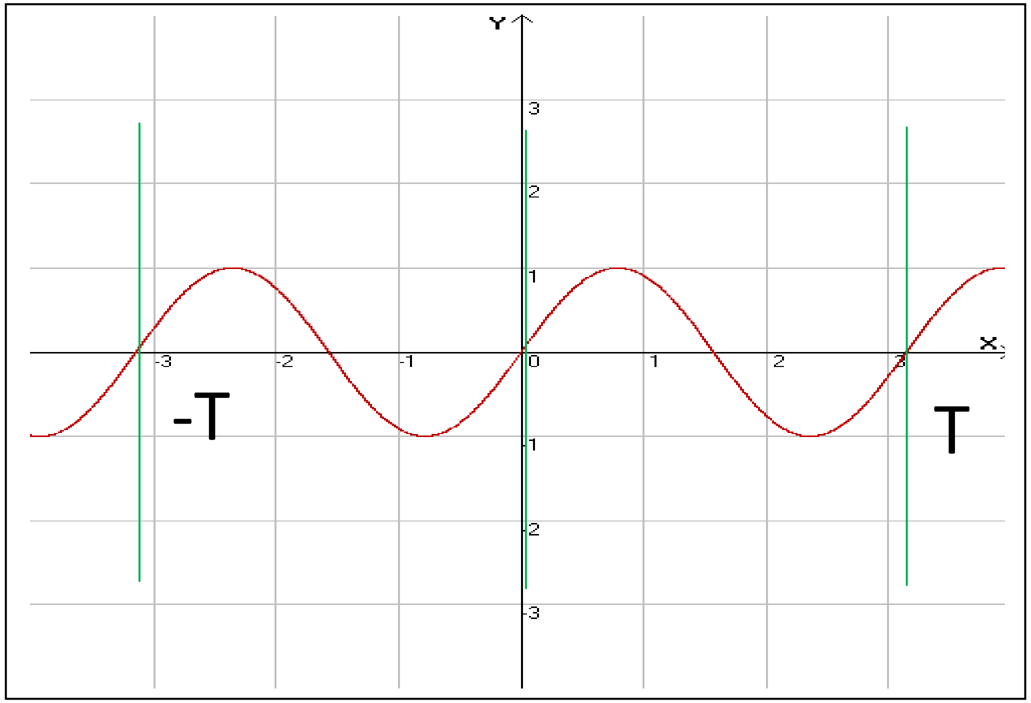
Funzioni periodiche

Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice periodica di periodo T se T > 0 è il più piccolo numero reale positivo tale che

$$f(x+T) = f(x)\ \forall x \in A$$



In ogni intervallo di ampiezza pari a T il grafico di tale funzione si ripete.

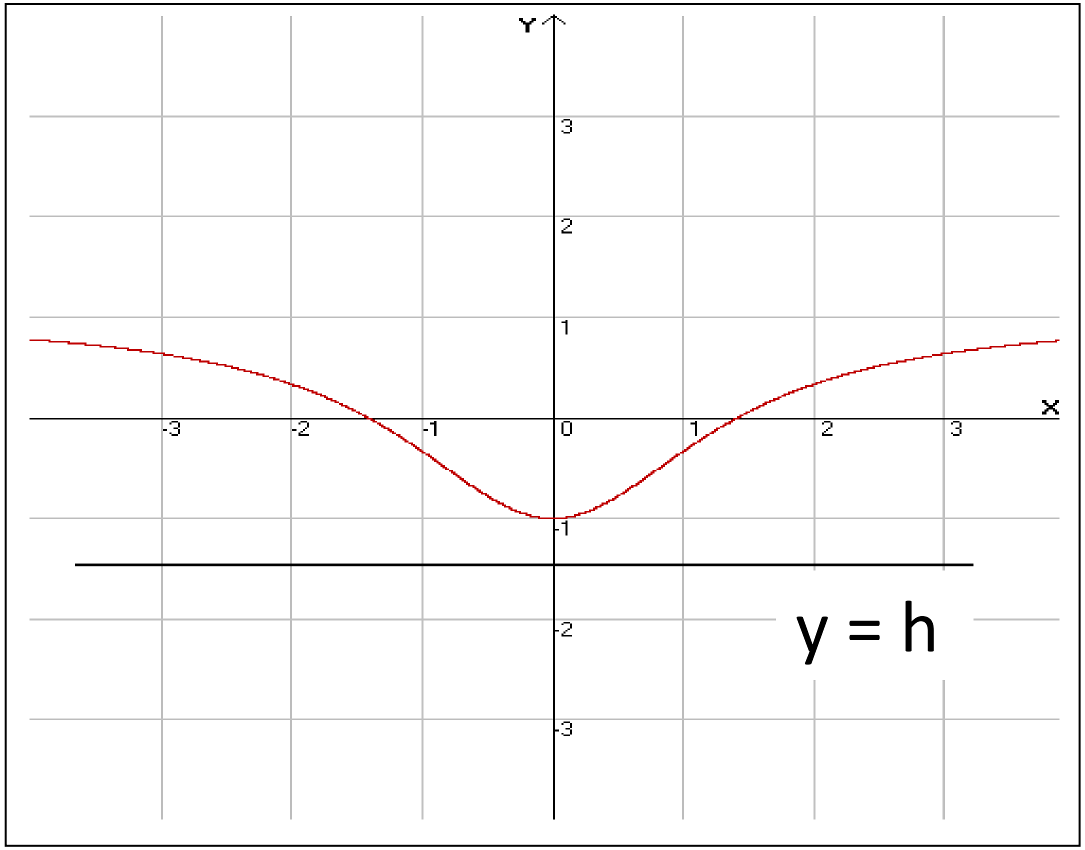
Massimi, minimi, estremo superiore, estremo inferiore

Data una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice che

- si dice che f è limitata superiormente se il suo insieme immagine *f(A)* è limitato superiormente e cioè se *f(A)* ammette maggioranti
- si dice che f è limitata inferiormente se il suo insieme immagine *f(A)* è limitato inferiormente e cioè se *f(A)* ammette minoranti
- si dice che f è limitata se il suo insieme immagine *f(A)* è limitato sia inferiormente che superiormente

$$f \text{ limitata inferiomente } \Leftrightarrow \exists h \in R: f(x) \geq h \;\forall x \in A$$

(N.B. un tale h è un minorante della funzione, cioè un numero che è maggiore o uguale a tutti i valori assunti dalla funzione)

