (x_0-h, x_0+h)$ si ha $f(x) \le f(x_0)$. Allora dal Teorema della permanenza del segno nella I forma: se $x \in (x_0-h, x_0)$ si ha

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \text{, e quindi } f'(x_0) \ge 0.$$

Se invece $x \in (x_0, x_0+h)$ si ha

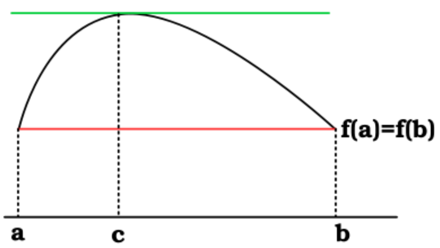
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \text{, e quindi } f'(x_0) \le 0.$$

Di conseguenza deve essere $f'(x_0) = 0$ e il teorema è dimostrato.

Osserviamo che il Teorema 8.1 dà solo una condizione necessaria affinché x_0 sia un estremo locale. Infatti se $x_0 \in (a,b)$ è tale che $f'(x_0) = 0$, possiamo solo dire che la retta tangente al grafico in $(x_0,f(x_0))$ è orizzontale, non è detto che x_0 sia un massimo o un minimo locale, potrebbe essere (come vedremo) un punto di flesso a tangente orizzontale. È comunque interessante sapere se in un intervallo vi siano punti a tangente orizzontale, o comunque con tangente di pendenza assegnata. I teoremi di Rolle e Lagrange, danno una risposta a questa questione.

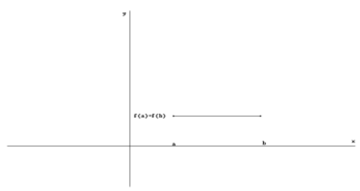
Teorema 8.2 (di Rolle)
Sia f(x) una funzione definita e continua nell'intervallo chiuso e limitato [a,b], derivabile nell'intervallo aperto (a,b) e tale che f(a) = f(b). Allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo [a,b], cioè $c\in(a,b)$, tale che $f'(c)=0$.

Interpretazione geometrica:



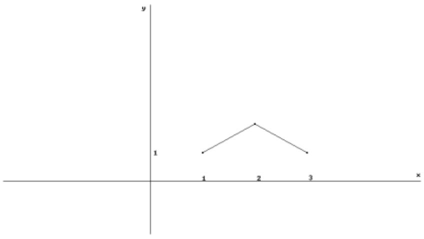
Nelle ipotesi del Teorema di Rolle esiste almeno un punto c interno all'intervallo [a,b] in cui la tangente al grafico è orizzontale.

Dimostrazione. Essendo f(x) continua in un intervallo chiuso e limitato, è dotata in tale intervallo di minimo e di massimo assoluti. Siano m e M i valori assunti nei punti di minimo e massimo assoluti. Ovviamente è $m\leq M$.
Se m=M,

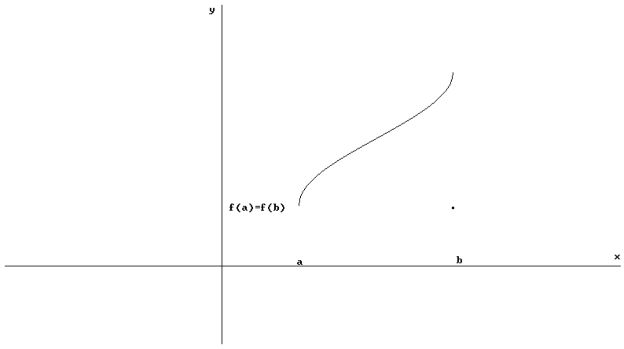


la funzione è costante in [a,b] e quindi la sua derivata è nulla in (a,b) e quindi il teorema in questo caso è dimostrato.
Sia allora m<M e siano c, $d\in[a,b]$ tali che f(c)=M, f(d)=m. I due punti non possono essere entrambi estremi di [a,b] perché ricadremmo nel caso precedente. Infatti se c=a e d=b o c=b e d=a sarebbe f(c)=f(d) e quindi m=M. Supponiamo che sia c interno, analogamente si procede se invece d è interno. Se c è interno: $c\in(a,b)$ e c un punto di massimo relativo. Deve essere allora per il Teorema di Fermat: $f'(c)=0$. Il teorema è quindi dimostrato.

