

LE FUNZIONI

Alla base del calcolo differenziale esiste il concetto di funzione. Il termine funzione è stato introdotto nella matematica da Gottfried Wilhelm LEIBNIZ nel 1664, per denotare una quantità collegata ad una curva, come la pendenza di una curva o uno specifico punto di una curva.

Successivamente, intorno alla metà del XVIII secolo la parola funzione fu usata da EULERO per descrivere una espressione o una formula che coinvolge vari argomenti, come ad es. $f(x) = \sin(x) + x^3$.

Verso la fine del XIX secolo i matematici hanno cominciato a tentare di formalizzare l'intera matematica servendosi della teoria degli insiemi e si sono proposti di definire ogni entità matematica mediante un insieme. DIRICHLET e LOBACHEVSKIJ indipendentemente e quasi simultaneamente hanno data la moderna definizione "formale" di funzione secondo cui "una funzione è un caso speciale di una relazione".

LA FORMA MATEMATICA DEI FENOMENI NATURALI

Una delle questioni fondamentali della ricerca scientifica è quella di **stabilire se esistano relazioni tra le quantità che sono essenziali per la descrizione di un fenomeno.**

Individuare tali relazioni permette di spiegare il fenomeno, descrivendo come tutti i suoi molteplici aspetti dipendano gli uni dagli altri.

FUNZIONE: Una relazione in cui uno degli aspetti può essere studiato a partire dalla conoscenza di altri.

- se una quantità è funzione delle altre, allora è possibile fare delle previsioni sul suo valore quando le altre variano;
- se un ricercatore può fare previsioni su un fenomeno, può anche modificarne lo svolgimento secondo i suoi scopi.

Una descrizione della realtà empirica tenendo conto di tutti gli aspetti tratti dall'osservazione è **impossibile**!

Il **modello di un fenomeno naturale** è una costruzione ideale, anche molto lontana dalla realtà, che si basa però su caratteristiche (**variabili del fenomeno**) ritenute fondamentali, tipiche del modo in cui il fenomeno si realizza.

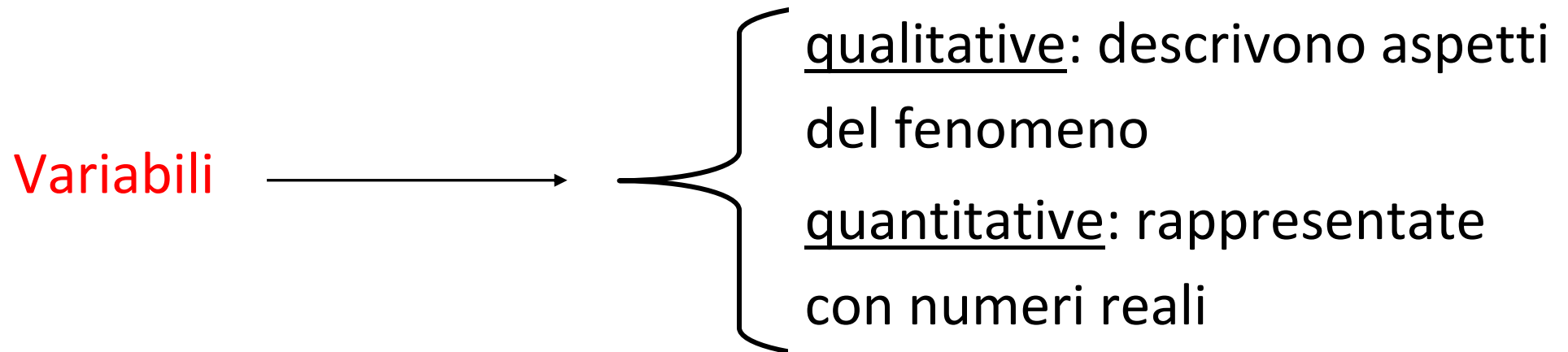
CRESCITA DI UNA PIANTA

L' accrescimento di una pianta appartenente ad una specie fissata dipende da:

- ✓ il corredo genetico
- ✓ l'esposizione alla luce
- ✓ la composizione del terreno
- ✓ le condizioni climatiche
- ✓ le malattie e i parassiti che possono impedirne o rallentarne lo sviluppo

Focalizziamo la ricerca sull'accrescimento di una pianta giovane privilegiando un modello accrescimento in cui la quantità di luce è ritenuta cruciale .

Verificata sperimentalmente la correttezza di questa ipotesi, si possono inserire nella descrizione altre variabili. Se i risultati ottenuti dopo questo inserimento non contraddicono quelli della descrizione semplificata, il modello può essere considerato **valido**.



luminosità e crescita —————→ variabili quantitative

presenza di parassiti
caratteristiche genetiche } variabili qualitative

si può esprimere la relazione esistente tra le variabili quantitative
in **termini matematici**:

l'altezza raggiunta dalla pianta è proporzionale alla luminosità

governando opportunamente la variabile luminosità possiamo
controllare la variabile crescita.

Passi per la formulazione di un modello

1. individuare i fattori cruciali che caratterizzano il fenomeno,
2. individuare le eventuali relazioni tra le grandezze in gioco del fenomeno,
3. quantificare le relazioni trovate

Concetto di funzione

Nell'esperienza quotidiana si utilizza già implicitamente il concetto di funzione.

Quando si afferma che:

- “la temperatura dipende dall'altitudine”
- “a velocità fissa, il tempo di percorrenza del treno dipende dalla lunghezza del percorso effettuato”
- "la misura di una circonferenza dipende dalla lunghezza del raggio"

La misura di una circonferenza dipende dalla lunghezza del raggio:

$$\text{se } r = 0 \longrightarrow C = 0$$

$$\text{se } r = 1/2 \longrightarrow C = \pi$$

$$\text{se } r = 1 \longrightarrow C = 2\pi$$

$$\text{se } r = 2 \longrightarrow C = 4\pi$$

....

E' possibile quindi affermare che la misura della circonferenza è funzione del raggio.

$$C = C (r)$$

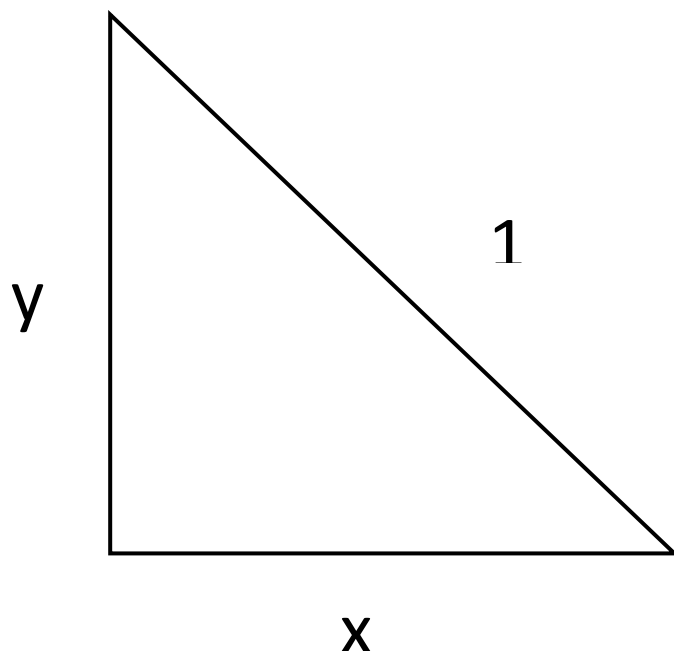
Ad ogni numero reale in ingresso
(il valore del raggio)

resta associato univocamente un altro
numero reale in uscita
(la misura della circonferenza)

Proprio l'**univocità** dell'associazione è l'elemento caratterizzante del concetto di funzione

In generale gli ingressi ammissibili sono soggetti a restrizioni che dipendono dal tipo di corrispondenza o da motivi di coerenza con il fenomeno

Nel caso della misura della circonferenza, essendo r la lunghezza del raggio, i valori di r in ingresso possono essere solo ≥ 0



è necessario calcolare la radice quadrata di $1 - x^2$ la condizione è che si abbia

$$1 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

ma x è una lunghezza $\rightarrow 0 \leq x \leq 1$

$$y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

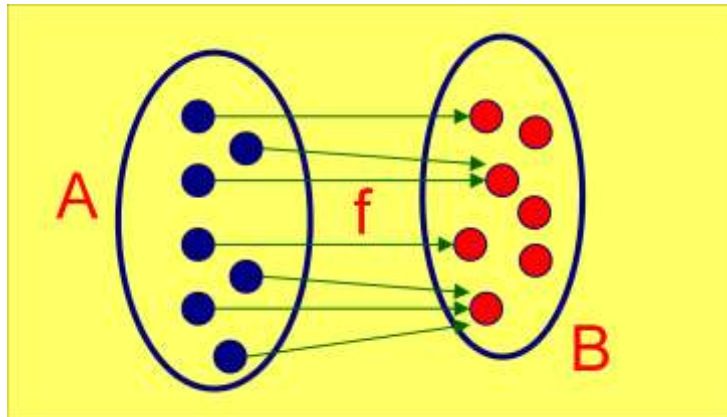
non ha senso per alcuni valori di x :

$x = 2$ si ha:

$$1 - x^2 = -3!$$

la radice quadrata di un numero negativo non è un numero reale

Definizione: Dati due insiemi non vuoti A e B di numeri reali. Una funzione di A in B è una legge che ad ogni elemento $a \in A$ fa corrispondere uno ed uno solo elemento $b \in B$.