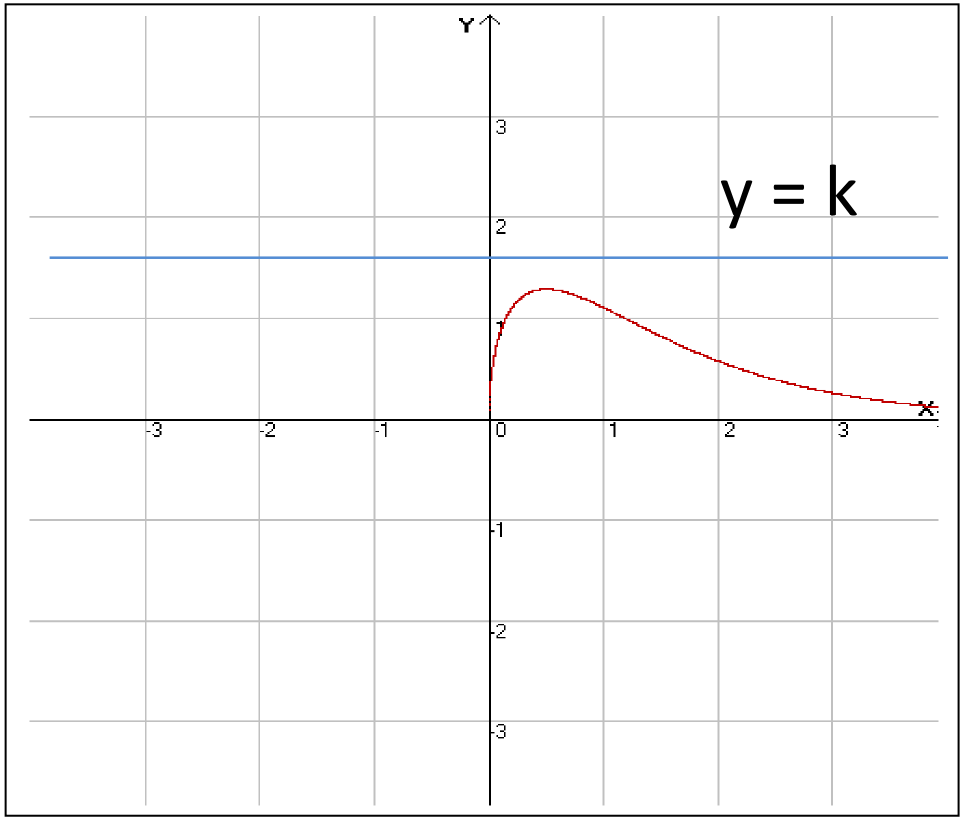


graficamente f è limitata inferiormente se e solo se il suo grafico si trova al di sopra di una certa retta

y = h

$$f \text{ limitata superiormente } \Leftrightarrow \exists k \in R: f(x) \leq k \; \forall x \in A$$

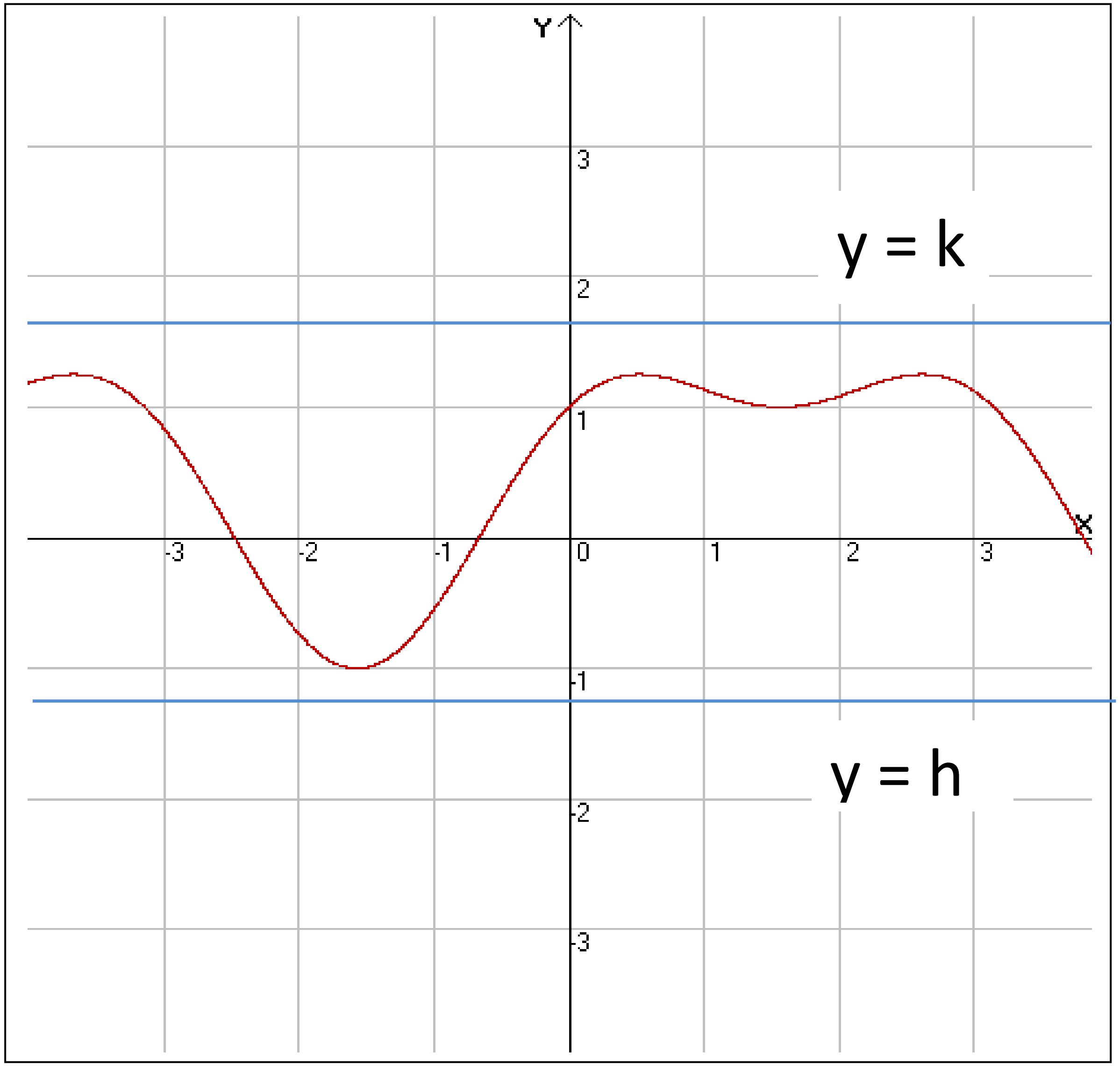
(N.B. un tale k è un maggiorante della funzione, cioè un numero che è maggiore o uguale a tutti i valori assunti dalla funzione)



graficamente f è limitata superiormente se e solo se il suo grafico si trova al di sotto di una certa retta

