

Moto in tubi e turbolenza

I. Introduzione

In una precedente dispensa è stato analizzato il moto di scorrimento in una dimensione, cioè in quelle situazioni nelle quali il moto avviene lungo una direzione uniforme nello spazio, mentre nella direzione trasversale si sviluppa un gradiente di velocità.

Tra queste tipologie di moto rettilineo si inserisce il moto in tubi che, analizzato in termini di trasporto della quantità di moto, fornisce le seguenti equazioni fondamentali:

Il profilo di sforzi in un condotto a sezione circolare di raggio R (o diametro $D=2R$) di lunghezza L e ai cui estremi venga applicata una differenza di pressione ΔP è dato da:

$$\sigma = \frac{\Delta P}{L} \frac{r}{2} \quad (1.1)$$

Il profilo di velocità che si sviluppa nel tubo è parabolico e dato da:

$$v = \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (1.2)$$

La portata circolante nel tubo, infine, vale:

$$Q = \bar{v} \pi R^2 = \int_0^R v 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8L} \frac{\Delta P}{\mu} \quad (1.3)$$

con $\bar{v}$ velocità media (il rapporto tra la portata volumetrica Q e l'area della sezione del tubo). Tra la velocità media e la velocità massima nel tubo sussiste inoltre la relazione:

$$\bar{v} = \frac{v_{\max}}{2} = \frac{\Delta P R^4}{8L\mu} \quad (1.4)$$

Il moto in tubi, tuttavia, non è sempre così facilmente descrivibile dalle equazioni (1.1)-(1.4). Mentre il profilo di sforzi è comunque descritto dalla (1.1), il profilo di velocità subisce cambiamenti qualitativi drammatici quando la portata di fluido supera un valore critico. Si assiste quindi alla transizione dal regime di moto **laminare** a condizioni di flusso caotiche, dette appunto di moto **turbolento**. La descrizione qualitativa di tali fenomeni è riportata nel paragrafo successivo.

II. L'esperienza di Reynolds

Nel XIX secolo Osborne Reynold condusse una serie di esperimenti concernenti il moto di fluidi in condotti che portarono all'individuazione e alla definizione di varie condizioni di flusso. Se ne fornisce qui un breve sommario.

Reynolds fu in grado di visualizzare il moto di un fluido in un tubo al variare della sua velocità media. Egli utilizzò la tecnica del **tracciante**, inserendo particelle di fluido colorato e osservando le corrispondenti traiettorie (o **linee di flusso**). L'esperienza è riassunta in Fig.1.

A velocità relativamente basse si instaurano condizioni di flusso **laminare**: il movimento avviene per filetti fluidi che si mantengono paralleli alle pareti del condotto e il tracciante immesso mantiene la sua traiettoria rettilinea senza mescolarsi con il fluido circostante. Non avvengono quindi scambi di materia tra i filetti fluidi. Il moto è **laminare**.

All'aumentare della velocità si osservano condizioni di flusso di **transizione**: il movimento avviene ancora per filetti fluidi; questi però all'aumentare della velocità divengono sempre più instabili, perdono il loro parallelismo con le pareti e inizia a verificarsi uno scambio di materia tra le diverse regioni del campo.

Per velocità ancora maggiori si completa la transizione al regime **turbolento**: gli scambi di materia tra le diverse regioni del campo

sono prevalenti, il moto non avviene più per filetti fluidi ed il tracciante si disperde subito occupando tutte le zone del campo di moto.

