

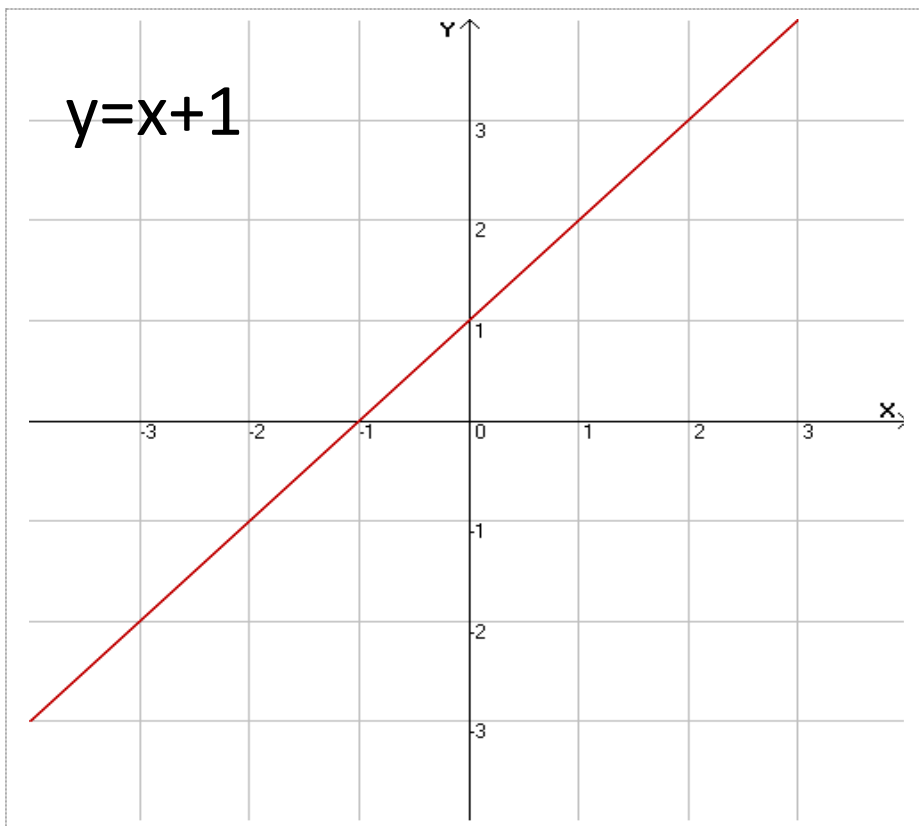
FUNZIONI LINEARI. FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

Si chiama funzione lineare (o funzione affine) una funzione del tipo

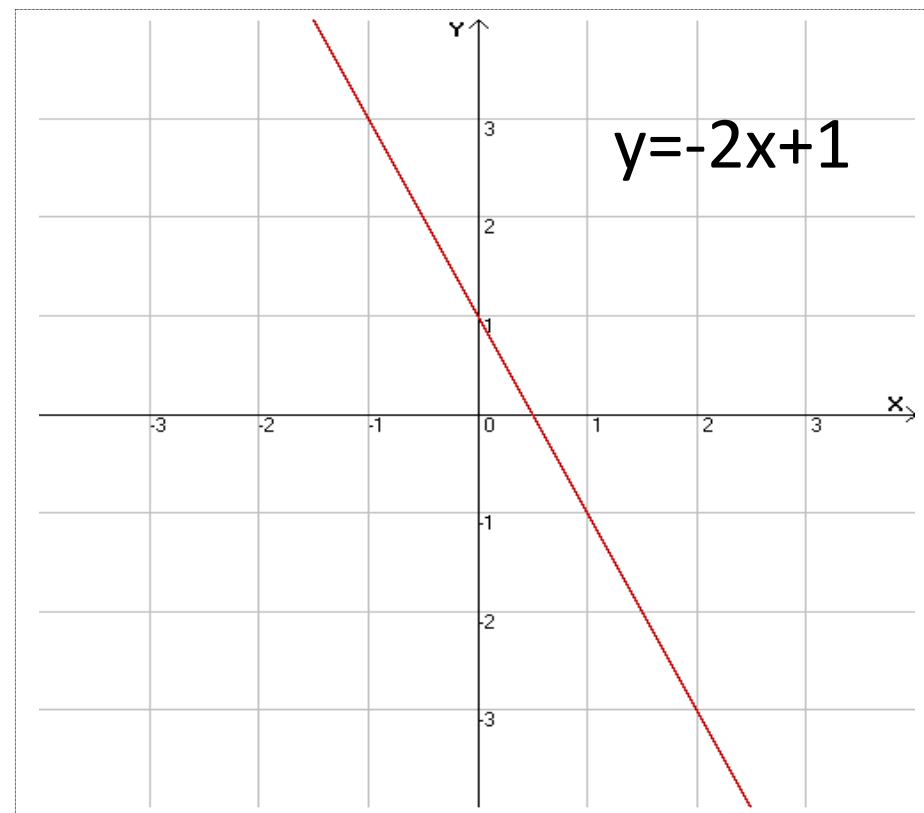
$$y = mx + q$$

dove m e q sono numeri reali fissati. Il grafico di tale funzione è una retta, di cui il parametro m è detto coefficiente angolare.