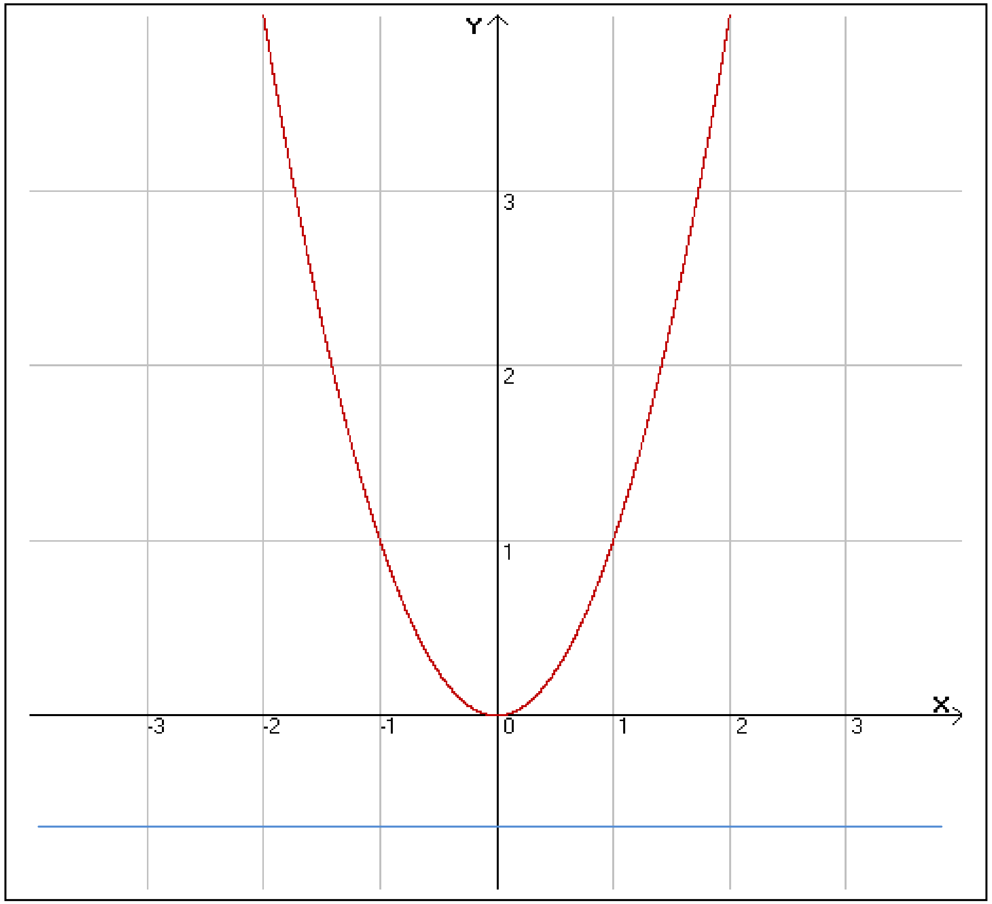
y = k

$$f \text{ limitata } \Leftrightarrow \exists k, h \in R: h \le f(x) \le k \ \forall x \in A$$

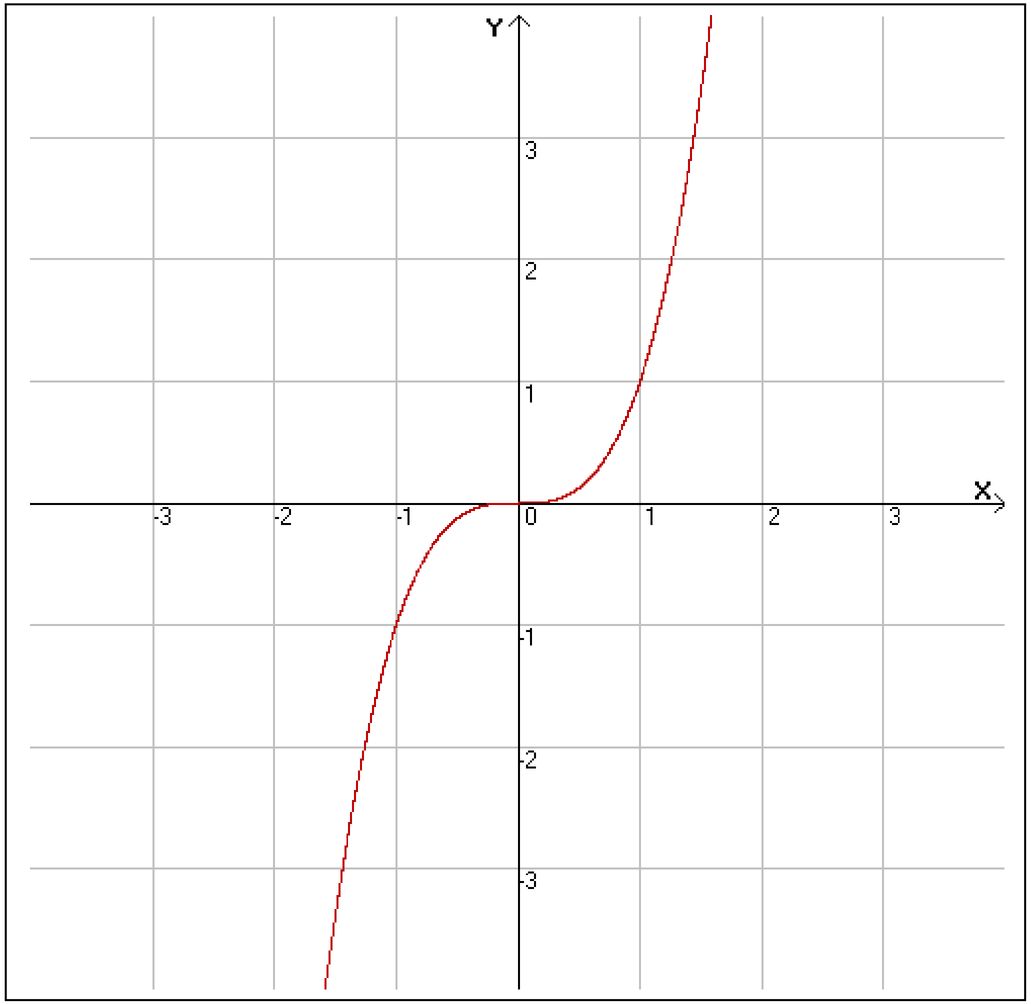


graficamente f è limitata se e solo se il suo grafico si trova nella striscia di piano compresa tra le rette di equazione

y = k e y = h



la funzione $y = x^2$ è limitata inferiormente $(x^2 \geq h \; \forall h \leq 0)$ ma non è limitata superiormente



la funzione $y = x^3$ non è limitata né inferiormente né superiormente

Data una funzione $f: A \rightarrow B$ superiormente limitata. Si dice che M è l'estremo superiore di f se M è l'estremo superiore di $f(A)$ e si scrive:

$$M = \sup f \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M \ \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A: M - \varepsilon < f(x) \end{cases}$$

M è il più piccolo fra tutti i maggioranti della funzione!

Se la funzione non è limitata superiormente, si pone:

$$\sup f = +\infty$$

Data una funzione $f: A \to B$ inferiormente limitata. Si dice che m è l'estremo inferiore di f se m è l'estremo inferiore di $f(A)$ e si scrive:

$$m = \inf f \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m \; \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in A: m + \varepsilon > f(x) \end{cases}$$

m è il più grande fra tutti i minoranti della funzione!

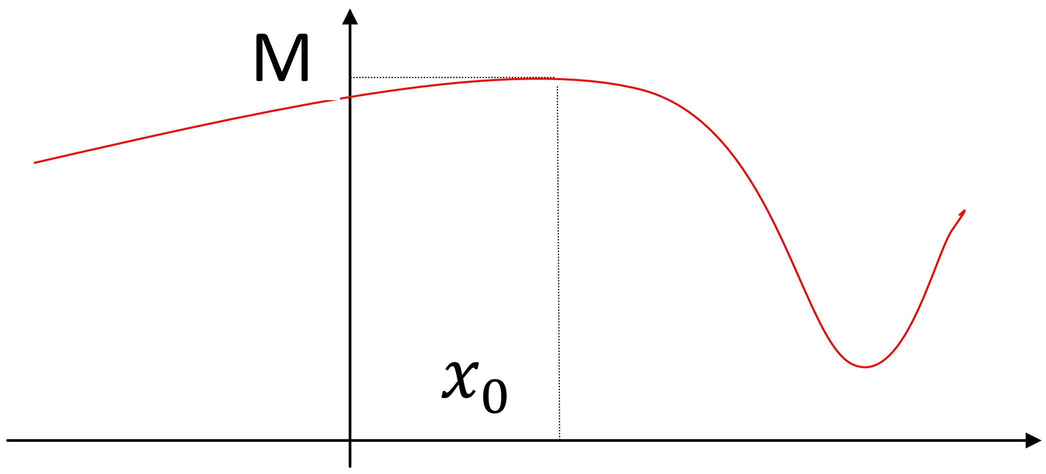
Se la funzione non è limitata inferiormente, si pone:

$$\inf f = -\infty$$

Data una funzione $f: A \to B$ superiormente limitata. Si dice che M è il massimo di f se M è un maggiorante di $f(A)$ ed è un valore assunto dalla funzione e si scrive:

$$M = \max f \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M \ \forall x \in A \\ \exists x_0 \in A: f(x_0) = M \end{cases}$$