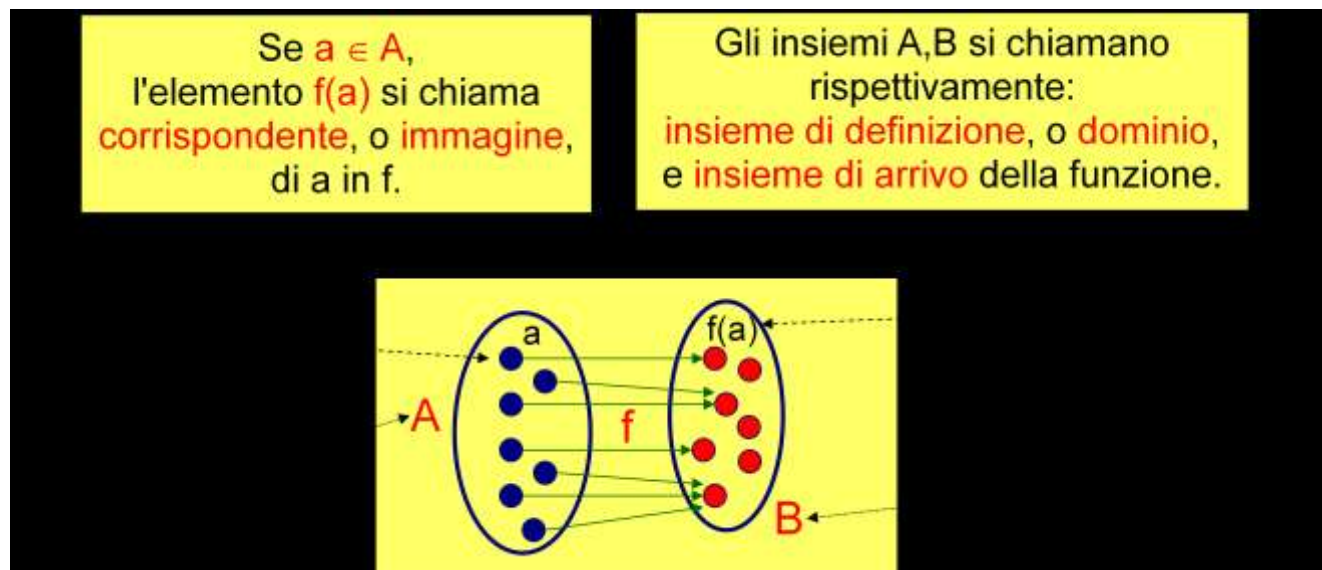


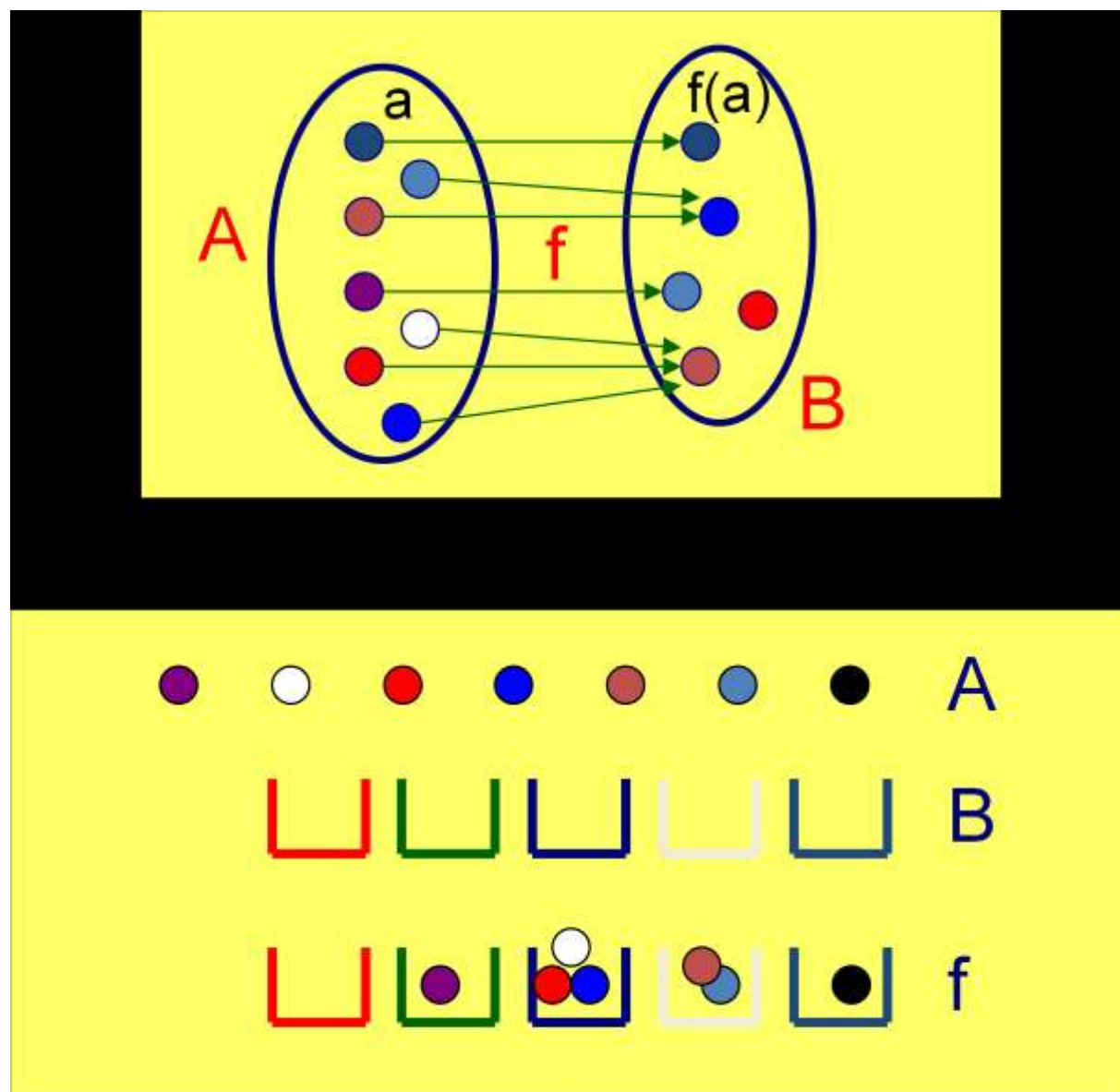
$$f: A \rightarrow B \text{ oppure } x \in A \rightarrow f(x) \in B$$

il simbolo $f()$ indica il complesso di operazioni che si devono effettuare su x (argomento di f) per ottenere y (valore di f)

$f(x) = 2x + 1$ occorre moltiplicare x per 2 e poi sommare 1

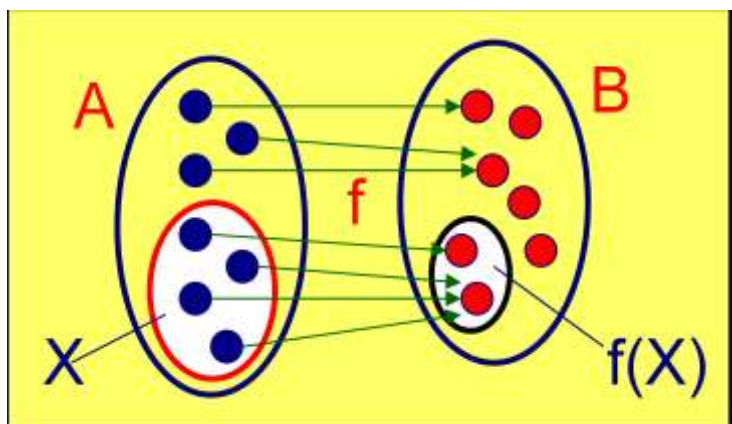
$f(x) = 1/x$ occorre calcolare l'inverso di x





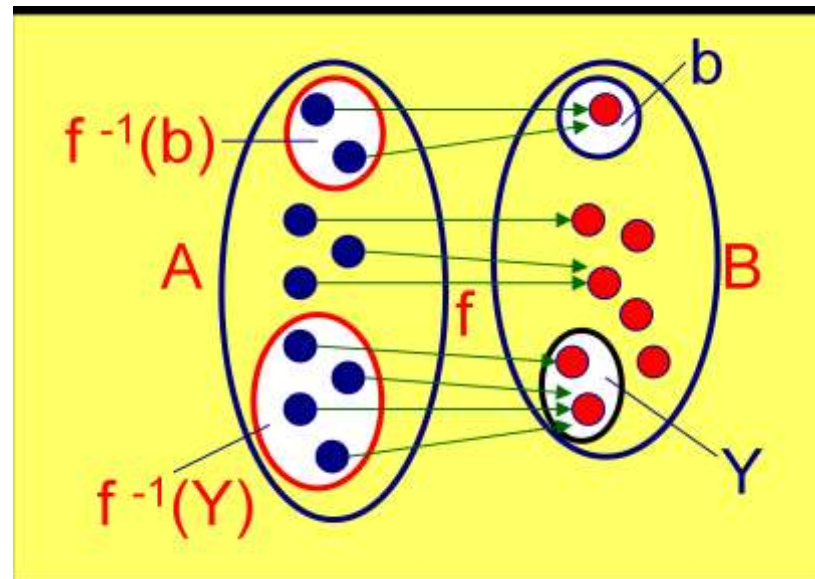
$f: x \in R \rightarrow x + 1$	è una funzione (è possibile calcolare in maniera univoca l'immagine di ogni numero reale)
$f: x \in R \rightarrow \sqrt{x} \in [0, +\infty)$	non è una funzione (non è possibile calcolare l'immagine di un numero negativo)
$f: x \in [0, +\infty) \rightarrow y \in [0, +\infty)$ <i>tale che $y^2 = x$</i>	è una funzione (è possibile calcolare univocamente l'immagine di ciascun elemento del dominio); questa funzione non è altro che la funzione radice quadrata di x

Data una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **immagine** di $X \subset A$ l'insieme degli elementi di B che sono immagine di elementi di X , e si scrive $f(X) = \{y \in B: y = f(x) \text{ per qualche } x \in X\}$



L'immagine $f(A)$ si denota anche **Imf**

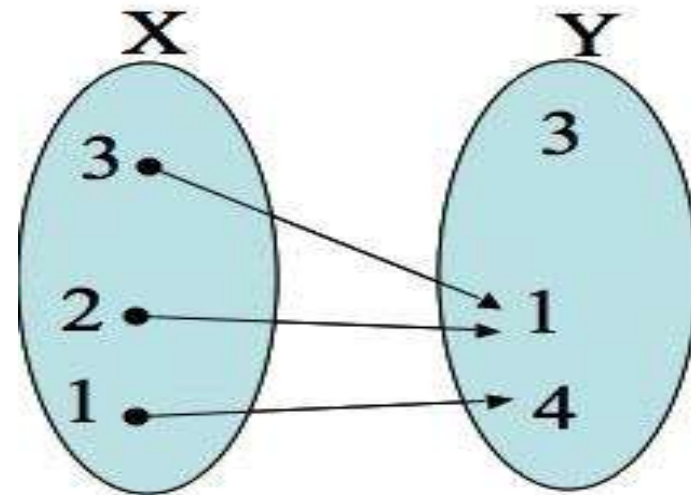
Data una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **controimmagine**, o **immagine inversa** di $Y \subset B$ l'insieme degli elementi di A che hanno immagine in Y , e si scrive $f^{-1}(Y) = \{x \in A: f(x) \in Y\}$