Ogni funzione lineare è monotona (strettamente se $m \neq 0$) su $\mathbb{R}$. In particolare si ha



$m > 0 \Rightarrow \textit{strett. cresc.}$



$m < 0 \Rightarrow \textit{strett. decresc.}$

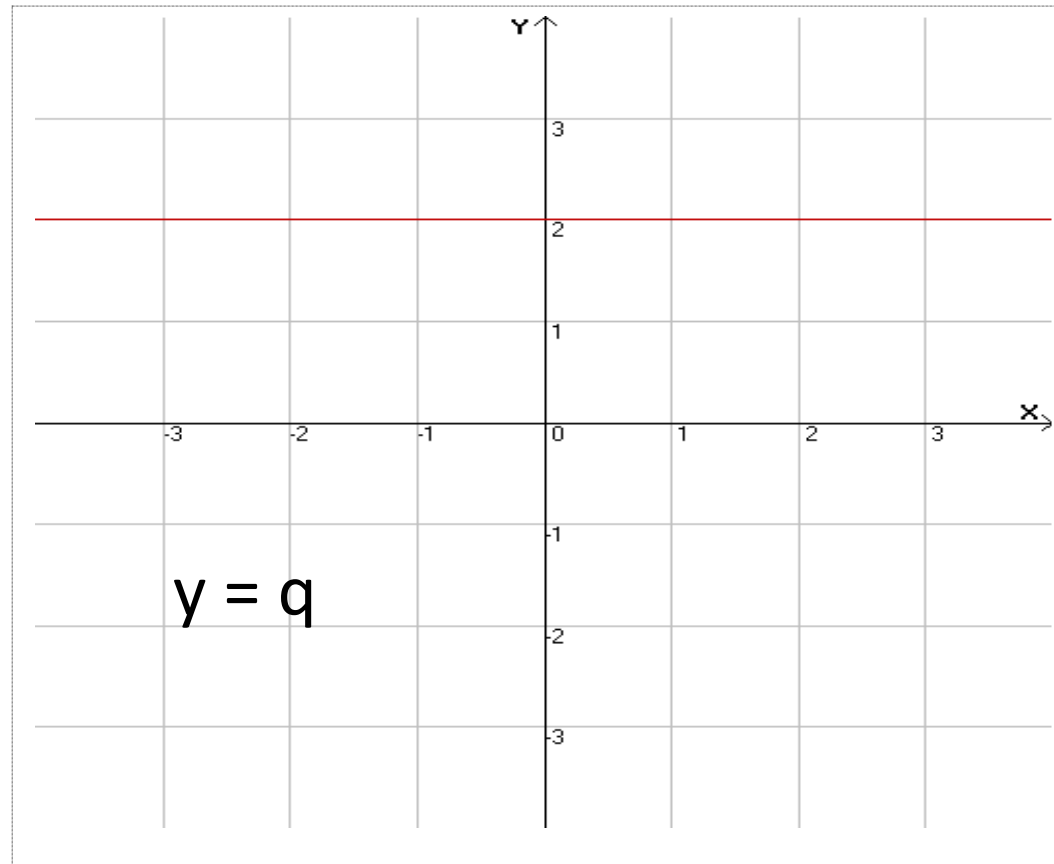
Ricordiamo che, sotto certe ipotesi di regolarità, una funzione strettamente monotona su un insieme è anche invertibile. Difatti se $m \neq 0$ si ha

$$y = mx + q \Rightarrow x = \frac{y - q}{m}$$

quindi la funzione inversa della funzione lineare è ancora una funzione lineare

$$f^{-1}(y) = \frac{y - q}{m}$$

Se invece $m = 0$, la funzione costante $f(x) = q$



non stabilisce alcuna corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{R}$ e l'insieme $B = \{q\}$; quindi non è invertibile.

Particolari modelli lineari

1. Moto rettilineo uniforme

La nota legge cinematica

$$s(t) = v \cdot t$$

esprime la proporzionalità dello spazio percorso rispetto al tempo impiegato a percorrerlo. La costante di proporzionalità è la velocità.