Notiamo che le ipotesi fatte sono essenziali per la dimostrazione del teorema.



La funzione rappresentata nel grafico è continua in [1,3], assume valori uguali in 1 e in 3, ma non è derivabile in (1,3), in quanto non è derivabile in x=2.

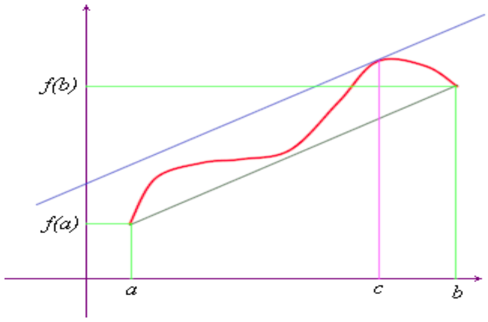


La funzione rappresentata nel grafico è continua nell'intervallo [a,b], derivabile nell'intervallo (a,b), ma non ci sono punti in (a,b) in cui la derivata è nulla, in quanto f(b)≠f(a).

Teorema 8.3 (di Lagrange)
Sia f(x) una funzione definita e continua nell'intervallo chiuso e limitato [a,b] e derivabile nell'intervallo aperto (a,b). Allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo [a,b], cioè $c \in (a,b)$, tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) .$$

Interpretazione geometrica:



La retta passante per i punti (a,f(a)) e (b,f(b)) ha coefficiente angolare dato da:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Nelle ipotesi del Teorema di Lagrange esiste almeno un punto c interno all'intervallo [a,b] in cui la tangente al grafico è parallela a tale retta e quindi la retta tangente al grafico in (c,f(c)) ha pendenza assegnata.

Dimostrazione. Si costruisce una funzione ausiliaria che verifica le ipotesi del teorema di Rolle. Precisamente consideriamo la funzione:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

La funzione g esprime la differenza tra l'ordinata della funzione f e quella della retta congiungente i punti (a,f(a)) e (b,f(b)). Tale funzione è continua in [a,b] ed è derivabile in (a,b). Inoltre si ha:

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0.$$

e

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0.$$

Allora g(b) = g(a) e quindi sono soddisfatte tutte le ipotesi del Teorema di Rolle, quindi esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che $g'(c)=0$. Si ha:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Allora in c:

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

e quindi

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Il teorema di Lagrange è così dimostrato.

Il Teorema di Lagrange ha importanti conseguenze collegate alla monotonia di una funzione. In particolare vale il seguente teorema:

Teorema 8.4. (Test di monotonia) Sia Sia f: (a,b) $\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Allora:

(1) f crescente in (a, b) $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \ \forall \ x \in (a, b)$;

(2) f decrescente in (a, b) $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \ \forall \ x \in (a, b)$.

Dimostrazione. Dimostriamo la (1), per la (2) si procede in modo analogo. Supponiamo $f'(x) \geq 0 \ \forall \ x \in (a,b)$. Siano $x_1, x_2 \in (a,b)$ due punti qualsiasi interni ad (a,b) con $x_1 < x_2$. Applicando il Teorema di Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$, esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Poiché $f'(c) \geq 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, segue $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, e quindi f è crescente in (a, b). Viceversa, assumiamo ora f crescente in (a,b) e siano $x, x_0 \in (a,b)$ due punti qualsiasi. Dalla definizione di crescenza segue che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

e quindi passando al limite per $x \rightarrow x_0$, per il teorema della permanenza del segno, sempre nella I forma, è $f'(x_0) \geq 0$ e il teorema è dimostrato.