Il lettore interessato può studiare direttamente l'esperimento di Reynolds scaricando i seguenti tre filmati presenti nelle cartelle di materiale didattico:

- Regime laminare: LAMINARE Low.mpg
- Regime di transizione: TRANSIZIONE Low.mpg
- Regime turbolento: TURBOLENTO Low.mpg

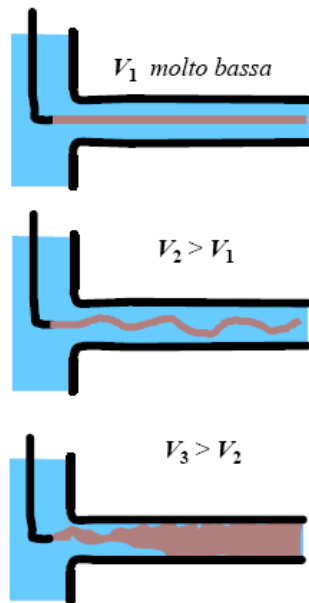


Fig.1

Le equazioni di bilancio della quantità di moto, almeno nella forma studiata in questo corso, sono in grado di prevedere soltanto le condizioni di flusso laminare. Come già detto in precedenza, queste equazioni prevedono come unica soluzione un profilo di velocità di forma parabolica per qualunque valore di portata, con traiettorie tutte parallele tra loro, corrispondente appunto alle

condizioni sperimentali di moto laminare verificate da Reynolds a basse velocità. Le condizioni di flusso laminare sono riepilogate nella Fig.2.

Le condizioni di moto turbolento sono invece schematizzate nella Fig.3. In essa sono visualizzate le principali caratteristiche del moto turbolento: il moto non è stazionario ma continuamente variabile nello spazio e nel tempo, le traiettorie sono non rettilinee, la velocità non è uniforme longitudinalmente, ed esistono componenti trasversali di velocità non nulle.

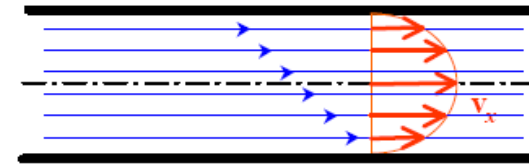


Fig.2

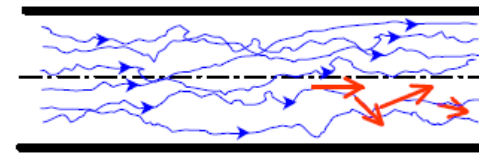


Fig.3

Nel regime turbolento le condizioni di flusso sono quindi caotiche. E' impossibile addirittura definire una valore di velocità in ogni punto del campo di moto, in quanto essa varia continuamente nel tempo, mostrando continue fluttuazioni. Tali fluttuazioni, tuttavia, generalmente avvengono su scale di tempi estremamente ridotte rispetto ai tempi caratteristici del processo (ad esempio, il tempo di permanenza del fluido nel tubo). Da un punto di vista macroscopico, se invece di considerare i valori istantanei si effettuano medie della velocità per intervalli di tempo piccoli rispetto ai tempi caratteristici del processo, ma comunque grandi

rispetto ai tempi caratteristici delle fluttuazioni di velocità, si perviene ad un profilo di velocità sostanzialmente **costante** lungo la sezione del tubo. In altri termini, il flusso turbolento a livello microscopico si manifesta apparentemente come un flusso macroscopico **a pistone**.

III. Analisi dimensionale del moto in tubi

Vista la particolare complessità del moto in tubi, almeno in termini delle transizioni tra i vari regimi di moto, un approccio ingegneristico al problema ci vede costretti a passare attraverso le tecniche dell'analisi dimensionale, già utilizzate in precedenza per lo studio del moto intorno a oggetti sommersi.

Nel caso del moto in tubo il punto di partenza è come al solito la preparazione della lista dei parametri significativi del problema:

$$\begin{array}{l} \bar{v} \\ D \\ \mu \\ \rho \\ L \\ \Delta P \end{array} \quad (3.1)$$

Oltre alla velocità media del fluido, al diametro del tubo, a viscosità e densità del fluido e alla lunghezza del condotto, nella lista (3.1) compare anche la *perdita di carico* ΔP , già presente nelle equazioni per il moto laminare.