$$f^{-1}(1) = \{2,3\}$$

$$f^{-1}(4) = \{1\}$$

$$f^{-1}(3) = \emptyset$$

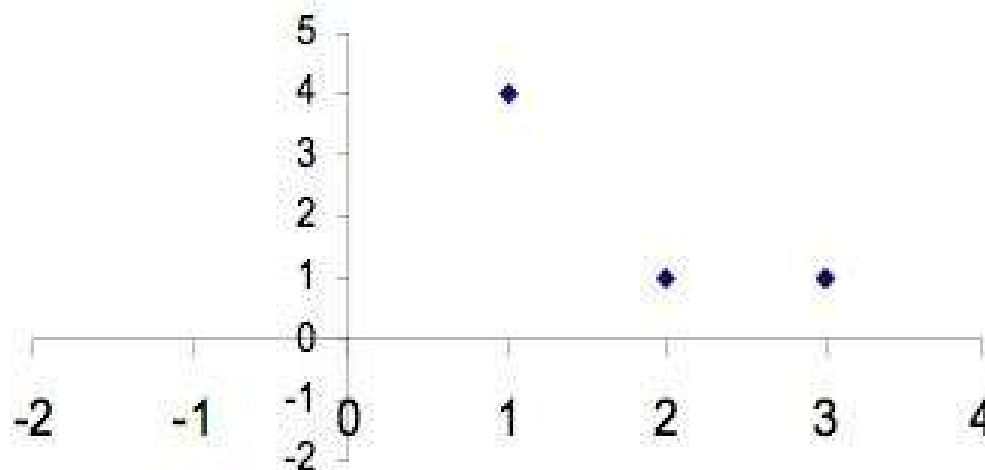
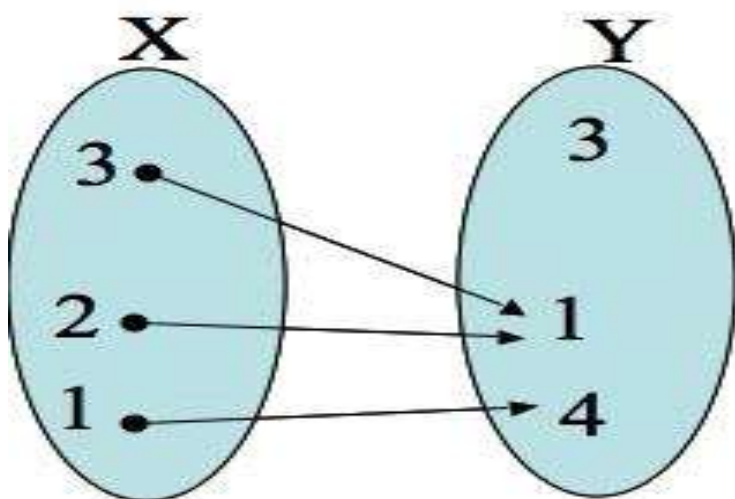


$$f : n \in \mathbb{Z} \rightarrow n^2 \in \mathbb{Z}$$

Rappresentazione cartesiana di una funzione

La curva del piano cartesiano costituita dall'insieme di tutti i punti di coordinate $(x, f(x))$, con x appartenente al dominio della funzione si chiama **grafico** di f

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$



$$G_f = \{(1, 4), (2, 1), (3, 1)\}$$

Grafico: è rappresentabile come un insieme di punti del piano precisamente l'insieme dei punti del piano cartesiano Oxy che hanno per ascissa il generico elemento x del dominio e per ordinata il valore $y = f(x)$.

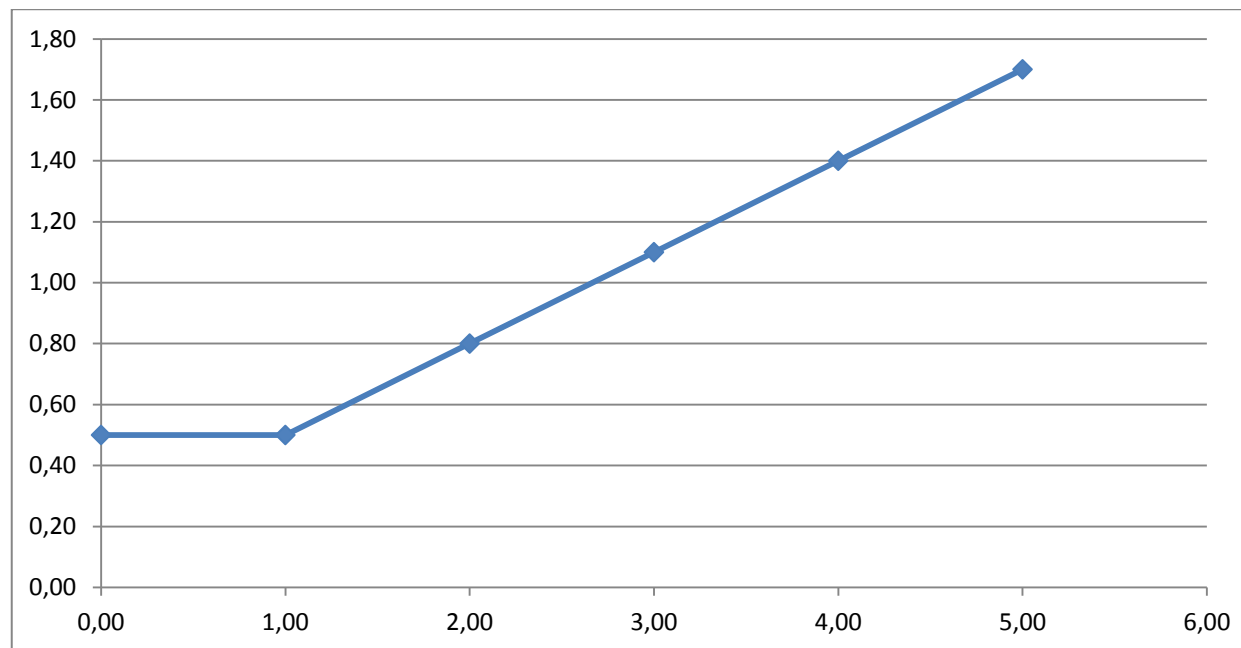
Il grafico di una funzione fornisce una rappresentazione sintetica della funzione $y = f(x)$ mostrandone le principali caratteristiche e proprietà.

Un primo confronto fra due differenti funzioni può essere fatto a partire dai loro grafici

Esempio 1.

Il costo di una corsa in taxi è di 0.50 € per il primo km. Dopo un km il passeggero paga una tariffa aggiuntiva di 0.30 € per km.

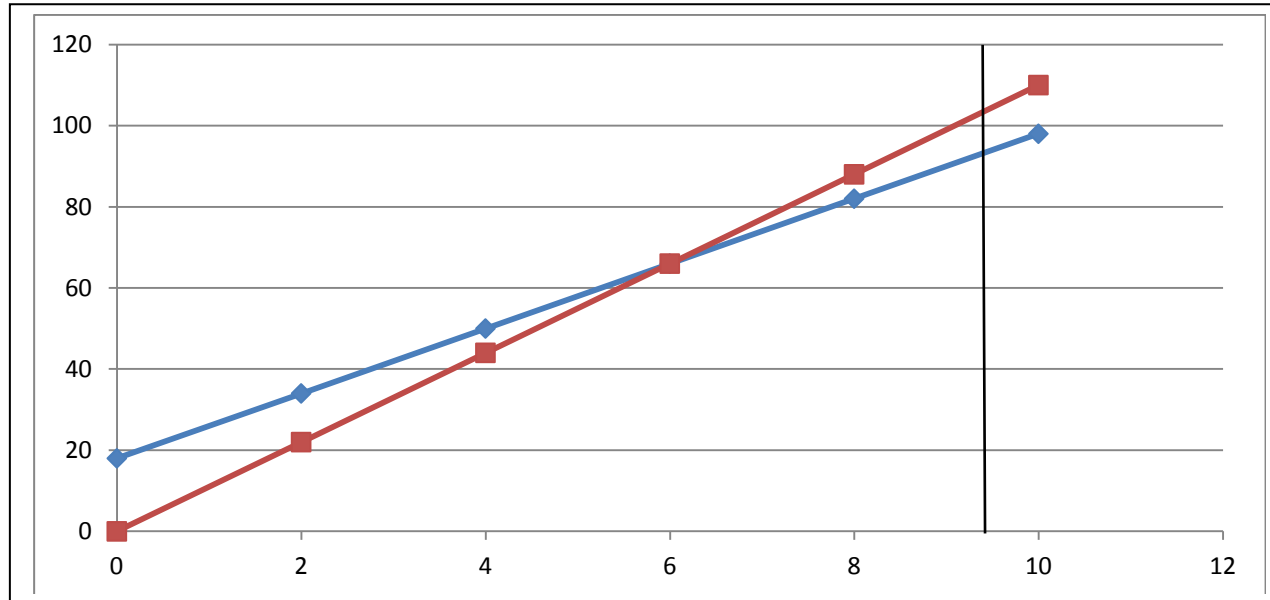
$$f(x) = \begin{cases} 0.50, & 0 < x \leq 1 \\ 0.50 + 0.30(x - 1), & x > 1 \end{cases}$$



Esempio 2.

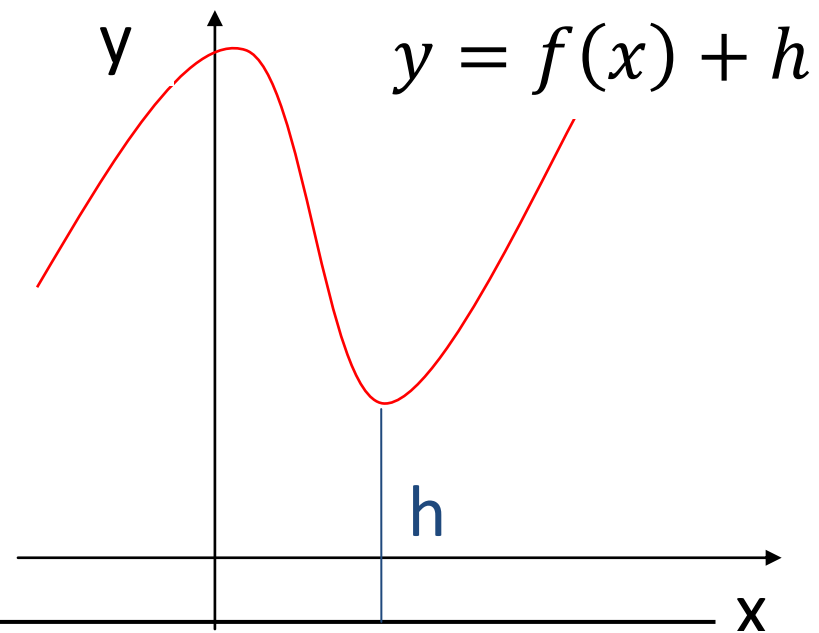
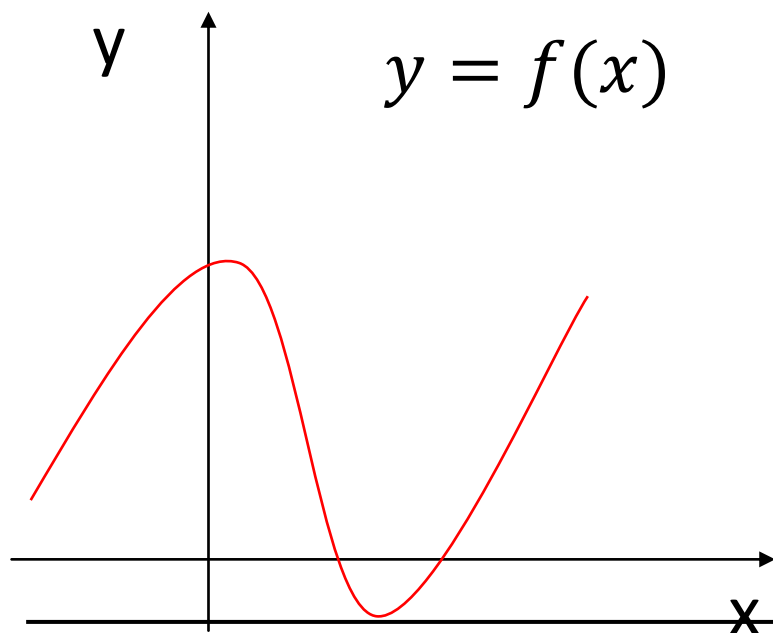
Si confrontino i piani tariffari di due aziende telefoniche A e B, che offrono rispettivamente telefonate a 8 cent/min con scatto alla risposta di 18 cent. la prima, 11 cent/min senza scatto alla risposta la seconda.