Lo stesso tipo di dimostrazione effettuato nella prima parte del Teorema 8.4 permette di provare, sempre come conseguenza del teorema di Lagrange, il seguente corollario

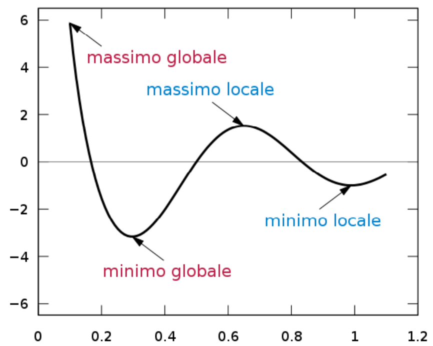
Corollario 8.5. Se una funzione è derivabile con derivata nulla su un intervallo (a,b), allora è costante.

Questo corollario ci permette di invertire la proposizione, dimostrata in precedenza nel n. 3, che la derivata di una funzione costante è nulla. Da ciò segue anche:

Corollario 8.6. Se due funzioni f(x) e g(x) definite e derivabili in (a,b) hanno la stessa derivata in (a,b), esse differiscono per una costante.

Per la dimostrazione si sfrutta il corollario precedente, osservando che f(x)-g(x) ha derivata nulla in (a,b).

Come si possono determinare i punti di massimo e di minimo?
In conclusione se f è definita in un intervallo chiuso e limitato [a,b] ed è derivabile nell'intervallo aperto (a,b), per determinare i punti di massimo e minimo assoluti basta determinare i punti di massimo e minimo relativi, interni all'intervallo, e confrontare i valori della funzione in questi punti con i valori che la funzione assume agli estremi dell'intervallo e nei punti in cui non è derivabile. Il punto in cui la funzione prende valore maggiore tra questi sarà il punto di massimo assoluto, il punto in cui la funzione prende valore minore tra questi sarà il punto di minimo assoluto. Se invece l'intervallo in cui è definita f non è chiuso e limitato, non è detto che la funzione abbia punti di massimo o minimo assoluto, pur potendo comunque avere punti di massimo e minimo relativi.



Sappiamo che se la funzione f è derivabile in x_0, nei punti di massimo e minimo relativi deve essere $f'(x_0)=0$ e quindi condizione necessaria affinché un punto x_0 sia di massimo o minimo relativo è che in x_0 risulti $f'(x_0)=0$.
Una condizione sufficiente affinché un punto x_0 sia di massimo o minimo relativo è data invece dal seguente teorema che diamo senza dimostrazione:

Teorema 8.7. Sia f: $(a,b) \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto interno ad (a,b). Se f è derivabile due volte in x_0 e se $f'(x_0)=0$, condizione sufficiente affinché un punto x_0 sia di massimo (di minimo) relativo per f è che sia $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$); cioè x_0 è un punto di massimo relativo per f se $f''(x_0)<0$, è un punto di minimo relativo per f se $f''(x_0)>0$.

Un criterio più semplice per rendersi conto se un punto x_0 è di massimo o di minimo utilizzando solo la derivata prima, sfrutta la definizione di massimo e minimo relativo: se in un punto x_0 si ha $f'(x_0)=0$ e se per x in un intorno di x_0 è $f'(x)>0$ per $x< x_0$ e $f'(x)<0$ per $x>x_0$ allora x_0 è un punto di massimo relativo, se invece in un punto x_0 si ha $f'(x_0)=0$ e se per x in un intorno di x_0 è $f'(x)<0$ per $x< x_0$ e $f'(x)>0$ per $x>x_0$ allora x_0 è un punto di minimo relativo. Ciò segue dal fatto che nel primo caso f è crescente a sinistra di x_0 e decrescente a destra di x_0, e quindi x_0 è un massimo nel secondo caso invece f è decrescente a sinistra di x_0 e crescente a destra di x_0 e quindi x_0 è un minimo.