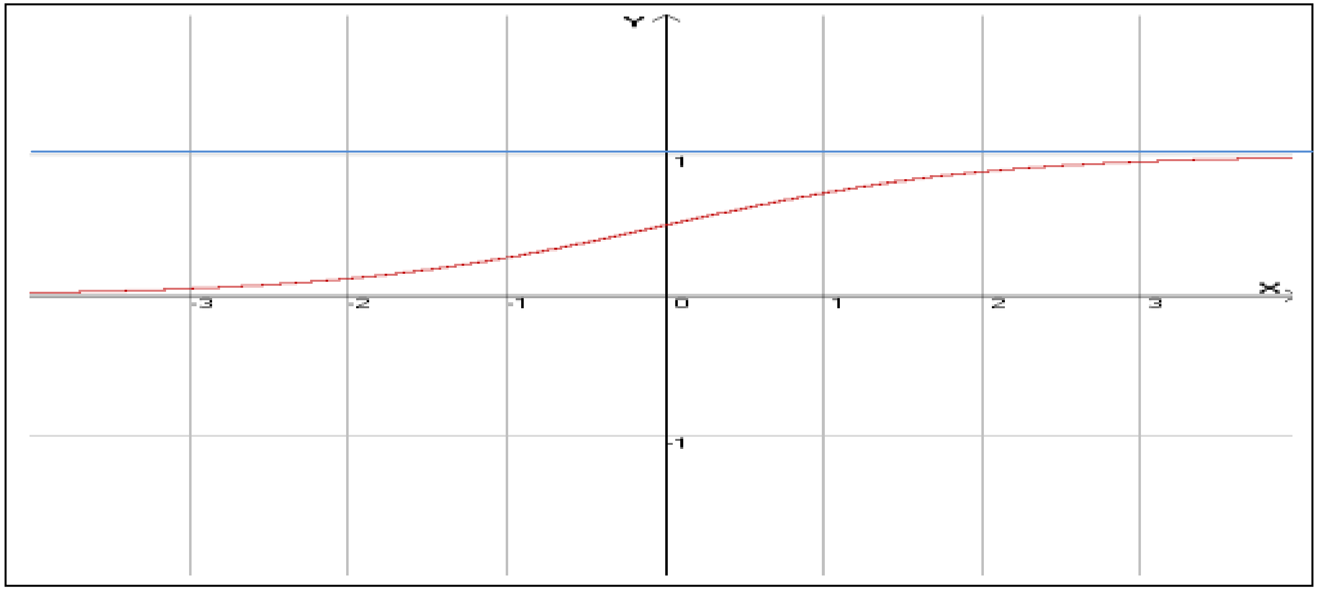
x_0 si dice punto di massimo assoluto



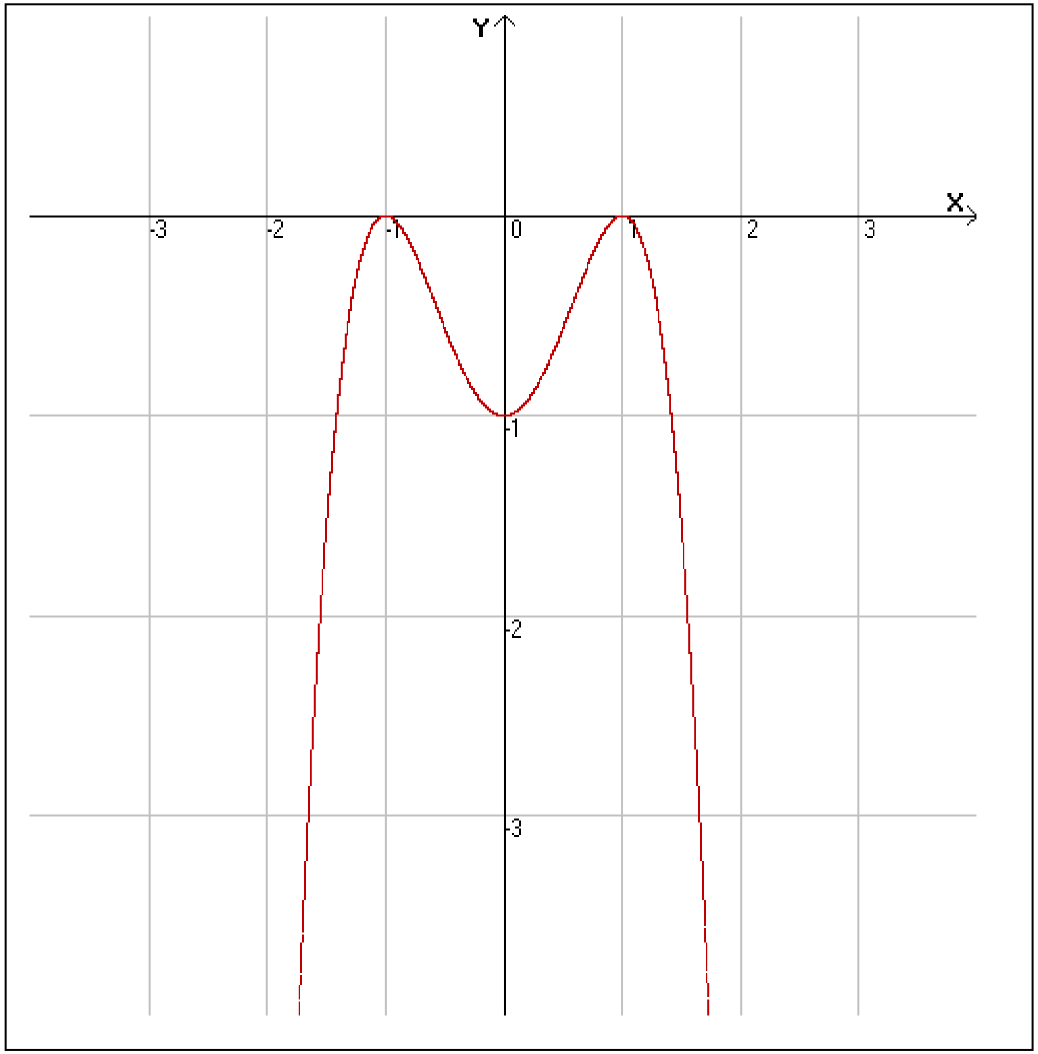
• Il massimo di una funzione, se esiste, è il valore massimo assunto dalla funzione

• Se una funzione ammette massimo assoluto, essa è limitata superiormente

• Se una funzione è limitata superiormente essa ammette estremo superiore, non necessariamente massimo assoluto