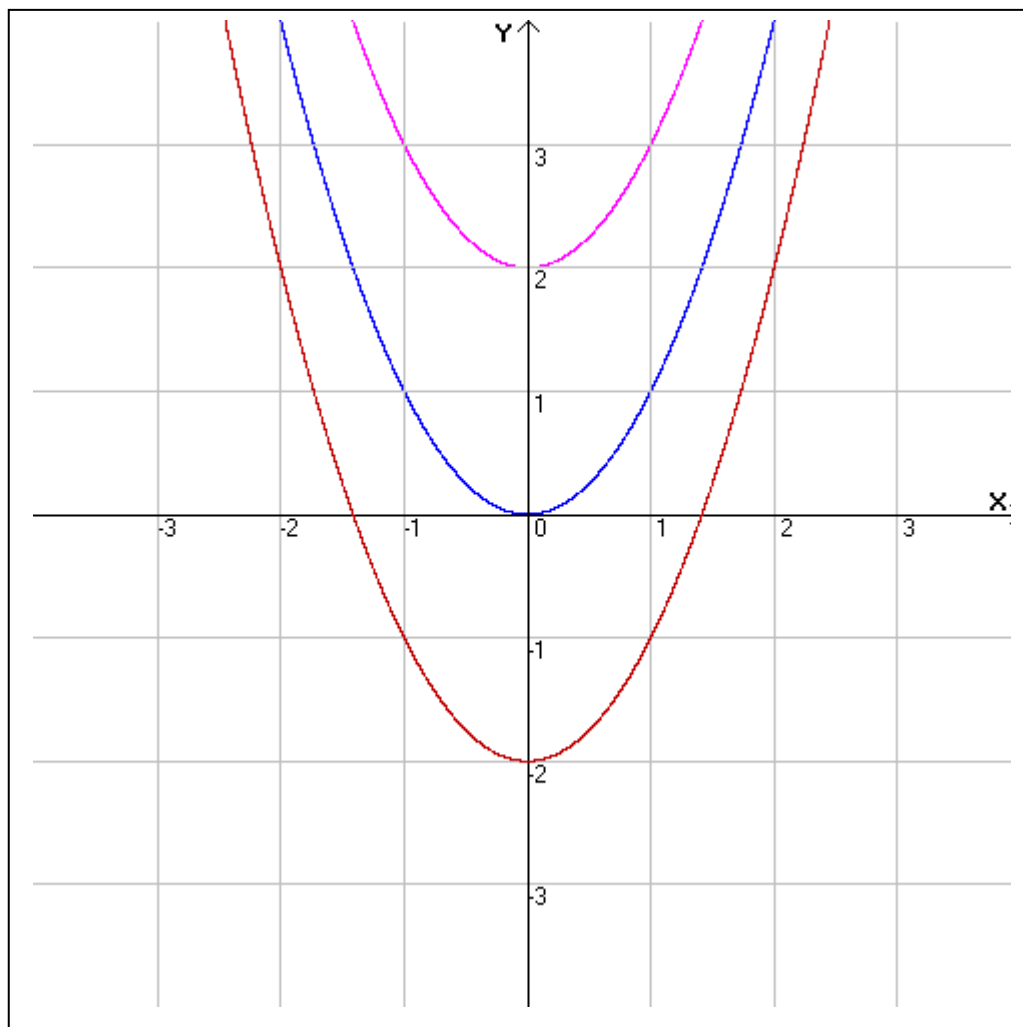
$$A(t) = 18 + 8t; B(t) = 11t$$



per telefonate di durata superiore a 6 minuti il piano tariffario più conveniente è quello dell'azienda A

Traslazioni verticali



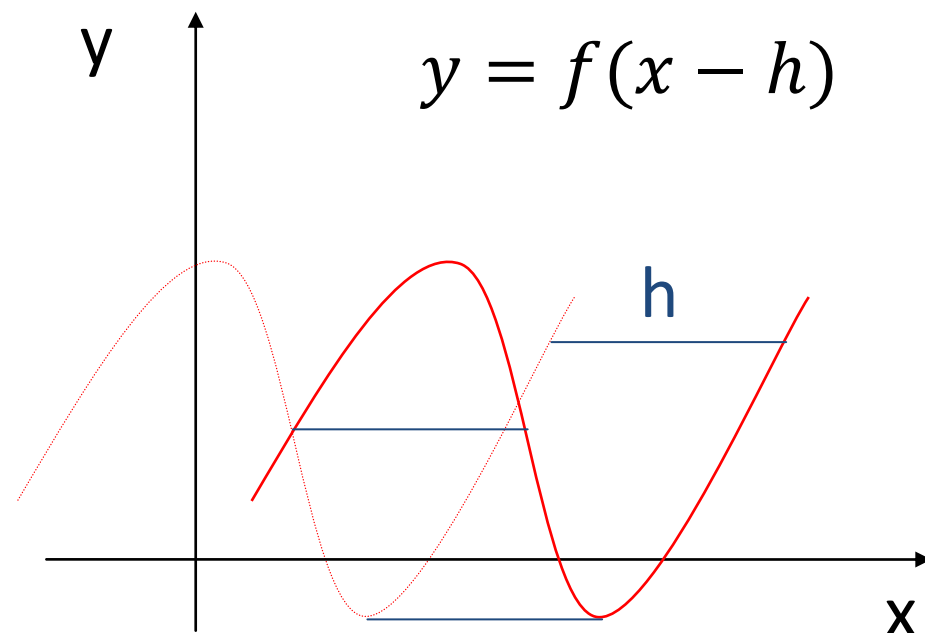
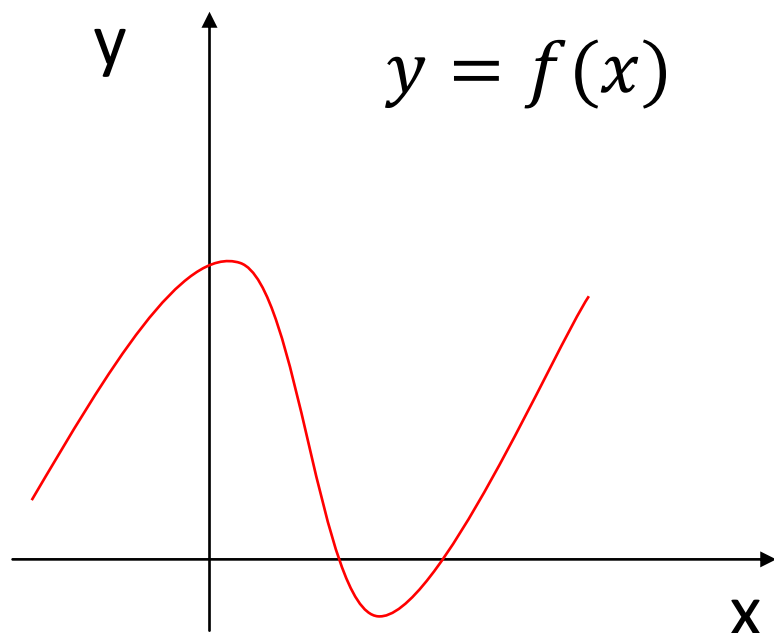