2. Capacità di un condensatore

In un comune condensatore, la quantità di carica Q presente sulle armature e la differenza di potenziale ΔV esistente tra queste sono legate dalla formula

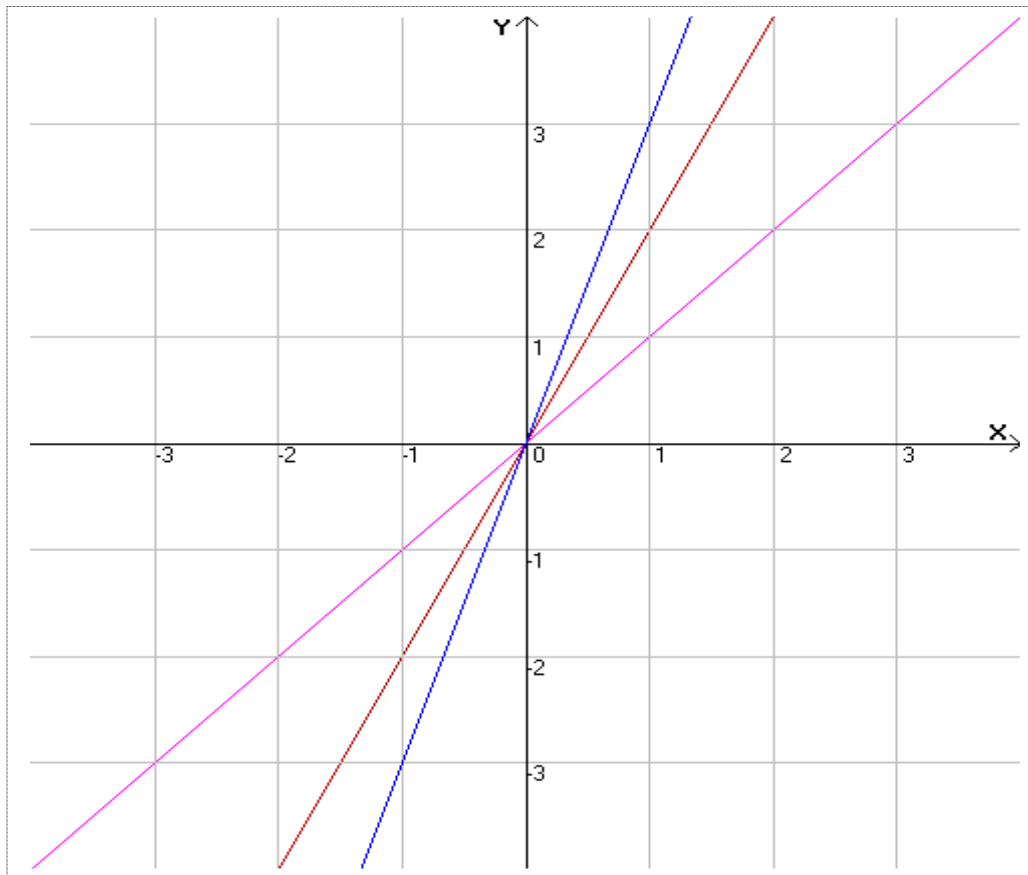
$$Q = C \cdot \Delta V$$

La costante di proporzionalità C è la capacità del condensatore

Legge della proporzionalità diretta

$$f(x) = mx$$

Al variare di m si ottiene un fascio di rette passanti per l'origine.



$$y = k_1 x$$

$$y = k_2 x$$

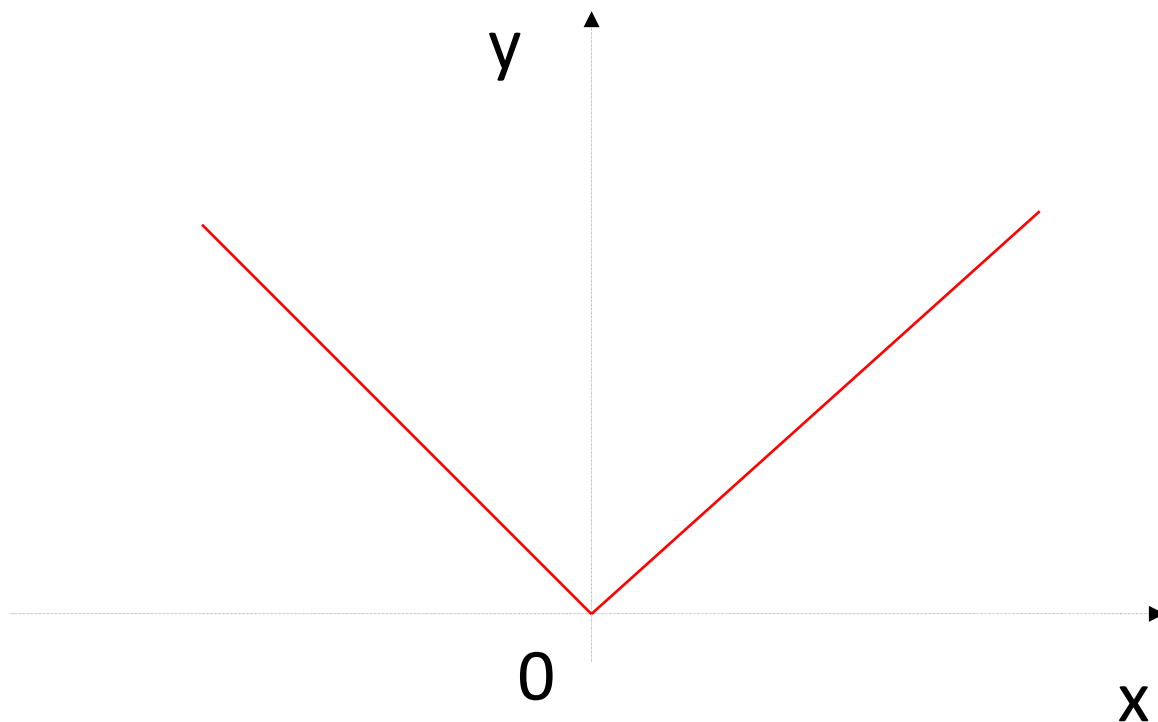
$$y = k_3 x$$

$$k_1 \leq k_2 \leq k_3$$

Il **valore assoluto** (o modulo) di x , indicato con il simbolo $|x|$, è definito da