- Il massimo di una funzione, se esiste, è unico
- Una funzione può avere più punti di massimo



$$f(x) = -(x-1)^2(x+1)^2$$

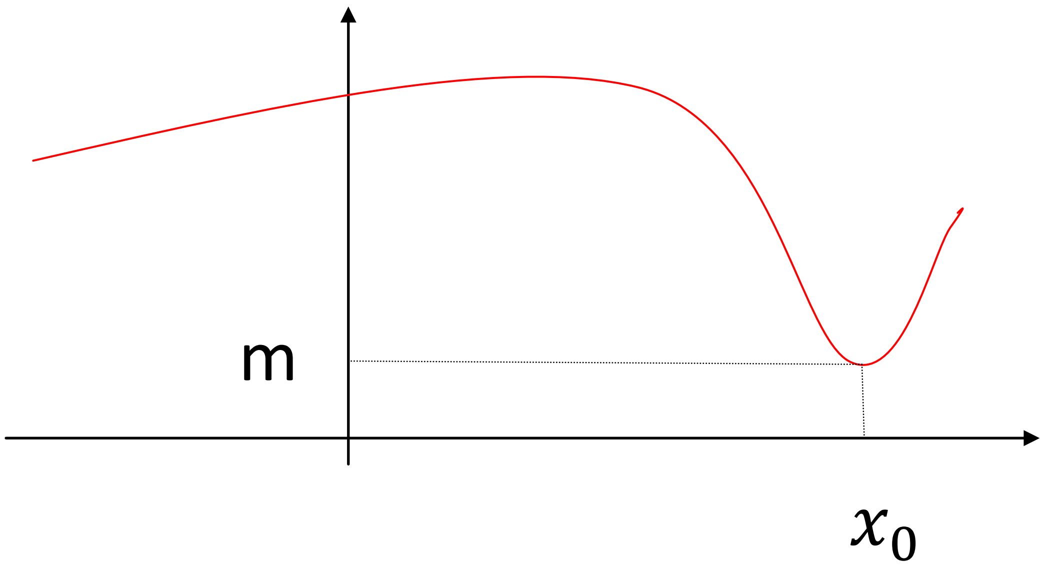
M = 0

$$x_0 = 1 \; e \; x_1 = -1$$

Data una funzione $f: A \to B$ inferiormente limitata. Si dice che m è il minimo di f se m è un minorante di $f(A)$ ed è un valore assunto dalla funzione e si scrive:

$$m = \min f \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m \ \forall x \in A \\ \exists x_0 \in A: f(x_0) = m \end{cases}$$

x_0 si dice punto di minimo assoluto



ESERCIZIO

Si verifichi se 3 è minimo per la funzione seguente, e se ne determinino gli eventuali punti di minimo

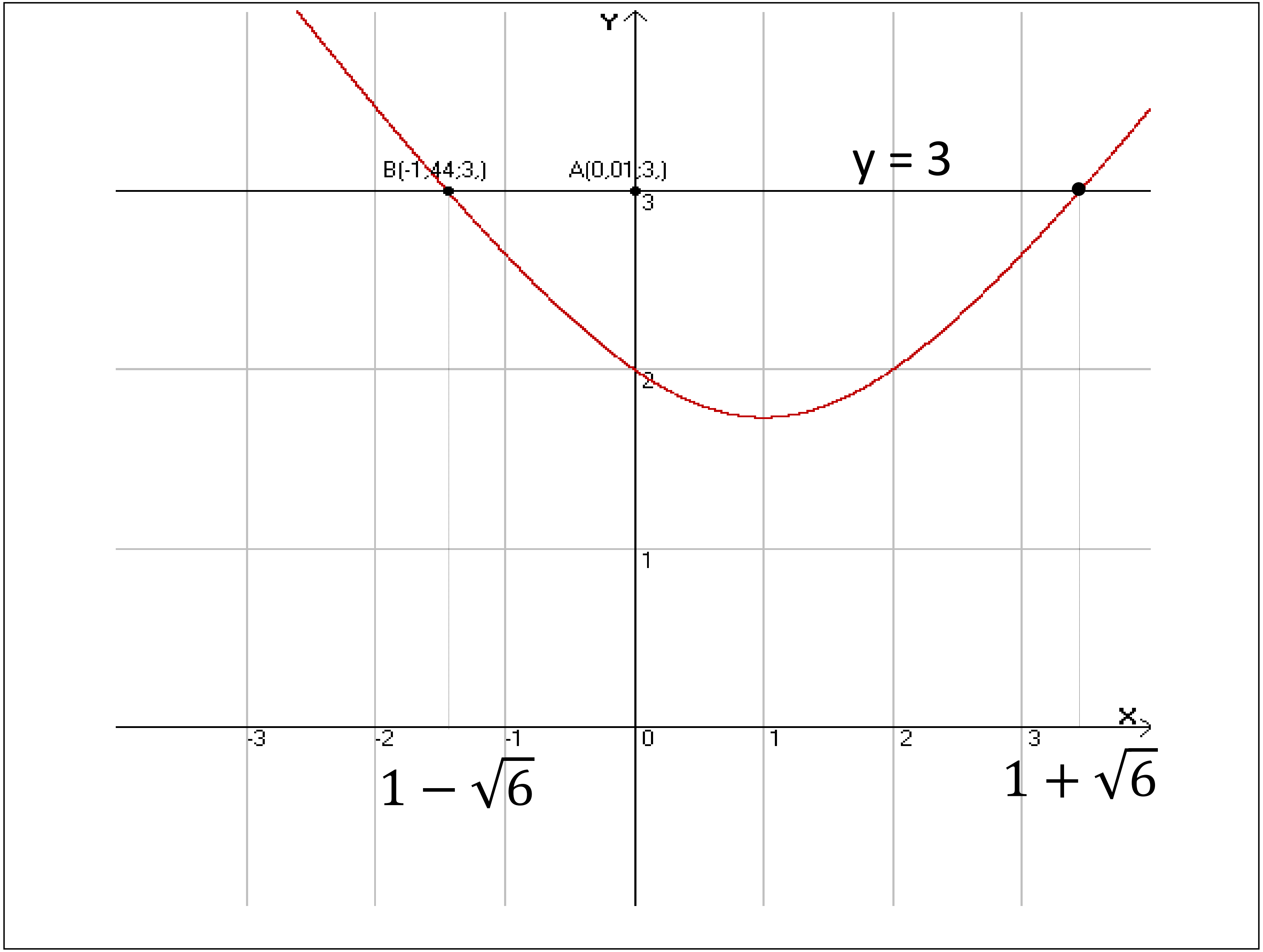
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4} \qquad D(f) = R$$

$$f(x) \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 4} \geq 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 \geq 9$$

$$x^2 - 2x - 5 \geq 0$$

$$x_1 \leq \frac{2 - \sqrt{24}}{2} = 1 - \sqrt{6} \cup x_2 \geq \frac{2 + \sqrt{24}}{2} = 1 + \sqrt{6}$$

Poiché la disequazione non è verificata in tutto il dominio, 3 non è il minimo della funzione


Y
X
B(-1,44;3,)
A(0,01;3,)
y = 3
3
2
1
-3
-2
-1
0
1
2
3
$1-\sqrt{6}$
$1+\sqrt{6}$

ESERCIZIO

Si verifichi se $\sqrt{3}$ è minimo per la funzione seguente, e se ne determinino gli eventuali punti di minimo

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4} \qquad D(f) = R$$

$$f(x) \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt[2]{x^2 - 2x + 4} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 \geq 3$$