Stante questa lista, il teorema di Buckingham informa che devono esistere $6 \text{ (parametri)} - 3 \text{ (dimensioni)} = 3$ gruppi adimensionali indipendenti che descrivono il problema. Questi possono essere:

$$\begin{array}{l} Re = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu} \\ \frac{L}{D} \\ f' = \frac{\Delta P}{2 \rho \bar{v}^2} \end{array} \quad (3.2)$$

Il primo gruppo è il già ben noto numero di Reynolds; il secondo è il rapporto tra le due dimensioni caratteristiche del problema; il terzo ha un significato fisico simile al coefficiente di attrito definito nel moto intorno a oggetti sommersi, dove la forza spingente per unità di superficie per questo flusso è proprio la differenza di pressione. Il fattore 2 è inserito. Infatti, ricordando l'espressione dello sforzo alla parete (eq. ...) la forza per scopi puramente numerici e, come al solito, non altera la trattazione basata sull'analisi dimensionale.

Sulla base del teorema di Buckingham possiamo quindi stabilire che esiste un legame tra i tre gruppi adimensionali del tipo:

$$g\left(f', Re, \frac{L}{D}\right) = 0 \quad (3.3)$$

o anche:

$$f' = f'\left(Re, \frac{L}{D}\right) \quad (3.4)$$

La (3.4) può essere ulteriormente semplificata se si considera che, nel moto stazionario e completamente sviluppato nel tubo (in assenza cioè di effetti di imbocco) le perdite di carico sono direttamente proporzionali alla lunghezza del tubo stesso, per cui f' non può che risultare direttamente proporzionale al gruppo L/D :

$$f' = \frac{L}{D} f(Re) \quad (3.5)$$

In definitiva si ha:

$$f = \frac{\Delta P}{2\rho\bar{v}^2} \frac{D}{L} = f(Re) \quad (3.6)$$

La quantità definita nella (3.6) è il **fattore di attrito**, che risulta quindi essere una funzione biunivoca del numero di Reynolds.

La rappresentazione grafica quantitativa del legame tra il fattore di attrito e il numero di Reynolds è data dal cosiddetto **abaco di Moody**, riportato in Fig.3.

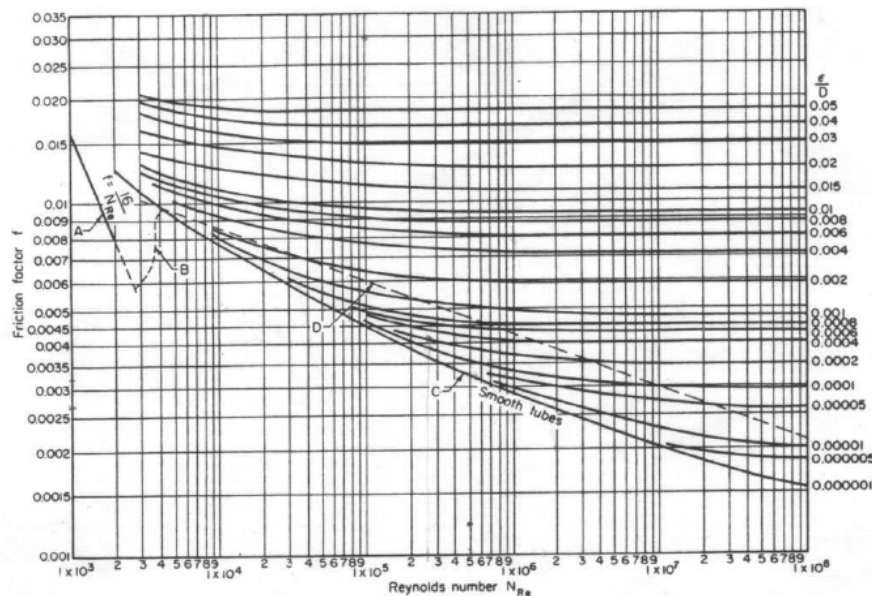


Fig.4

La parte principale dell'abaco, in doppia scala logaritmica è costituito da una coppia di curve fondamentali: la prima è una retta di pendenza -1, rappresentativa della relazione:

$$f = \frac{16}{Re} \quad (3.7)$$

Tale retta rappresenta il comportamento **laminare**, cioè per quei valori del numero di Reynolds per i quali il moto è controllato unicamente dalle forze viscosse. Essa vale per valori di $Re < 2100$, cioè fino al limite della transizione tra moto laminare e moto turbolento. In Fig.3 la retta viene mostrata per motivi di spazio solo a partire da $Re = 1000$. La seconda curva, non rettilinea ma comunque decrescente, è rappresentativa del moto in regime turbolento, e vale quindi per $Re > 2100$. Essa è contrassegnata dalla dicitura "Smooth tubes", valendo cioè nel caso di tubi lisci. La linea tratteggiata, nel tratto indicato dalla lettera "B", rappresenta il comportamento che si ottiene in particolari condizioni di transizione, ma non è utile ai fini della presente trattazione. La parte indicata con "D" verrà discussa successivamente.

A parte le due curve fondamentali l'abaco riporta anche una serie di curve ad andamento più costante che si posizionano al di sopra della curva turbolenta per tubi lisci. Esse si riferiscono alla situazione nella quale la superficie interna del tubo non è liscia ma **scabra**. La scabrezza di un tubo è dovuto alla presenza di una superficie non liscia (come accade ad esempio in un condotto fabbricato con materiale cementizio), sulla quale sono presenti asperità, cioè creste e valli, che determinano appunto una superficie irregolare. La scabrezza è definita da un parametro assoluto ε , che rappresenta la dimensione lineare caratteristica delle asperità. Quando normalizzata rispetto al diametro nominale del tubo, la scabrezza determina un ulteriore gruppo adimensionale, la **scabrezza relativa**, ε/D , e il fattore di attrito risulta dipendere da questo ulteriore parametro adimensionale:

$$f = f\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right) \quad (3.8)$$

L'effetto della scabrezza sul fattore di attrito è facilmente comprensibile dall'abaco: una scabrezza relativa non nulla determina una regione, ad alti valori di Re , in cui il fattore di attrito risulta indipendente dal Re stesso; inoltre, all'aumentare della scabrezza relativa il fattore di attrito aumenta a parità di numero di Reynolds, mentre allo stesso tempo aumenta di ampiezza la regione in cui f risulta indipendente da Re .

IV. Relazioni operative per il moto in tubi

Esistono diverse relazioni matematiche che legano il fattore di attrito al numero di Reynolds e alla scabrezza relativa per il moto in tubi.

Regime laminare

Nel moto laminare ($Re < 2100$), come detto, la relazione tra f e Re è esplicita e molto semplice:

$$f = \frac{16}{Re} \quad (4.1)$$

Sostituendo le espressioni (3.6) e (3.2) nella (4.1) si ha:

$$\frac{\Delta P}{2\rho\bar{v}^2} \frac{D}{L} = 16 \frac{\mu}{\rho\bar{v}D} \quad (4.2)$$

Inoltre, introducendo al posto della velocità media l'espressione per la portata volumetrica (1.3) si ottiene, con facili passaggi:

$$\frac{\Delta P \pi D^4}{QL} = 128\mu \quad (4.3)$$

dalla quale si può ricavare il legame diretto tra portata e perdita di carico:

$$Q = \frac{\Delta P \pi D^4}{128\mu L} = \frac{\Delta P \pi R^4}{8\mu L} \quad (4.4)$$

La (4.4) è proprio la legge di Poiseuille (vedi (1.3)). La (4.4) quindi, da un lato attesta la validità dell'abaco di Moody in regime laminare, dall'altro conferma che in tale regime di moto, controllato dalle sole forze viscosive, il legame tra portata e perdita di carico contiene solo la viscosità e non la densità.

Regime turbolento

Con il passare degli anni e con il miglioramento delle tecniche sperimentali ed analitiche, sono state proposte espressioni matematiche sempre più precise per descrivere il comportamento nel moto turbolento.