$$f: x \in \mathbb{R} \rightarrow |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \in [0, +\infty)$$

Il suo grafico è composto da due semirette passanti per l'origine, di equazione rispettivamente $y = x$ e $y = -x$



f strett. decresc. in $(-\infty, 0]$

f strett. cresc. in $[0, +\infty)$

f pari: $|-x| = |x|$

$\sup |x| = +\infty, \min |x| = 0$

Proprietà

$$|x| \geq 0, \forall x \in R;$$

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$|-x| = |x|, \forall x \in R;$$

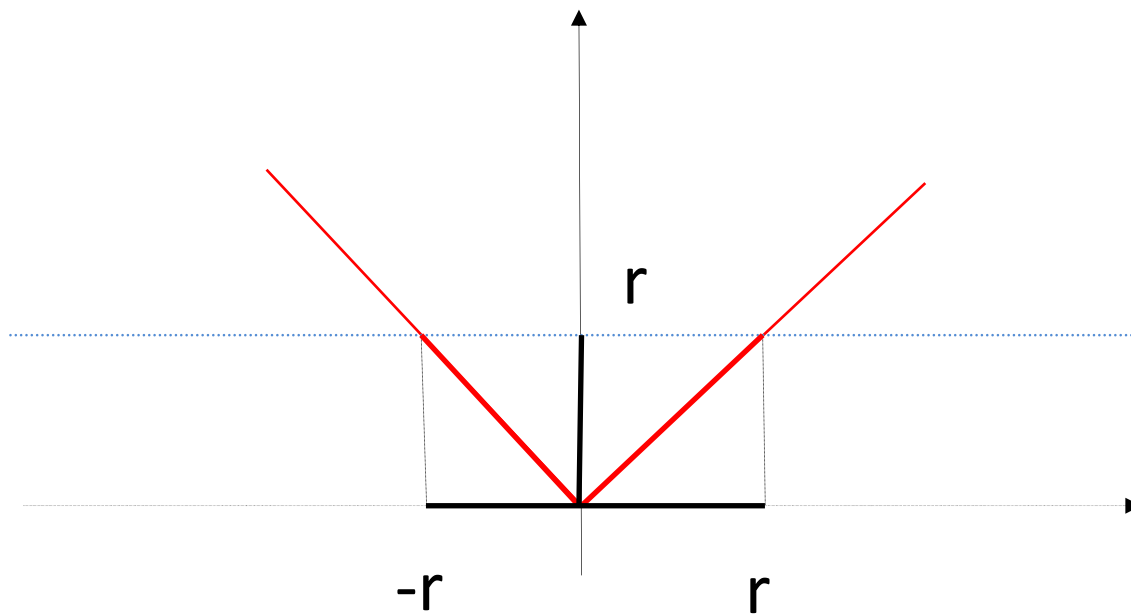
$$|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in R$$

$$|x_1/x_2| = \frac{|x_1|}{|x_2|}, \quad \forall x_1, x_2 \in R, x_2 \neq 0$$

Inoltre per ogni numero reale $r \geq 0$ valgono le seguenti equivalenze:

$$|x| \leq r \quad -r \leq x \leq r \quad (|x| < r \quad -r < x < r)$$

$$|x| \geq r \quad x \leq -r \cup x \geq r \quad (|x| > r \quad x < -r \cup x > r)$$



$$|x| \leq r, \quad -r \leq x \leq r$$

FUNZIONE POTENZA CON ESPONENTE NATURALE

La funzione potenza con esponente $n \in N$ è del tipo:

$$f(x) = x^n, n \in N \text{ fissato}$$

che è definita $\forall x \in R$ moltiplicando il numero x per se stesso n volte

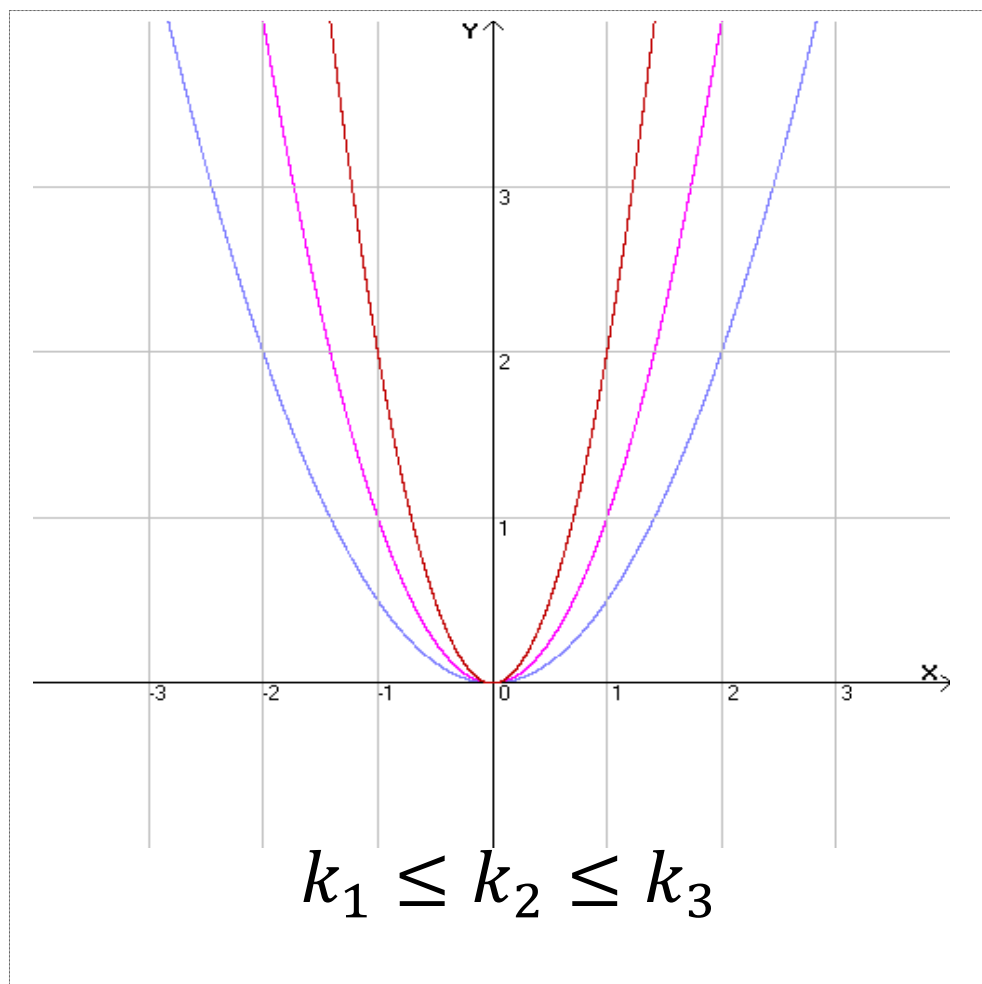
$$f: x \in R \rightarrow x^n \in \text{codominio che varia con } n$$

x è la **base** della funzione potenza e varia nel dominio

n è l'**esponente** della funzione potenza e viene fissato.

$$f(x) = x^n, n \in N \text{ pari}$$

$$f: x \in R \rightarrow x^n \in [0, +\infty)$$



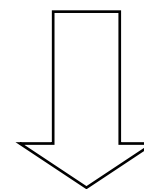
$$y = k_1 x^2, y = k_2 x^2, y = k_3 x^2$$