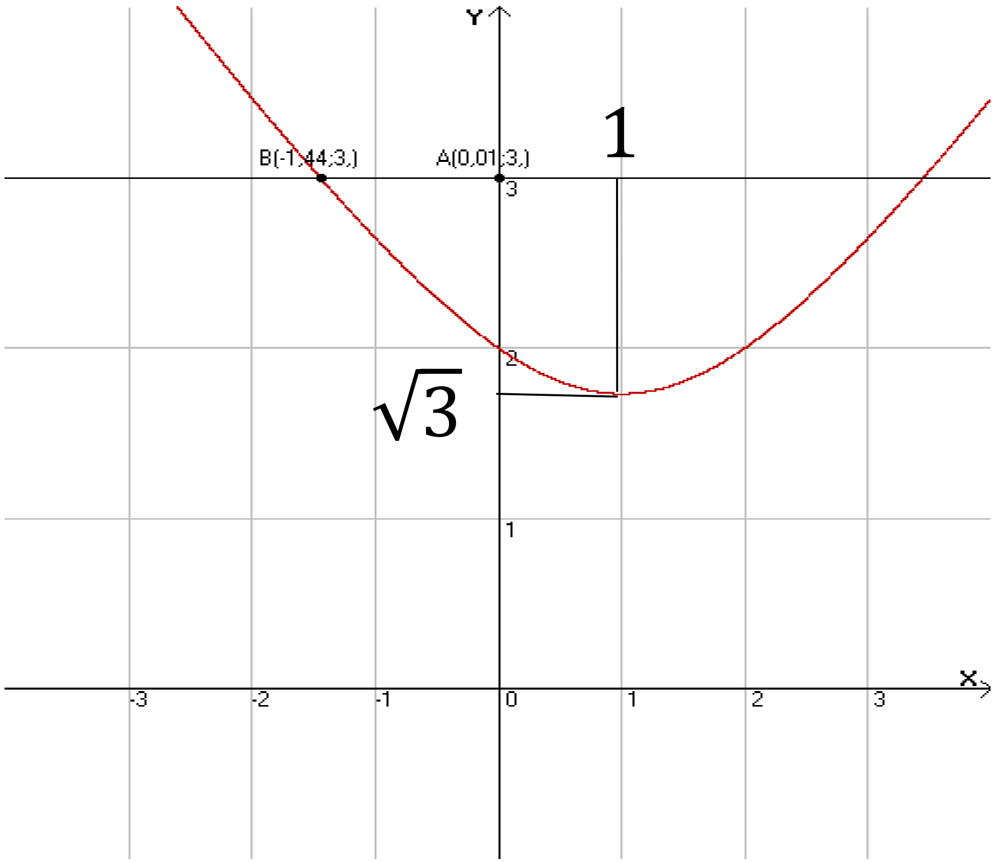
$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$$

$$\forall x \in R$$

Inoltre

$$\sqrt{x^2 - 2x + 4} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1$$

Poiché la disequazione è verificata in tutto il dominio e $f(1) = \sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ è minimo assoluto.



1 è il punto di minimo assoluto

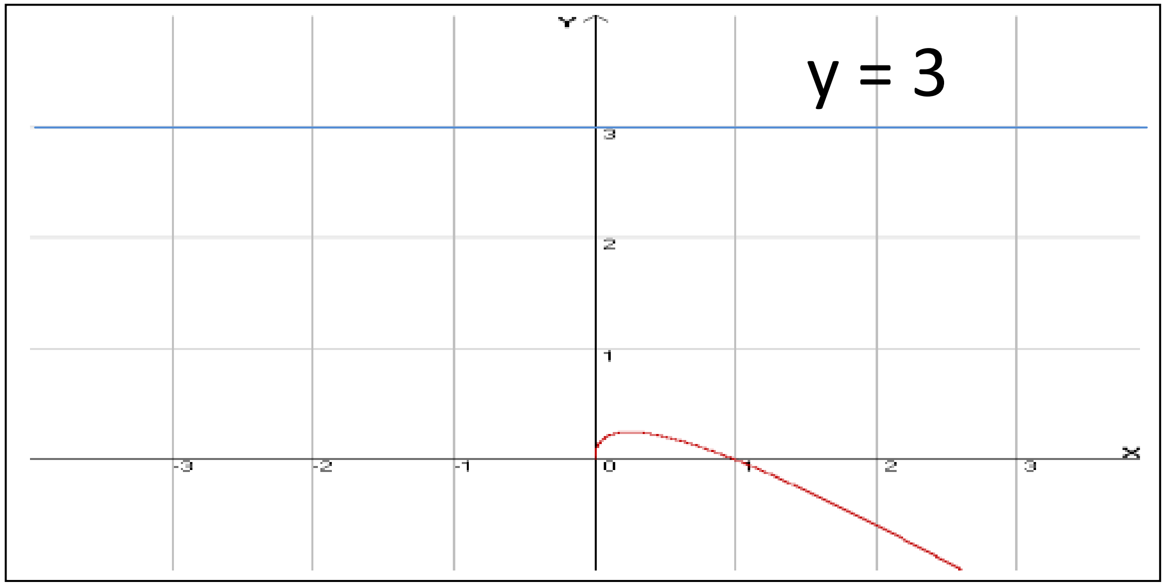
ESERCIZIO

3 è minorante per $f(x) = \sqrt{x} - x$?

$$\sqrt{x} - x \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 3 + x$$

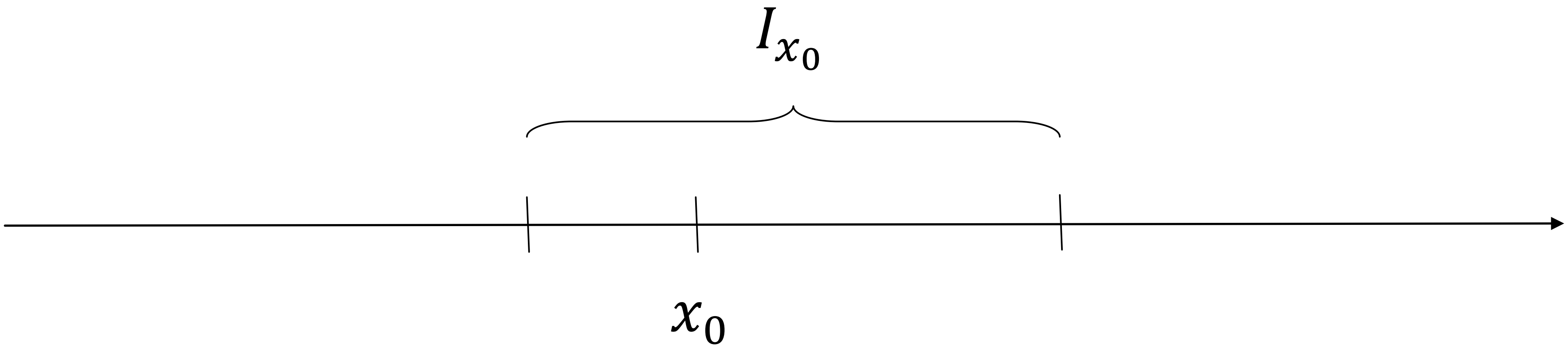
$$\begin{cases} x \geq 9 + x^2 + 6x \\ 3 + x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 9 \leq 0 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

3 è dunque un maggiorante e non un minorante per la funzione



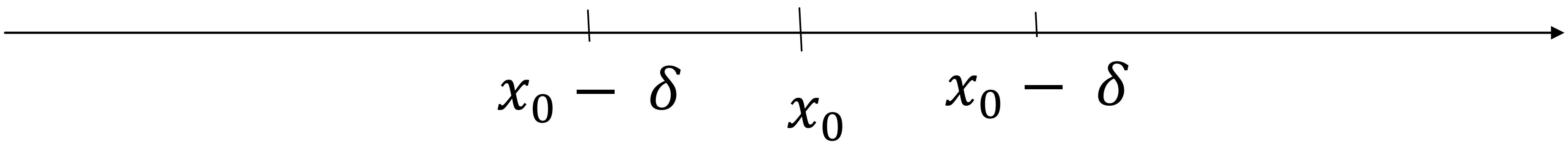
Intorni

Fissato un punto x_0 sull' asse reale, si definisce intorno del punto x_0, I_{x_0} un intervallo aperto contenente x_0