L'equazione più semplice, e storicamente tra le prime ad essere introdotta, è l'**equazione di Blasius**:

$$f = 0.0791 Re^{-0.25} \quad (4.5)$$

La (4.5) permette di trovare un legame diretto semplice tra le perdite di carico e la portata, ma rappresenta un'approssimazione molto rozza del comportamento reale. La scarsa efficacia dell'equazione di Blasius è comprensibile dal fatto che nell'abaco di Moody essa è rappresentata dalla linea tratteggiata "D". Considerando anche che l'abaco è in doppia scala logaritmica, si può comprendere che il livello di approssimazione è veramente scarso. L'equazione di Blasius è utilizzata solo per calcoli di primissima approssimazione.

Equazioni molto più accurate di quella di Blasius sono:

– **L'equazione di Colebrook**:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4 \log \left(\frac{1}{3.7} \frac{\varepsilon}{D} + \frac{1.256}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (4.6)$$

La (4.6) descrive in maniera molto accurata il legame tra f e Re per valori di quest'ultimo maggiori di 3000. Essa è valida sia per tubi scabri che per tubi lisci (dove ovviamente basta porre $\varepsilon/D=0$). La forma apparentemente “strana” della (4.6) è dettata dal fatto che essa permette un calcolo esplicito della velocità media (e quindi della portata di fluido) nel caso in cui tutti gli altri parametri siano tutti noti. Per capirlo, esplicitiamo prima di tutto la quantità $Re \sqrt{f}$:

$$Re \sqrt{f} = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu} \left(\frac{\Delta P}{2 \rho \bar{v}^2} \frac{D}{L} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\rho \Delta P}{2 \mu^2} \frac{D^3}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

Quindi il prodotto $Re \sqrt{f}$ non contiene più la velocità e la (4.6), noti tutti gli altri parametri diventa una equazione di primo grado nell'incognita velocità media.

– **L'equazione di Churchill:**

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4 \log \left[0.27 \frac{\varepsilon}{D} + \left(\frac{7}{Re} \right)^{0.9} \right] \quad (4.8)$$

La (4.8) vale con ottima approssimazione per $Re > 4000$ e, contenendo a secondo membro il numero di Reynolds, risulta esplicita nelle perdite di carico, nel senso che, noti tutti gli altri parametri, permette di ricavare ΔP .

Manipolando opportunamente le (4.6) e (4.8) è possibile ricavare equazioni algebriche che permettono il calcolo esplicito di progetto o di verifica per il moto in tubi. Le principali situazioni da considerare sono:

Calcolo della portata. Nota la geometria del tubo, le proprietà del fluido e la perdita di carico, la manipolazione dell'equazione di Colebrook fornisce la seguente espressione **esatta** per la portata volumetrica circolante nel tubo:

$$Q = - \sqrt{\frac{D^5 \Delta P}{\rho L}} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{1}{3.7} \frac{\varepsilon}{D} + \frac{1.78 \mu}{\rho \sqrt{\frac{D^3 \Delta P}{\rho L}}} \right) \quad (4.9)$$

Calcolo delle perdite di carico. Nota la geometria del tubo, le proprietà del fluido e la portata (e quindi la velocità media) le perdite di carico si calcolano direttamente manipolando l'equazione di Churchill. Il risultato **esatto** è:

$$\Delta P = \frac{0.203 \rho L Q^2}{D^5 \left[\log \left(\frac{1}{3.7} \frac{\varepsilon}{D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (4.10)$$

Calcolo del diametro del tubo. In questo caso, nota la portata e le perdite di carico, la lunghezza e la scabrezza del tubo e le proprietà del fluido l'espressione **esatta** ed esplicita per il diametro del tubo è ricavabile manipolando l'equazione di Colebrook. Il risultato finale è:

$$D = \left\{ 0.125 \frac{\rho L Q^2}{\Delta P} \left[\left(\frac{\varepsilon^5 \Delta P}{\rho L Q^2} \right)^{0.25} + \left(\frac{\mu^5 L}{\Delta P \rho^4 Q^3} \right)^{0.20} \right]^{0.20} \right\}^{0.20} \quad (4.11)$$

V. Pressione ridotta, diametro idraulico, potenza di pompaggio

Ulteriori utili relazioni per il calcolo delle grandezze relative al moto in tubi possono essere ricavate dai concetti ai quali si riferisce il titolo del paragrafo.