f strett. decresc. in $(-\infty, 0]$

f strett. cresc. in $[0, +\infty)$

$$f \text{ pari: } x^n = (-x)^n$$

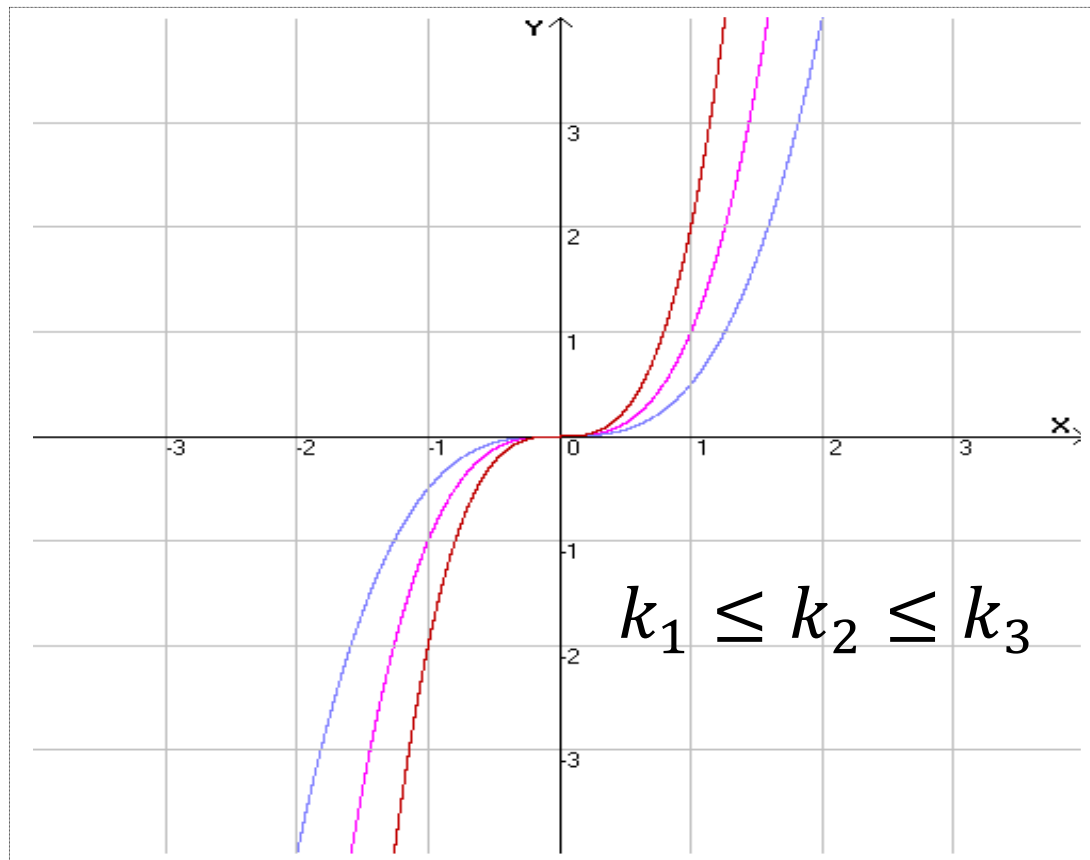
$$\sup x^n = +\infty, \min x^n = 0$$



non è invertibile su R

$$f(x) = x^n, n \in N \text{ dispari}$$

$$f: x \in R \rightarrow x^n \in R$$

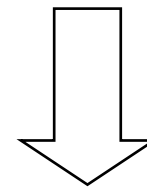


$$y = k_1 x^3, y = k_2 x^3, y = k_3 x^3$$

f strett. cresc. in R

f dispari: $-x^n = (-x)^n$

$$\sup x^n = +\infty, \inf x^n = -\infty$$

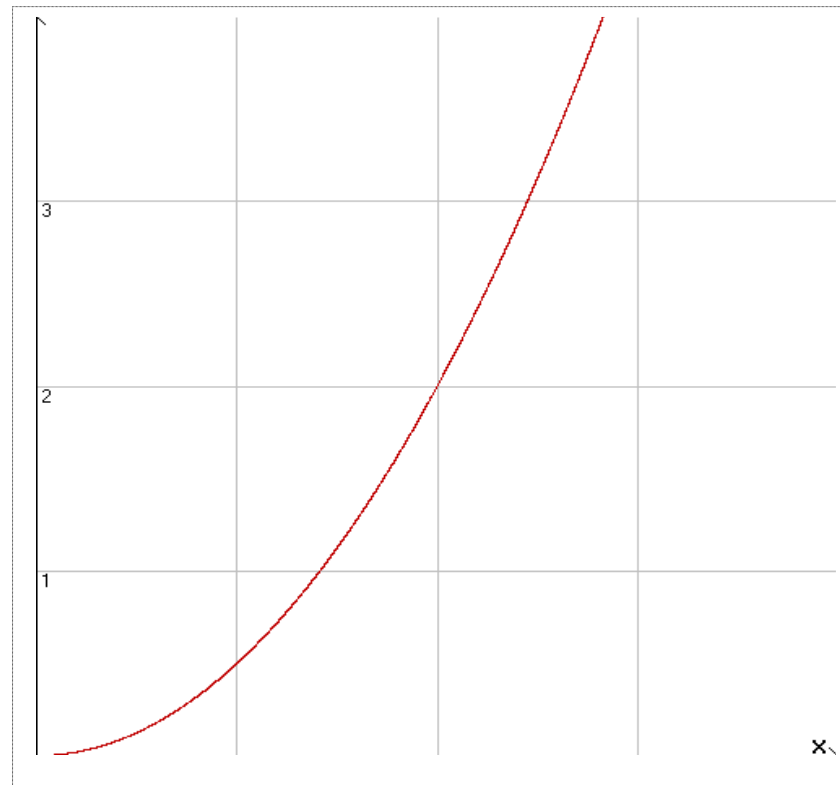


è invertibile su R

ATTENZIONE

La funzione potenza ad esponente naturale nel caso in cui n è pari non è invertibile su $\mathbb{R}$.