Solitamente si fa riferimento ad intorni simmetrici

$$S_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

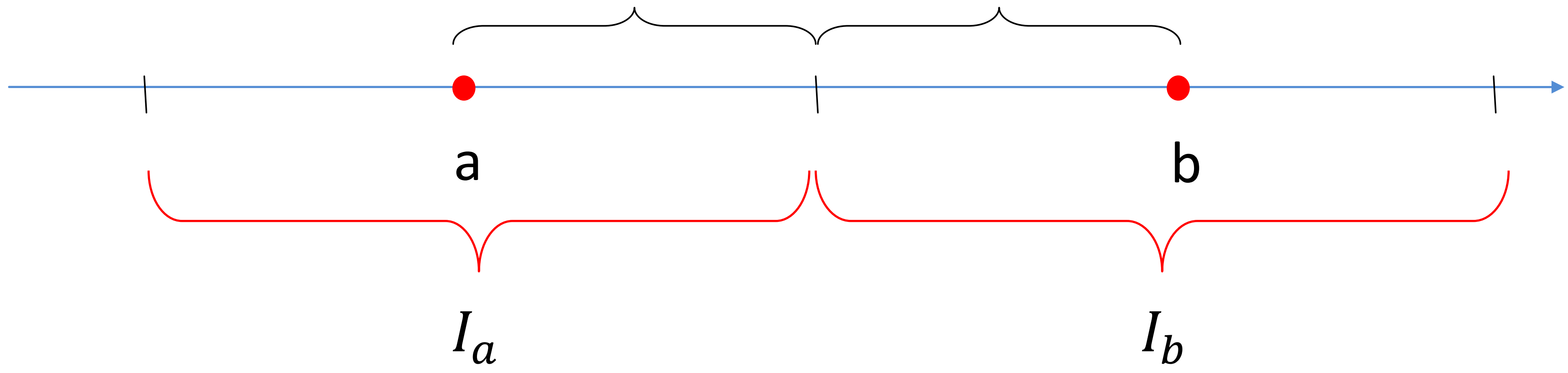


(-2,5) è un intorno di 0

(-2,5) è un intorno sferico di 1.5 di raggio 3.5

Separatezza in R: presi due numeri distinti *a* e *b* con *a* < *b* esistono sempre due intorni I_a e I_b aventi intersezione nulla. Per provare ciò, basta considerare $I_a = S_a(\delta)$ e $I_b = S_b(\delta)$ dove δ = (*b*-*a*)/2

$$\frac{b-a}{2} = \delta \qquad \frac{b-a}{2} = \delta$$



Massimi relativi

Assegnata una funzione $f: A \to B$.

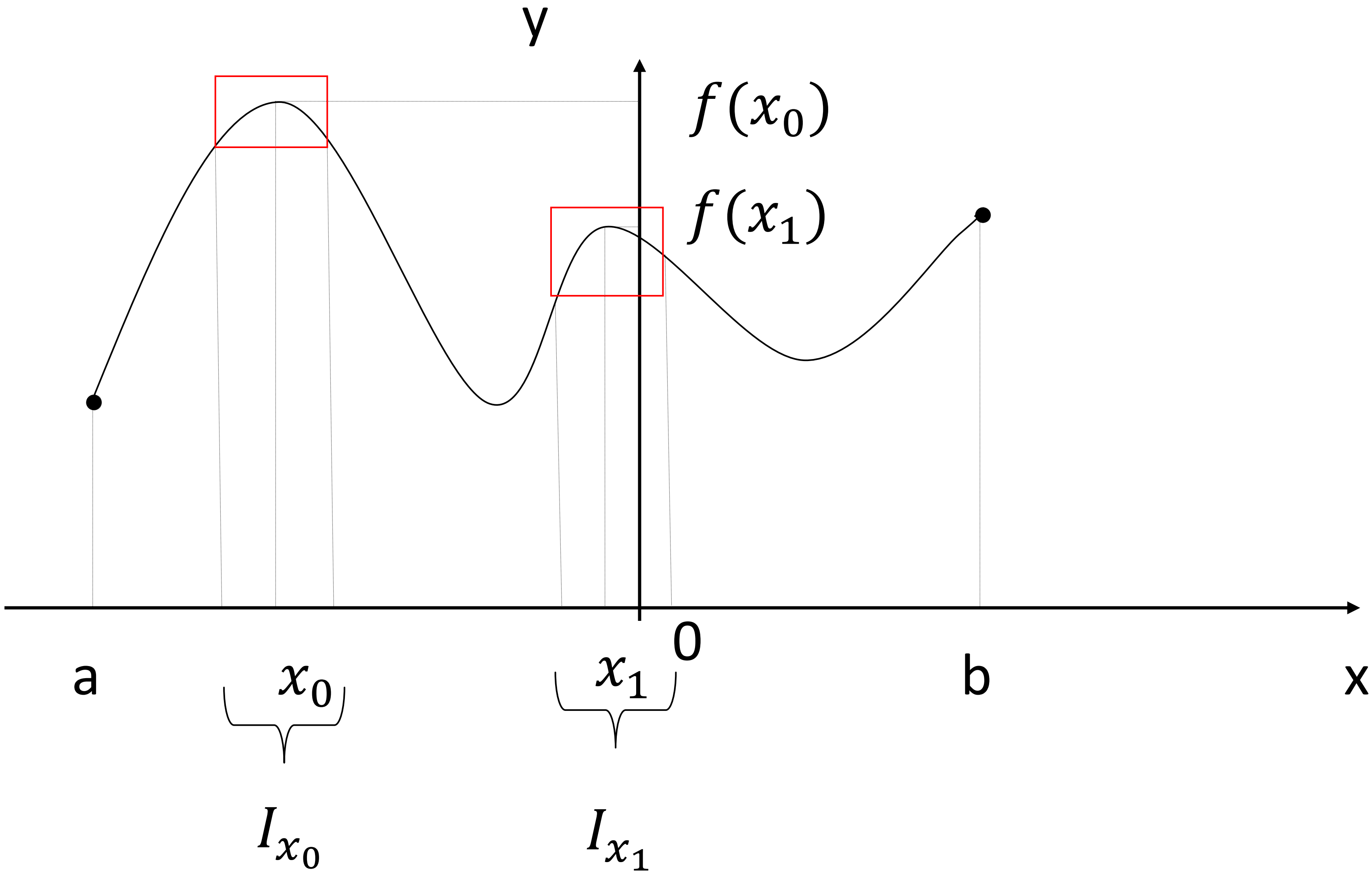
Il punto $x_0 \in A$ si dice punto di massimo relativo (proprio) per f se

$$\exists I_{x_0}: \forall x \in I_{x_0} \cap A, \qquad f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0))$$

N.B.

- Un punto di massimo relativo può essere interpretato come massimo assoluto della funzione ristretta ad un opportuno sottoinsieme del dominio

- L'esistenza di massimi relativi non implica la limitatezza superiore di una funzione



y
f(x0)
f(x1)
0
a
x0
x1
b
x
Ix0
Ix1

Minimi relativi

Assegnata una funzione $f: A \to B$.