Le relazioni ricavate nei paragrafi precedenti valgono nell'ipotesi di tubo orizzontale. Nel caso di tubo verticale o inclinato si è già ricavato in una precedente dispensa che la perdita di carico ΔP può essere sostituita dalla cosiddetta **pressione ridotta**:

$$\Delta p \equiv (p_1 + \rho g H_1) - (p_2 + \rho g H_2) \quad (5.1)$$

Dove H_1 e H_2 sono le quote verticali corrispondenti alle sezioni di ingresso e di uscita del tubo, misurate rispetto ad uno stesso piano verticale. E' ovvio che tutte le relazioni anche per il moto turbolento valgono anche per queste situazioni quando alla differenza di pressione si sostituisca la differenza di pressione ridotta.

L'abaco di Moody è stato ricavato nel caso di tubo a sezione circolare. Esso può però essere utilizzato anche per tubi a sezione non circolare attraverso l'introduzione del cosiddetto **diametro idraulico**. Esso è definito come:

$$D_H = 4 \frac{\text{area sezione}}{\text{perimetro bagnato}} \quad (5.2)$$

cioè, a meno del fattore 4, dal rapporto tra l'area della sezione attraversata dal fluido divisa per il perimetro della sezione stessa. E' facile verificare che il diametro idraulico, che ha ovviamente dimensioni di una lunghezza, degenera nel diametro effettivo proprio nel caso di una sezione circolare. Si ha infatti:

$$D_H = 4 \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\pi D} = D \quad (5.3)$$

Le sperimentazioni sul moto in tubi con sezioni diverse da quella circolare indicano che i calcoli possono ancora essere fatti mediante l'abaco di Moody o attraverso le relazioni (4.6)-(4.11) del paragrafo precedente se al posto del diametro viene utilizzato il diametro idraulico.

Il calcolo del diametro idraulico è particolarmente facile per sezioni di geometria semplice. Ad esempio, nel caso di un quadrato di lato l si ha:

$$D_H = 4 \frac{l^2}{4l} = l \quad (5.4)$$

cioè il diametro idraulico del quadrato coincide con il suo lato. Invece, nel caso di un rettangolo di base b e altezza h si ha:

$$D_H = 4 \frac{bh}{2(b+h)} = 2 \frac{bh}{(b+h)} l \quad (5.5)$$

mentre nel caso di un triangolo equilatero di lato l si ha:

$$D_H = 4 \frac{\frac{l^2 \sqrt{3}}{4}}{3l} = \frac{2\sqrt{3}}{3} l \quad (5.6)$$

Si noti che le relazioni per il moto in tubi che utilizzano il diametro idraulico **valgono solo nel caso di moto turbolento**. Nel caso del moto laminare, invece, è necessario utilizzare equazioni specifiche di volta in volta diverse dalla (4.1), anche se in generale vale sempre una relazione tra fattore di attrito e numero di Reynolds della forma:

$$f = \frac{A}{Re} \quad (5.7)$$

dove A è una costante che dipende dalla geometria della sezione.

E' infine utile ricavare la formula che permette di legare la potenza di pompaggio alle grandezze tipiche del moto in tubi. Supponiamo di avere una portata Q di un liquido o un gas che fluisce in un tubo sotto l'azione di una differenza di pressione ΔP . La forza di pressione esercitata sul fluido è data dal prodotto di tale differenza per l'area della sezione. Tale forza produce un lavoro per unità di tempo, cioè una potenza, W , data dal prodotto della forza stessa per la velocità del fluido. In definitiva, quindi, si ha:

$$W = \Delta P \frac{\pi D^2}{4} \bar{v} = \Delta P Q \quad (5.8)$$

La (5.8), di validità del tutto generale, afferma che la potenza di pompaggio è sempre pari al prodotto della portata per la perdita di carico. Tale semplice relazione, permette quindi il facile dimensionamento delle apparecchiature di pompaggio (pompe o compressori) per il trasporto di fluidi in tubi.