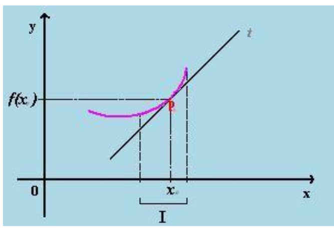
Terminiamo il paragrafo con una generalizzazione del teorema di Lagrange: il Teorema di Cauchy che diamo senza dimostrazione.

Teorema 8.8 (di Cauchy)
Siano f(x) e g(x) due funzioni definite e continua nell'intervallo chiuso e limitato [a,b] e derivabili nell'intervallo aperto (a,b); supponiamo inoltre che $f'(x)$ e $g'(x)$ non si annullino contemporaneamente in (a,b) e che sia $g(a)\neq g(b)$. Allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo [a,b], cioè $c\in(a,b)$, tale che

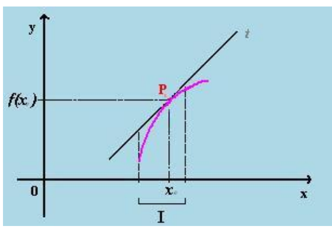
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

9. Concavità, convessità e flessi.

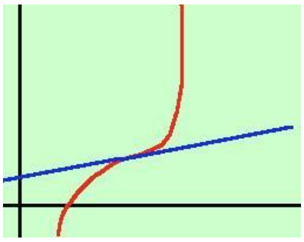
Sia f una funzione definita in un intervallo (a,b) e sia x_0 un punto interno all'intervallo. Consideriamo il grafico di f e la tangente al grafico in x_0. Se esiste un intorno di x_0 tale che la curva si trova tutta al di sopra della tangente (cioè per ogni x in questo intorno i valori dell'ordinata sulla curva sono maggiori o uguali dei corrispondenti valori dell'ordinata sulla tangente), si dice che la curva volge la concavità verso l'alto; se invece esiste un intorno di x_0 in cui la curva si trova tutta al di sotto della tangente (cioè per ogni x in questo intorno i valori dell'ordinata sulla curva sono minori o uguali dei corrispondenti valori dell'ordinata sulla tangente),si dice che la curva volge la convessità verso l'alto; se non si presenta nessuno di questi casi si dice che la curva ha un flesso in x_0.



concavità verso l'alto



convessità verso l'alto.



flesso

Vale il seguente teorema che dà un criterio per determinare concavità, convessità e flessi di una funzione e che diamo senza dimostrazione.

Teorema 9.1. Sia f definita in (a,b) e sia x_0 un punto interno ad (a,b).

9.1.1 Se f è derivabile due volte in x_0 e risulta $f''(x_0)>0$, allora la curva volge la concavità verso l'alto.

9.1.2 Se f è derivabile due volte in x_0 e risulta $f''(x_0)<0$, allora la curva volge la convessità verso l'alto.

9.1.3 Se f è derivabile tre volte in x_0 e risulta $f''(x_0)=0$, e $f'''(x_0)\neq 0$ allora la curva ha un flesso in x_0.

Più in generale vale il seguente teorema.

Teorema 9.2. Sia f definita in (a,b) e sia x_0 un punto interno ad (a,b) in cui la funzione sia derivabile un numero n di volte sufficientemente grande. Se risulta $f''(x_0)=0$, e la prima derivata diversa da zero in x_0 è di ordine dispari, la curva ha un flesso in x_0; quando invece la prima derivata diversa da zero in x_0 è di ordine pari, allora la curva volge la concavità verso l'alto nel punto x_0 se tale derivata è positiva in x_0, volge la convessità verso l'alto in x_0 se tale derivata è negativa in x_0.

10. Forme indeterminate e Teorema de l'Hôpital.

Le derivate possono essere utili anche per il calcolo di certi limiti che si presentano sotto *forma indeterminata* come il quoziente di due funzioni che tendono simultaneamente a zero o che siano infinitamente grandi, tipo: $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Altre forme indeterminate sono del tipo: $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Vale il seguente teorema che diamo senza dimostrazione.