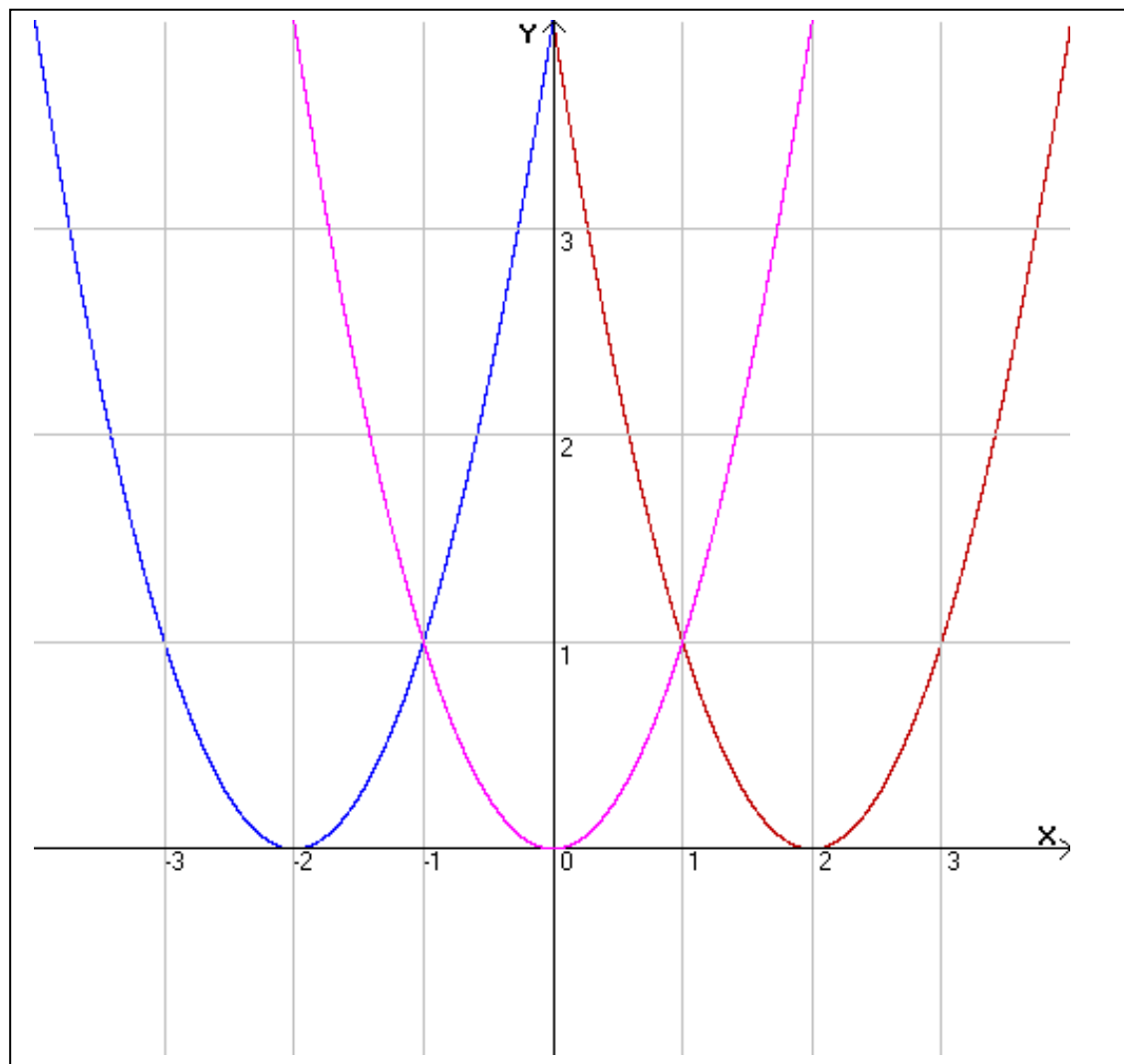
$$y = x^2$$

$$y = x^2 + 2$$

$$y = x^2 - 2$$

Traslazioni orizzontali



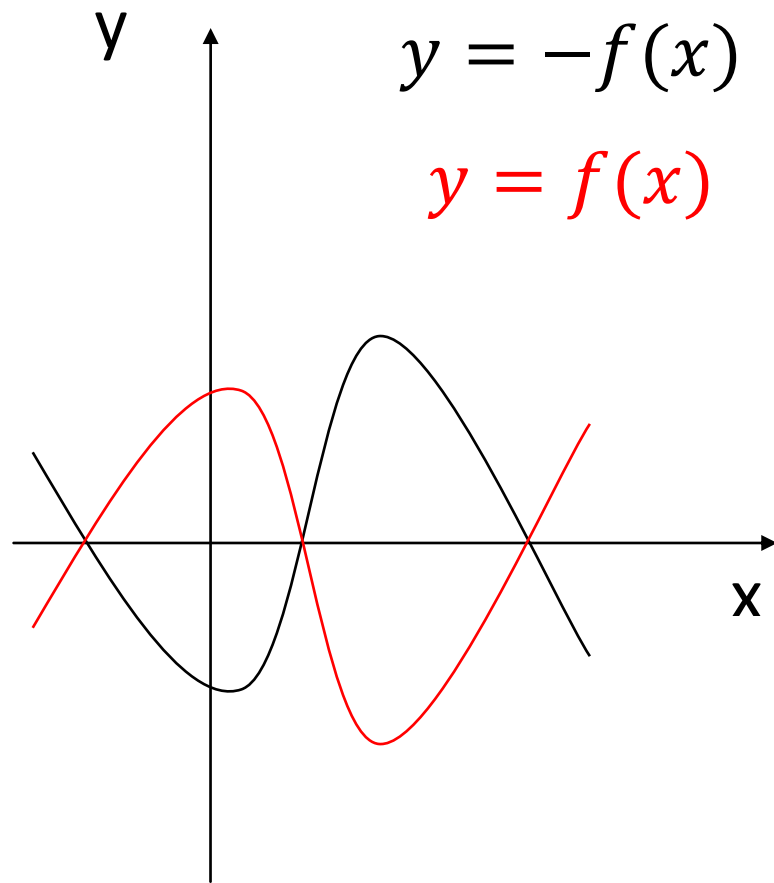


$$y = (x + 2)^2$$

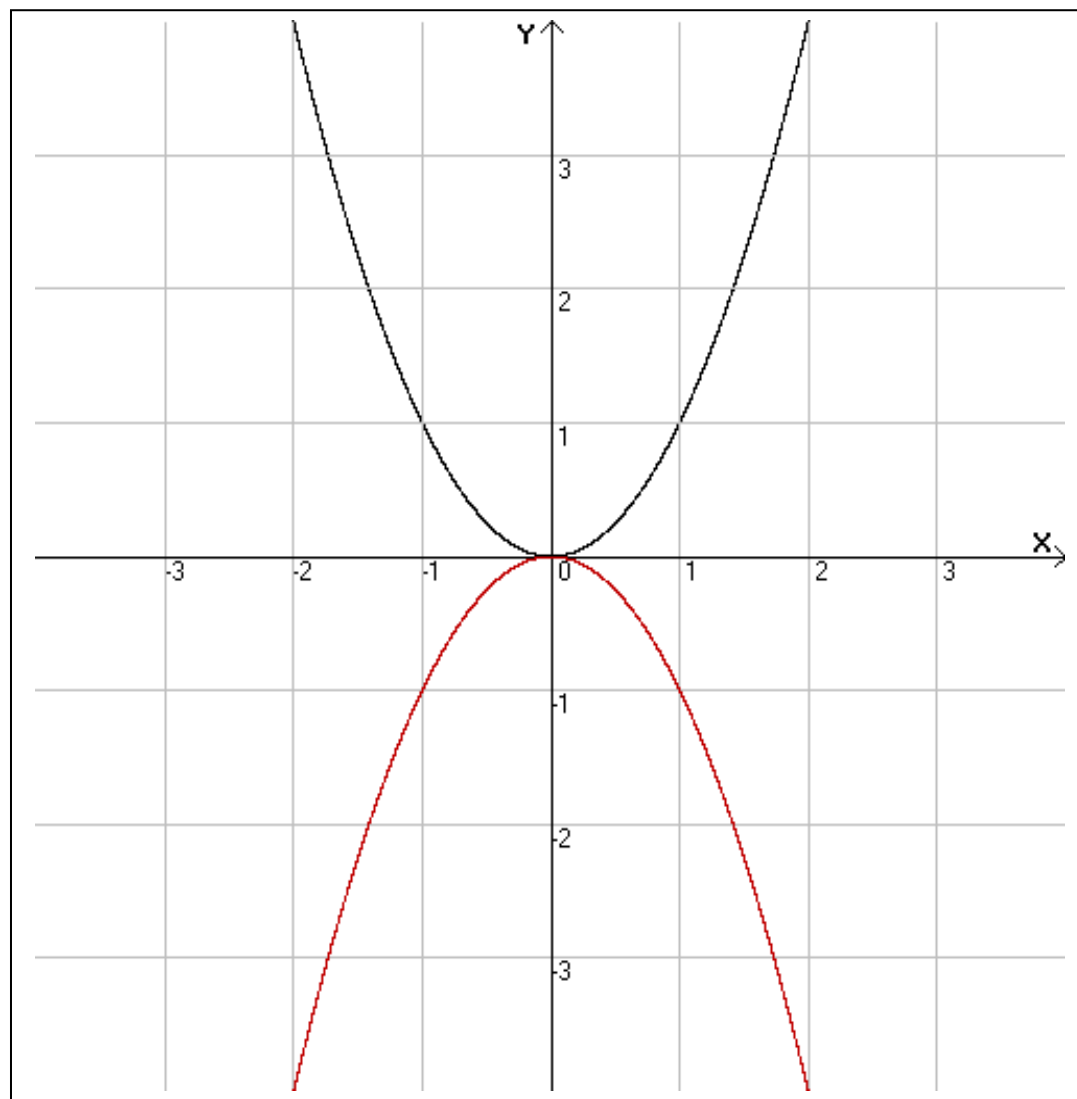
$$y = x^2$$

$$y = (x - 2)^2$$

Funzione opposta



N.B. Le due funzioni hanno gli stessi zeri (intersezioni con l'asse x)



$$y = x^2$$

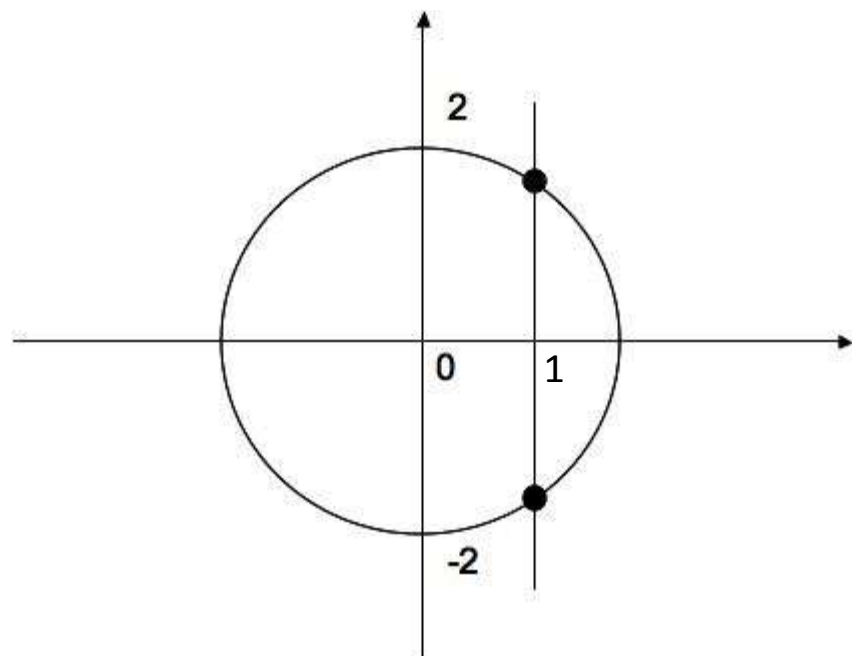
$$y = -x^2$$

Esiste un metodo per verificare che una curva del piano sia il grafico di una funzione?

Test della retta verticale

Se esiste almeno una retta parallela all'asse delle ordinate che interseca la curva in due o più punti, allora detta curva non può essere il grafico di alcuna funzione.

Se una tale retta non esiste, allora detta curva è il grafico di una funzione.