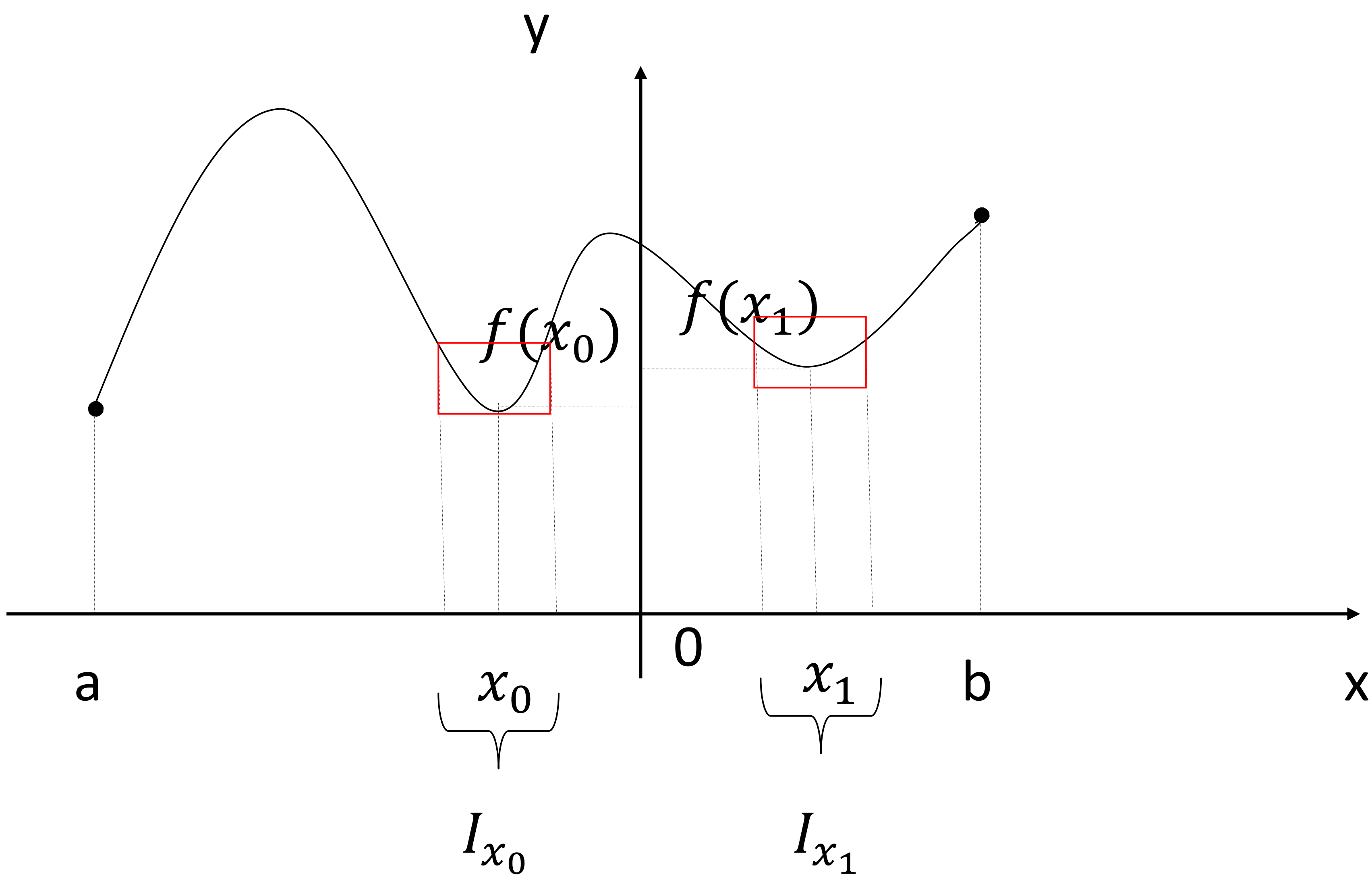
Il punto $x_0 \in A$ si dice punto di minimo relativo (proprio) per f se

$$\exists I_{x_0}: \forall x \in I_{x_0} \cap A, \qquad f(x) \geq f(x_0)\ (f(x) > f(x_0))$$

N.B.

- Un punto di minimo relativo può essere interpretato come minimo assoluto della funzione ristretta ad un opportuno sottoinsieme del dominio

- L'esistenza di minimi relativi non implica la limitatezza inferiore di una funzione



y
$f(x_0)$
$f(x_1)$
0
a
x_0
x_1
b
x
I_{x_0}
I_{x_1}

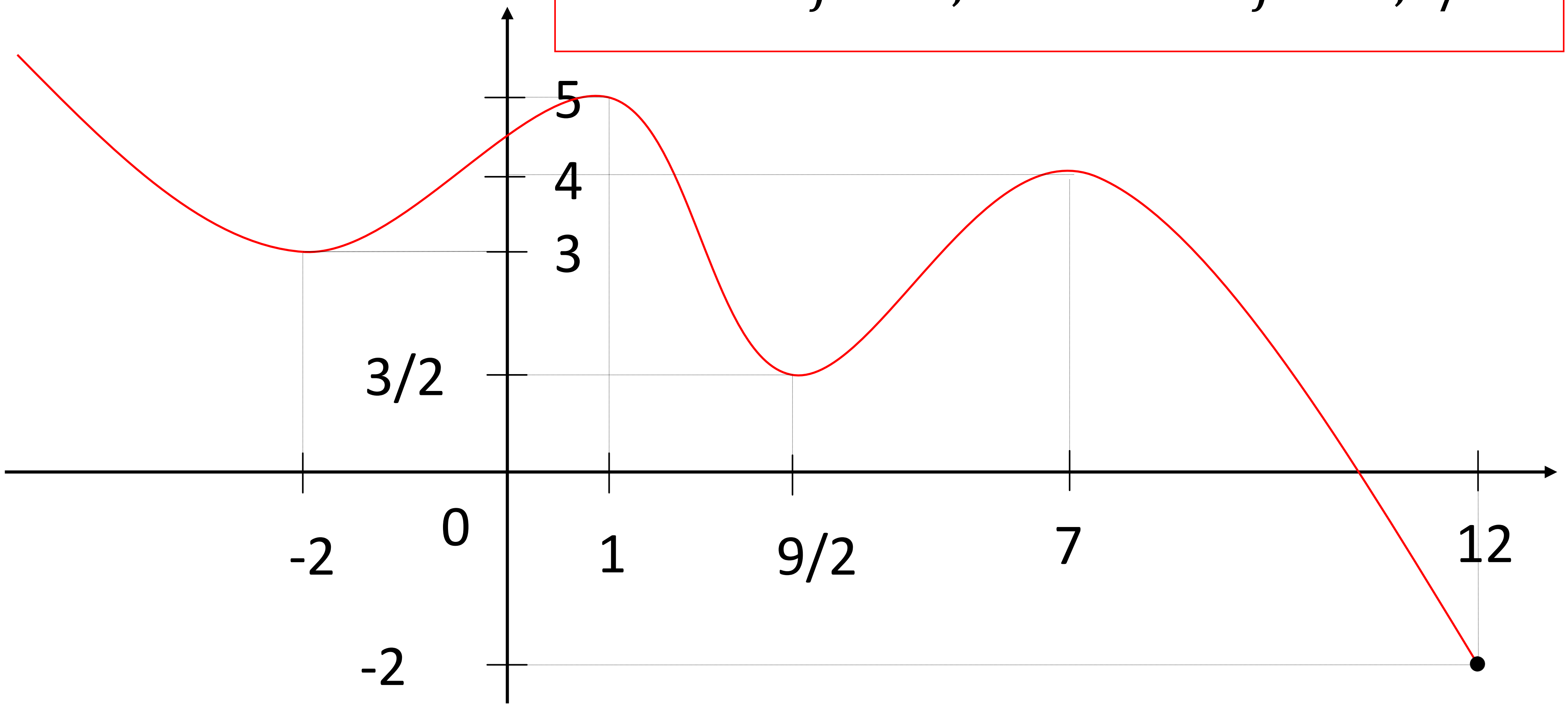
Esercizio

$A = (-\infty, 12]$, $\quad f(A) = [-2, +\infty)$

$\sup f = +\infty$, $\quad \inf f = -2$

$\nexists \max f$, $\quad \min f = -2 \; in \; x_0 = 12$

$\max rel f = 4{,}5 \quad \min rel f = 3{,}3/2$



$$A = (-5,10], \quad f(A) = [-3,7]$$
$$\max f = 7 \quad in\ x_0 = -7/2,$$
$$\min f = -3 \quad in\ x_0 = 10$$
$$\max rel f = 7,6 \quad \min rel f = -3,5$$