Teorema 10.1. (di De L'Hôpital)

Sia x_0 un punto di accumulazione per (a,b) e siano f: $(a,b)\to\mathbb{R}$, g: $(a,b)\to\mathbb{R}$, due funzioni

1) infinitesime in x_0, cioè $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, con $g(x)\neq 0$ per $x\neq x_0$ e derivabili in un intorno di x_0, escluso al più il punto x_0;

2) oppure due funzioni infinitamente grandi in x_0, cioè $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$, $\lim_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$, con $g(x)\neq 0$ in (a,b) e derivabili in (a,b).

Allora se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

esiste anche il limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

e i due limiti sono uguali.

Notiamo che se il quoziente $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ nel punto x_0 presenta di nuovo una indeterminazione del tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ o $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, e se le funzioni $f'(x)$ e $g'(x)$ soddisfano le condizioni del teorema, si può allora passare alle derivate seconde, e così via. Il Teorema 10.1 vale ancora se invece di considerare i limiti ad un punto x_0 di accumulazione per (a,b) consideriamo il limite a $\pm\infty$. Per poter applicare il Teorema 10.1 occorre sempre ricondursi ad una forma indeterminata del tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ o $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. A volte la scelta migliore per arrivare a questo è suggerita dalla forma stessa delle funzioni di cui calcolare il limite. Esiste comunque una procedura standard.

a) Siano f: $(a,b)\to\mathbb{R}$, g: $(a,b)\to\mathbb{R}$, due funzioni tali che $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ e $\lim_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$, e supponiamo di voler calcolare $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$. Allora la forma indeterminata si presenta del tipo $0\cdot\infty$. In questo caso si può applicare il teorema scrivendo il prodotto nella forma:

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

secondo la convenienza.

b) Siano f: $(a,b)\to\mathbb{R}$, g: $(a,b)\to\mathbb{R}$, due funzioni tali che $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$, e $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]$ si presenti nella forma indeterminata ∞-∞. Per calcolare $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]$ si può applicare il teorema scrivendo la differenza nella forma:

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

c) Siano f: $(a,b)\to\mathbb{R}$, g: $(a,b)\to\mathbb{R}$, due funzioni continue tali che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ porti ad una forma indeterminata del tipo 0^0, ∞^0, 1^∞. Allora si procede come nel paragrafo 6. Scriviamo

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}.$$

Si ha allora per la continuità di f e g:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\log f(x)}.$$

Nelle ipotesi fatte, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\log f(x)$ è una forma indeterminata. Si applica a questa forma il Teorema 10.1 e poi si calcola il limite desiderato.

Esempi.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^x}=0$. (Forma indeterminata $\left(\frac{0}{0}\right)$)

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. (Forma indeterminata $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. (Forma indeterminata $0\cdot\infty$)

4) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}x} - \frac{1}{\operatorname{tg}x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x} = -\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}x = 0$.

(Forma indeterminata $\infty-\infty$)

Questo limite si può calcolare anche ricordando i limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}x} - \frac{1}{\operatorname{tg}x}\right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}x} = 0.$$

5) $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\log x} = 1$, dato che $\lim\limits_{x\to 0} x\log x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

(Forma indeterminata 0^0)

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\log x}{x}} = 1$, dato che $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$. (Forma indeterminata ∞^0)

Osserviamo esplicitamente che per applicare il Teorema di De L'Hôpital devono valere tutte le ipotesi, una cattiva applicazione porta a risultati sbagliati. Consideriamo ad esempio il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{x+\operatorname{sen}x} \quad \text{(Forma indeterminata } \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\text{).}$$

Passando al rapporto delle derivate si ha $\frac{1-\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$. Il limite di questo rapporto non esiste, però sbaglieremmo se dicessimo che anche il limite della funzione assegnata non esiste, infatti il Teorema di De L'Hôpital è applicabile solo se il limite del rapporto tra le derivate esiste. Calcolando direttamente, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{x+\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+\frac{\cos x}{x})}{x(1+\frac{\operatorname{sen}x}{x})} = 1.$$