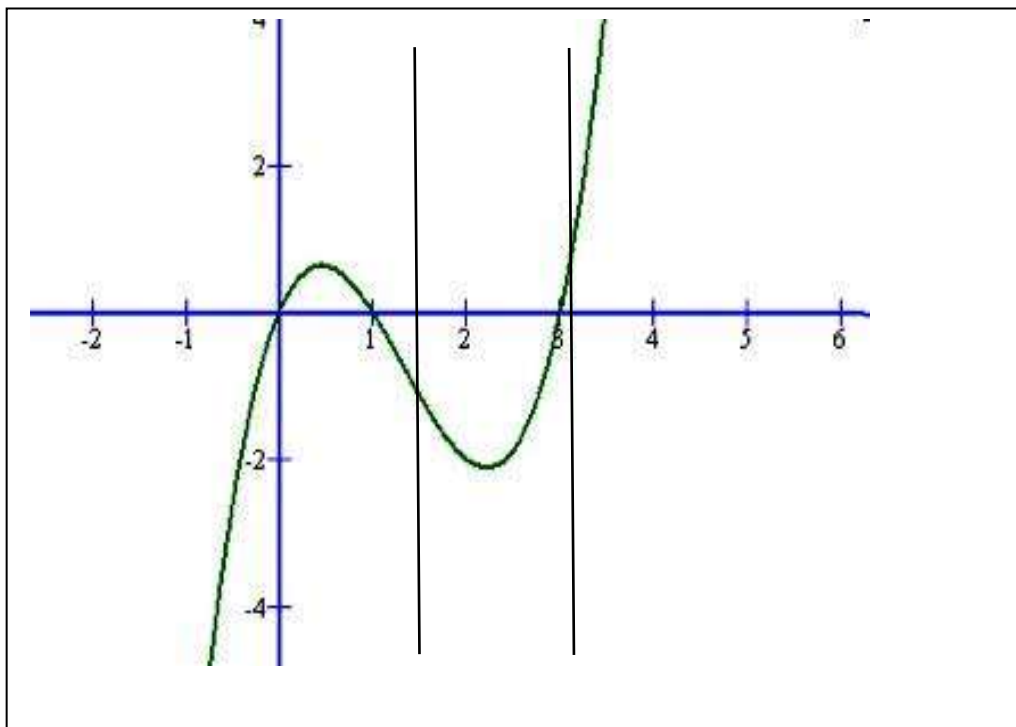
$$x^2 + y^2 = 4$$

entrambi i punti

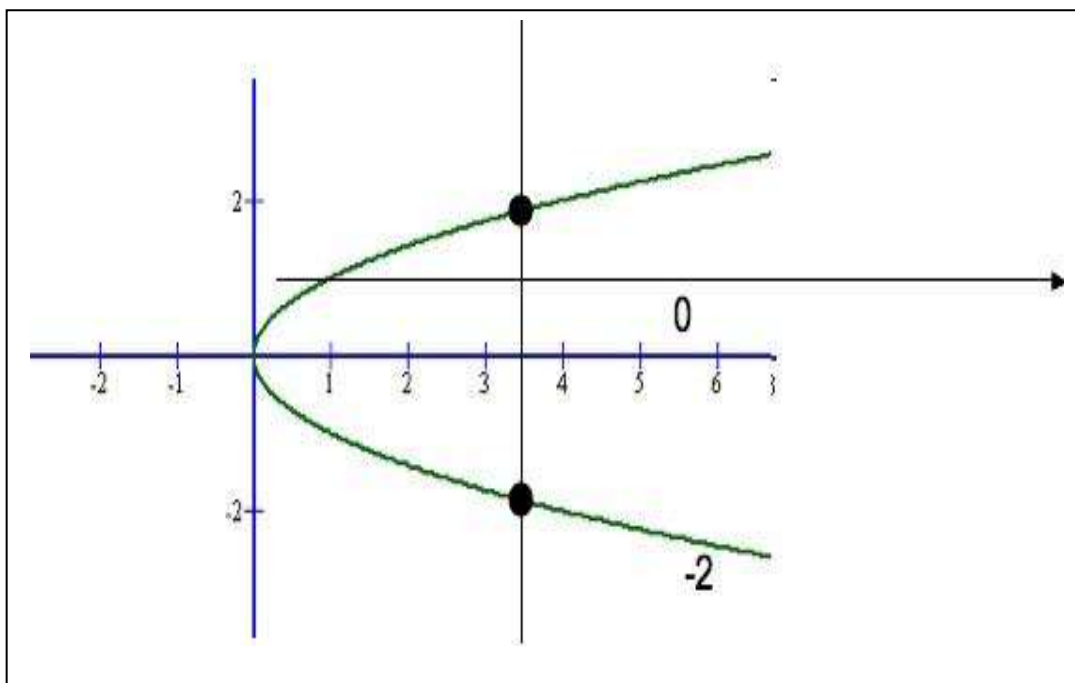
$(0, \sqrt{3})$ e $(0, -\sqrt{3})$

soddisfano l'equazione
ossia appartengono al
cerchio

Questi punti
appartengono alla stessa
retta verticale $x = 1$
Quindi il cerchio non è il
grafico di alcuna funzione



Questa curva passa il test della retta verticale quindi rappresenta il grafico di una funzione

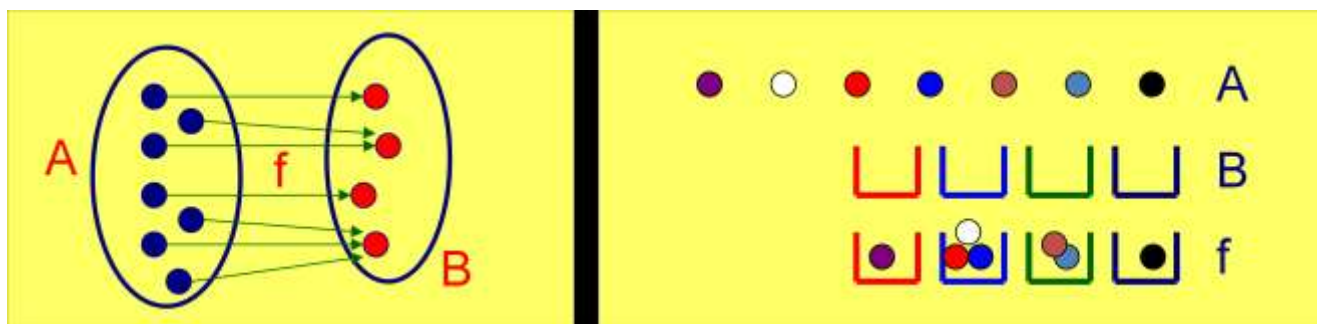


Questa curva non passa il test della retta verticale quindi
 $x = ay^2$ non rappresenta il grafico di una funzione

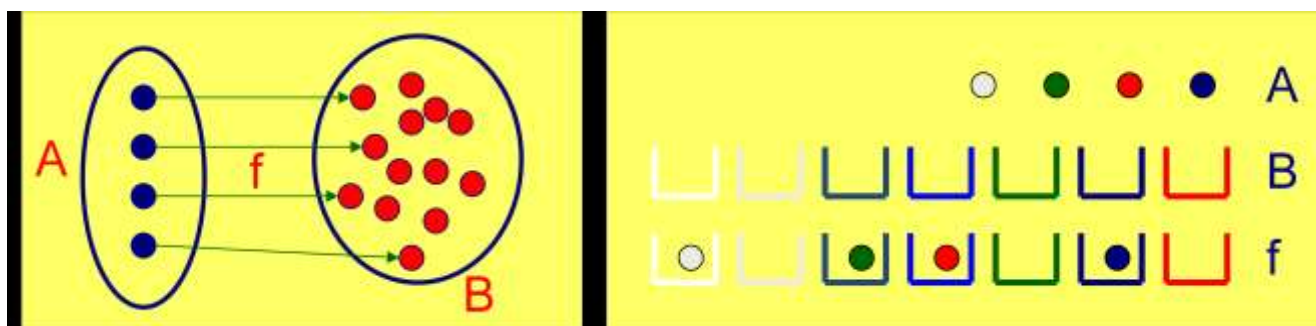
Funzioni iniettive, suriettive e biettive

$f: A \rightarrow B$ con A e B insiemi non vuoti, si dice

f **suriettiva** se $\forall y \in B \exists x \in A: y = f(x)$ ossia se $f(A) = B$

