24. Teoremi fondamentali dei limiti: unicita', teorema della permanenza del segno.

Teorema del confronto.

Teoremi fondamentali dei limiti

I teoremi e le proprietà che seguono sono relativi a funzioni che ammettono limite (sia finito che infinito) per x che tende ad un numero finito x_0 oppure per x che tende ad infinito

Per semplicità, li enunceremo e li dimostreremo nel caso in cui la funzione $f(x)$ considerata ammetta limite finito per x che tende ad un numero finito x_0

Teorema di unicità del limite

Sia $f(x)$ definita in un intervallo I (limitato o non limitato) fatta eccezione al più per un punto $x_0 \in \mathrm{I}$

Se esiste il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$

$$\Downarrow$$

tale limite è unico

Teorema della permanenza del segno

Sia $f(x)$ definita in un intervallo I (limitato o non limitato) fatta eccezione al più per un punto $x_0 \in \mathrm{I}$

Se per $x \to x_0$ la funzione $f(x)$ ammette limite finito $l \neq 0$ il

$$\Downarrow$$

esiste un intorno I_{x_0} del punto x_0 tale che:

$$\forall x \in I_{x_0},\ x \neq x_0$$

i corrispondenti $f(x)$ hanno lo stesso segno del limite l

Teorema del confronto

Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tre funzioni definite in uno stesso intervallo I (limitato o non limitato) fatta eccezione al più per un punto $x_0 \in$ I.

Se risulta che $\forall x \in I, x \neq x_0$

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

Teorema del confronto

Analogamente, per $l = \pm\infty$ se:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad f(x) \le g(x) \\ \bullet \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad f(x) \le g(x) \\ \bullet \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Infinitesimi e infiniti

Def. Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo I (limitato o illimitato) fatta eccezione al più per un punto $x_0 \in$ I (con x_0 punto al finito o all'infinito).

- si dice che f è infinitesima per

$$x \to x_0 \quad \text{oppure} \quad x \to \pm\infty$$

se risulta che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

Infinitesimi e infiniti

- si dice che f è infinita per

$$x \to x_0 \quad \text{oppure} \quad x \to \pm\infty$$

se risulta che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$