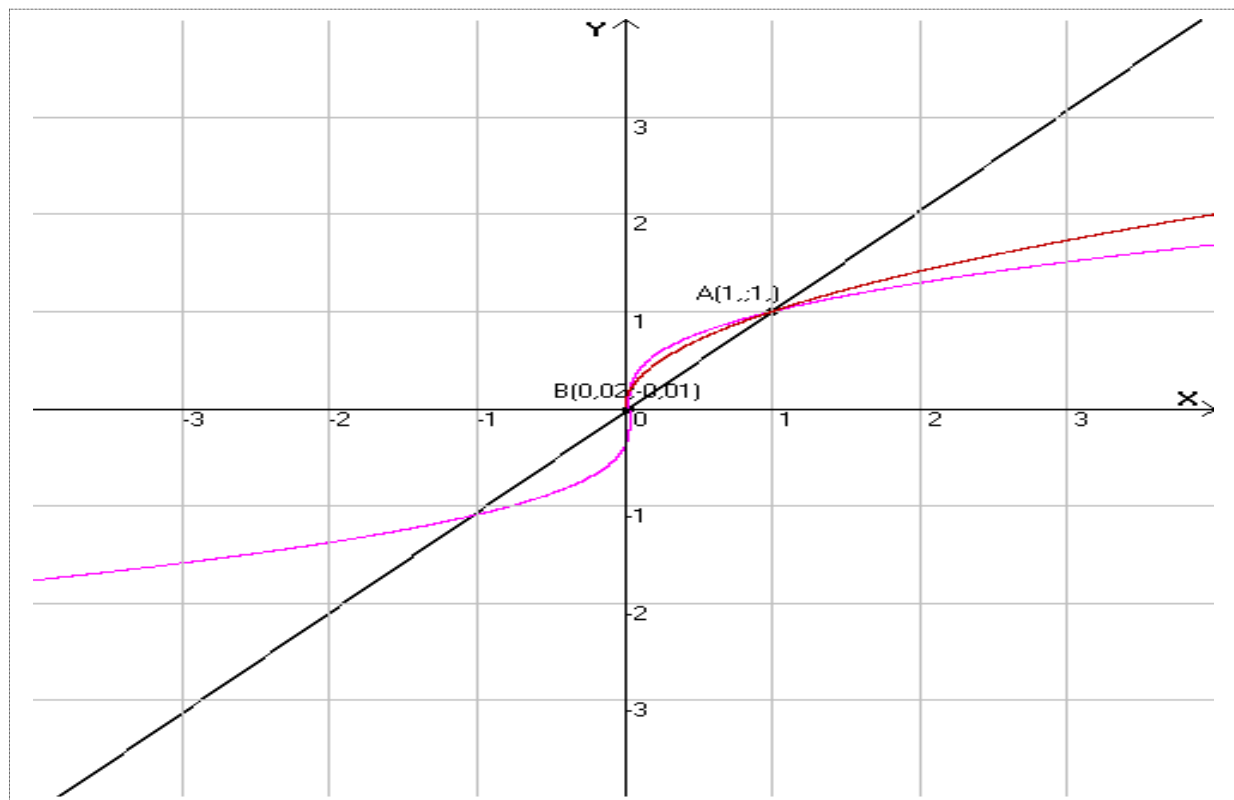
Se però, invece di considerare come dominio tutto $\mathbb{R}$ consideriamo solo una parte di esso e cioè l'intervallo $[0, +\infty)$, allora in tale intervallo risulta strettamente crescente e quindi invertibile.