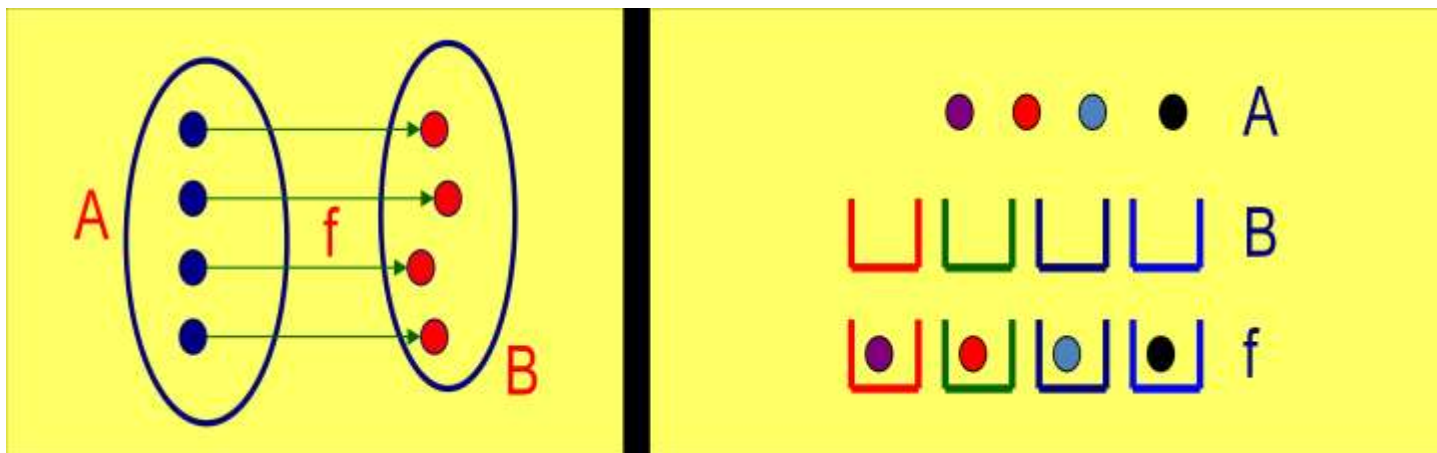


f **iniettiva** se $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



f **biettiva** se è sia iniettiva che suriettiva, cioè

$$\forall y \in B \exists ! x \in A: y = f(x)$$



ESEMPI

La funzione

$$f: x \in (-\infty, +\infty) \rightarrow x^2 \in (-\infty, +\infty)$$

non è suriettiva, poiché $\text{Im}(f)=[0, \infty)$

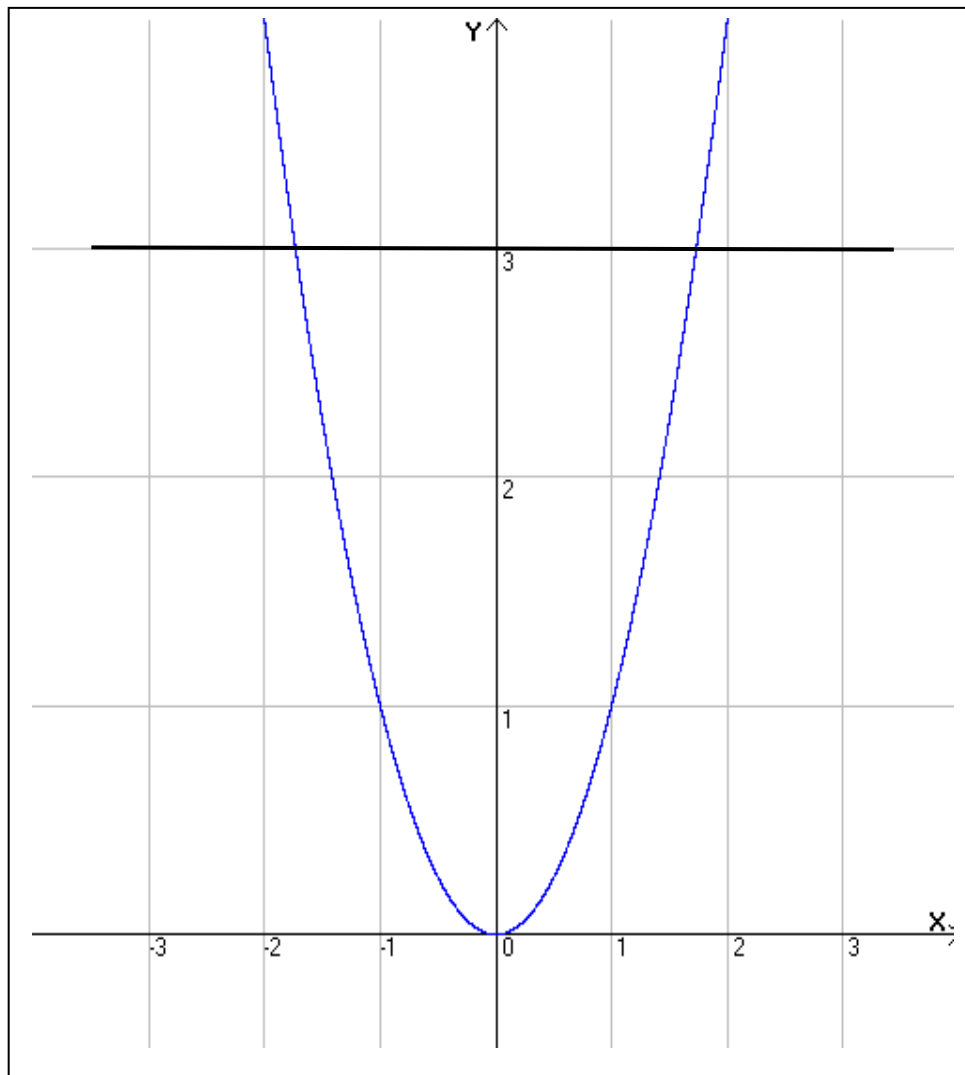
La funzione

$$f: x \in (-\infty, +\infty) \rightarrow x^3 \in (-\infty, +\infty)$$

è suriettiva

Si osservi che ogni funzione $f: A \rightarrow B$ è suriettiva, purchè come insieme B si scelga l'immagine della funzione!

Cosa vuol dire da un punto di vista del grafico che una funzione è iniettiva, suriettiva o biettiva?



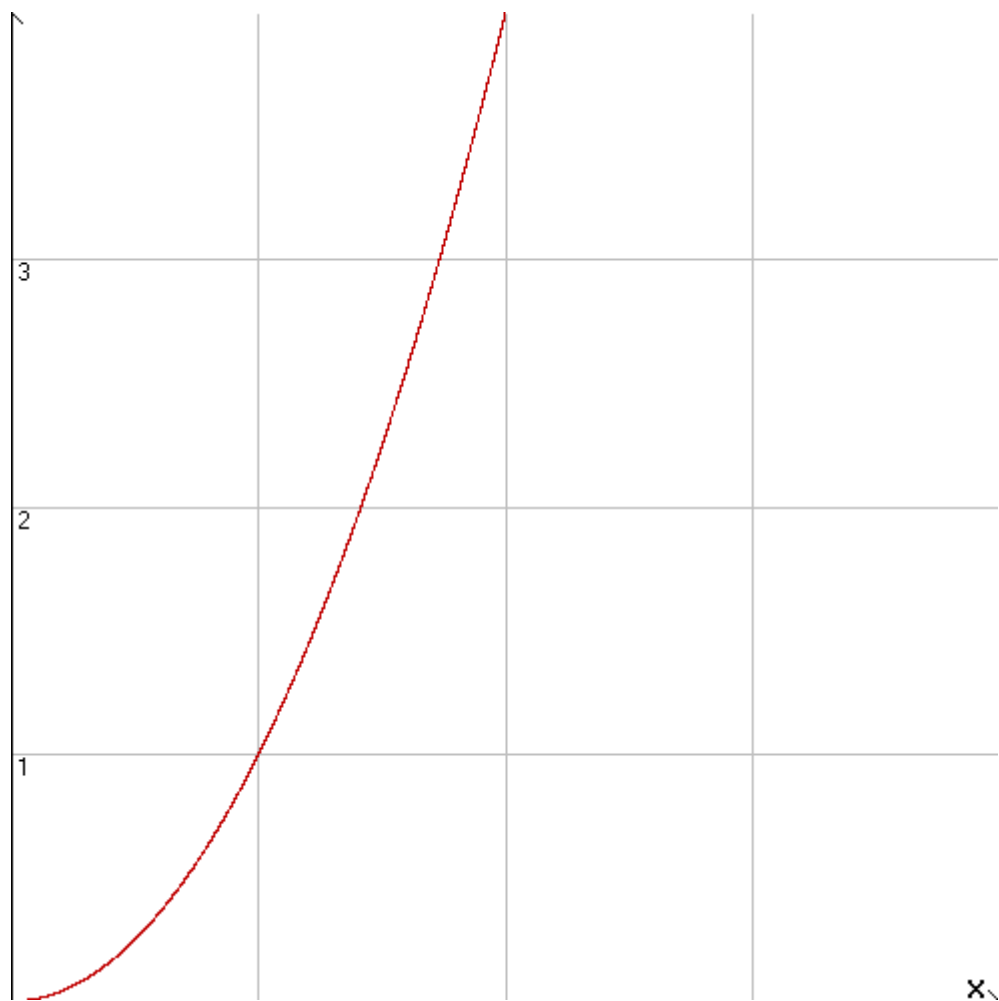
$$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$$

è suriettiva

non è iniettiva



non è biettiva



$f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

è suriettiva

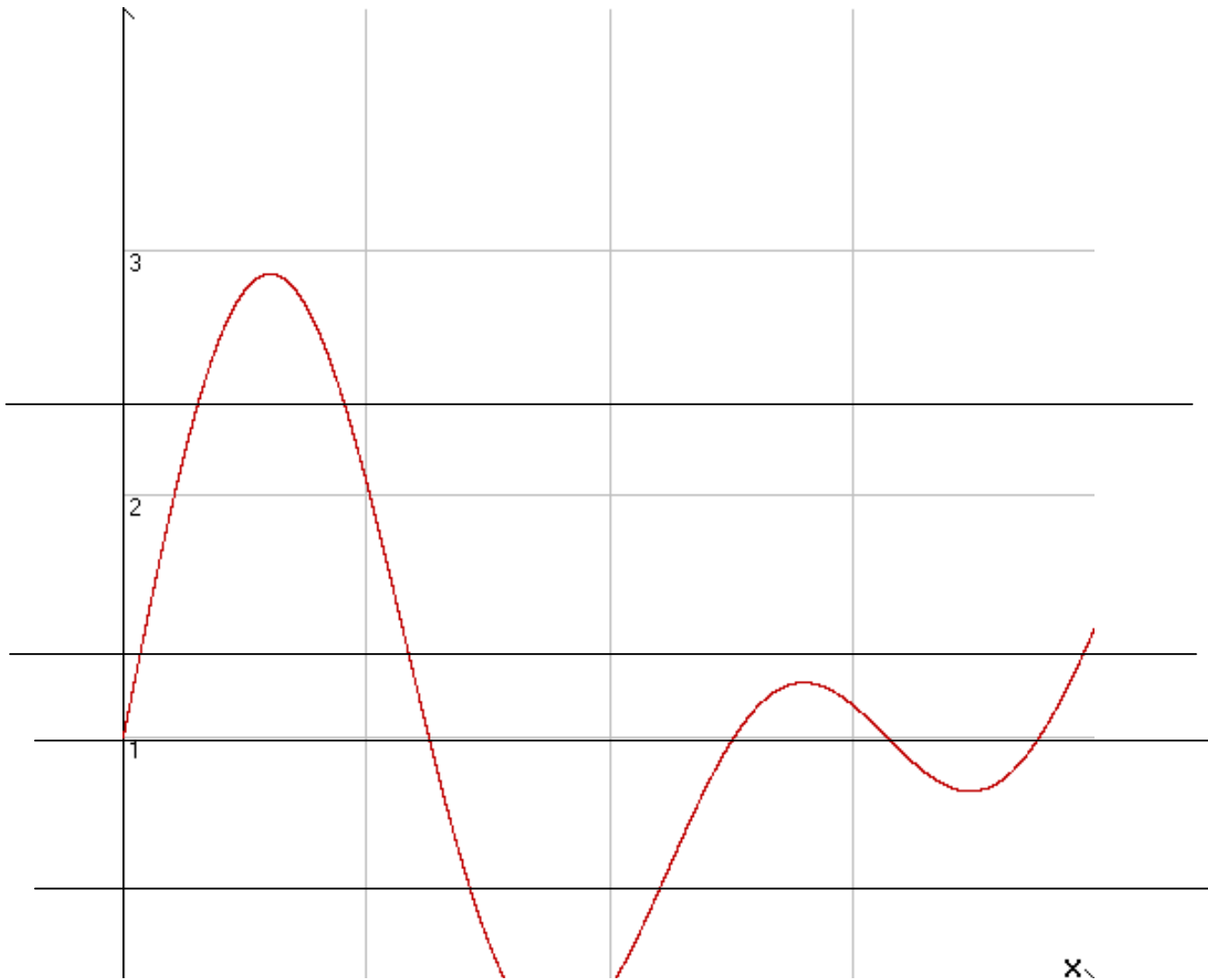
è iniettiva



è biettiva

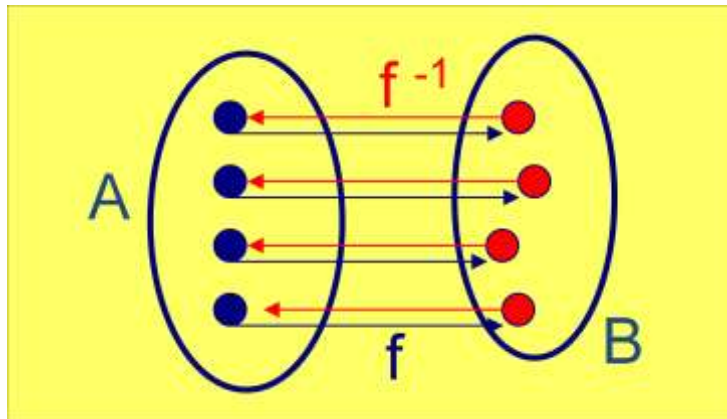
Test della retta orizzontale

non è iniettiva



FUNZIONI INVERTIBILI

Una funzione $f: A \rightarrow B$ biunivoca si dice anche **invertibile**.
La funzione che ad ogni $y \in B$ associa quell'unico $x \in A$ tale che $y = f(x)$ si chiama **funzione inversa** e si indica con f^{-1}



$$f^{-1}: f(A) \rightarrow A$$

y associa x

Ovviamente si ha

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in f(A)$$

Ma che vuol dire praticamente che una funzione f è invertibile?

vuol dire che a partire dalla funzione f è possibile costruire una nuova funzione che procede a ritroso rispetto ad f

Nota : non sempre è possibile costruire una tale funzione

Come verificare l'invertibilità della funzione $f: A \rightarrow B$?

Occorre vedere se è possibile esprimere $x \in A$ in maniera univoca in funzione di $y \in B$

$$y = x^3 - 3$$

$$x^3 = y + 3$$

$$A = B = (-\infty, +\infty)$$

$$x = \sqrt[3]{y + 3}$$

è invertibile

$$y = x^2 - 3$$

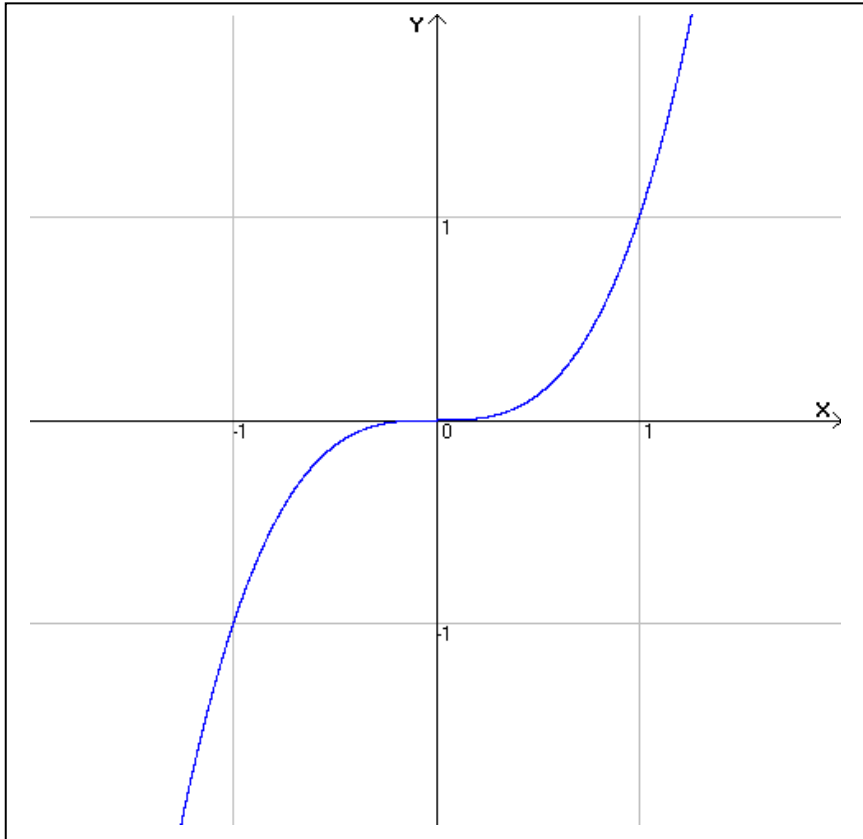
$$x^2 = y + 3$$

$$A = (-\infty, +\infty) \quad B = [-3, +\infty)$$

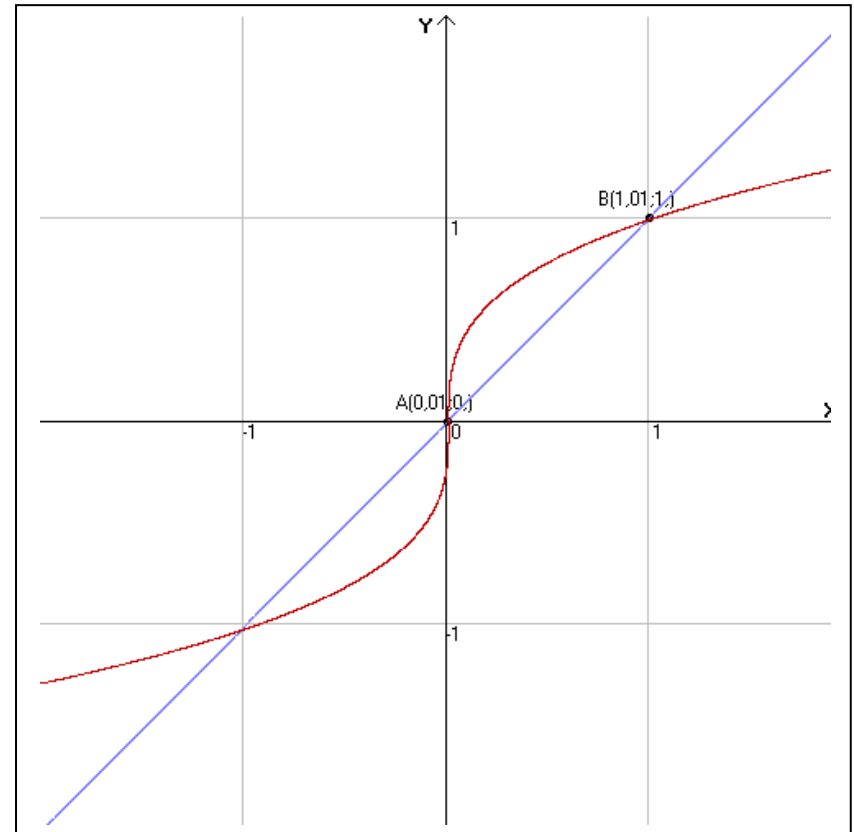
$$x = \begin{cases} \sqrt{y + 3} \\ -\sqrt{y + 3} \end{cases}$$

non è invertibile

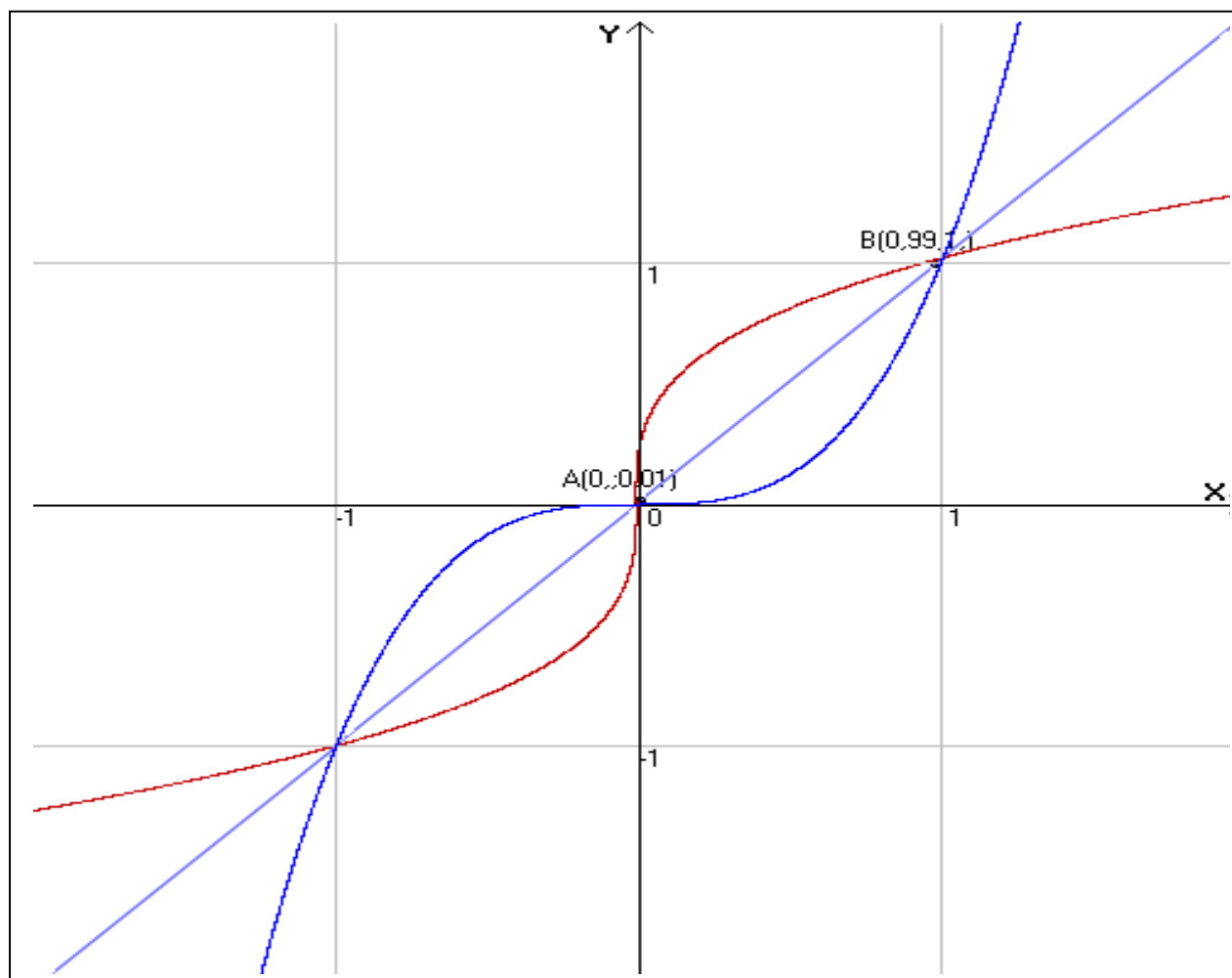
Come è fatto il grafico dell' inversa di f?



$$y = x^3$$



$$y = \sqrt[3]{x}$$



grafici simmetrici rispetto alla bisettrice I e III quadrante