FUNZIONE RADICE

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, n \in N, n \geq 2$$

dominio e codominio variano a seconda di n



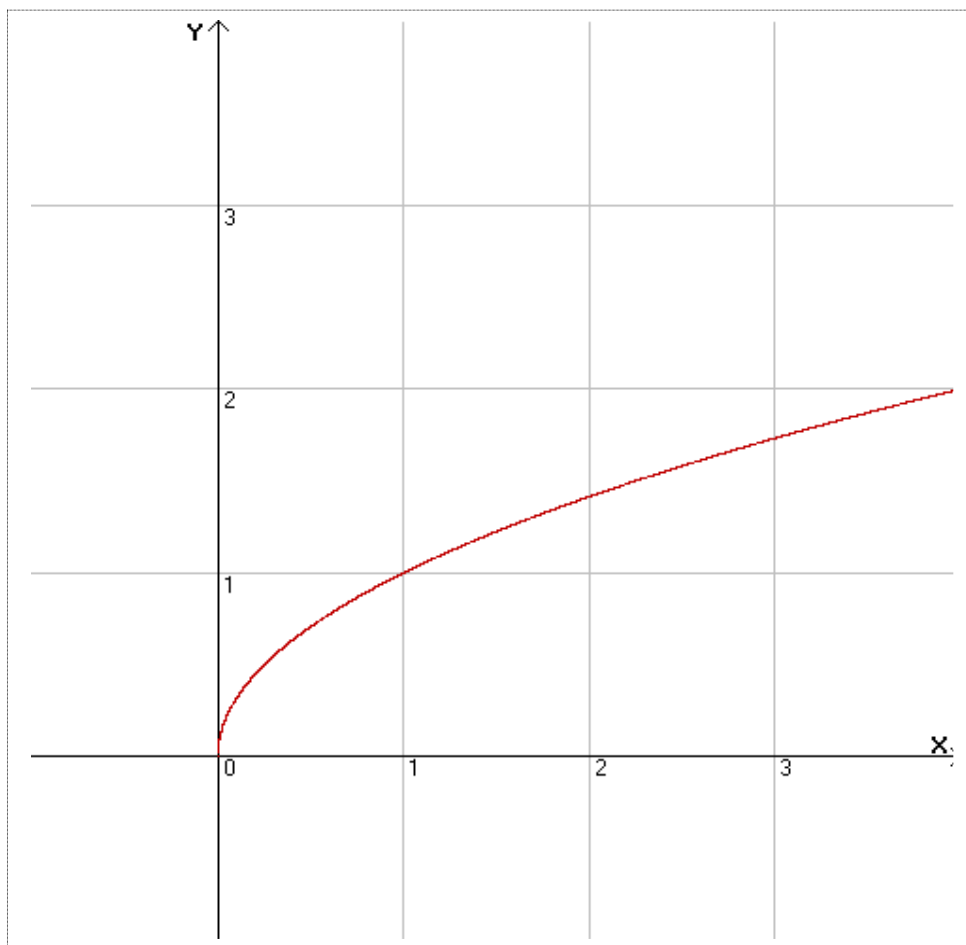
$$y = x$$

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

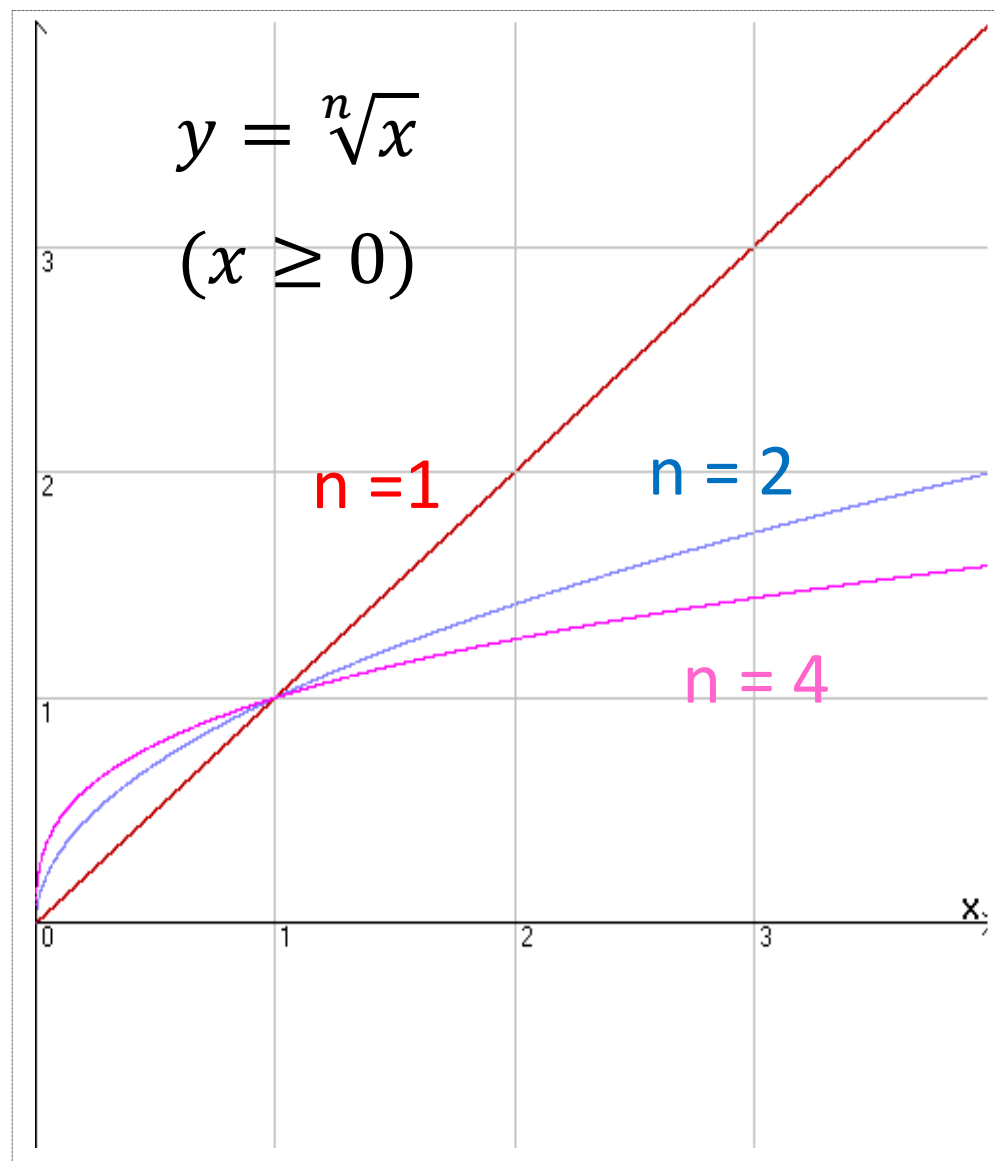
$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, n \in N \text{ *pari* }, n \geq 2$$

$$f: x \in [0, +\infty) \rightarrow \sqrt[n]{x} \in [0, +\infty)$$



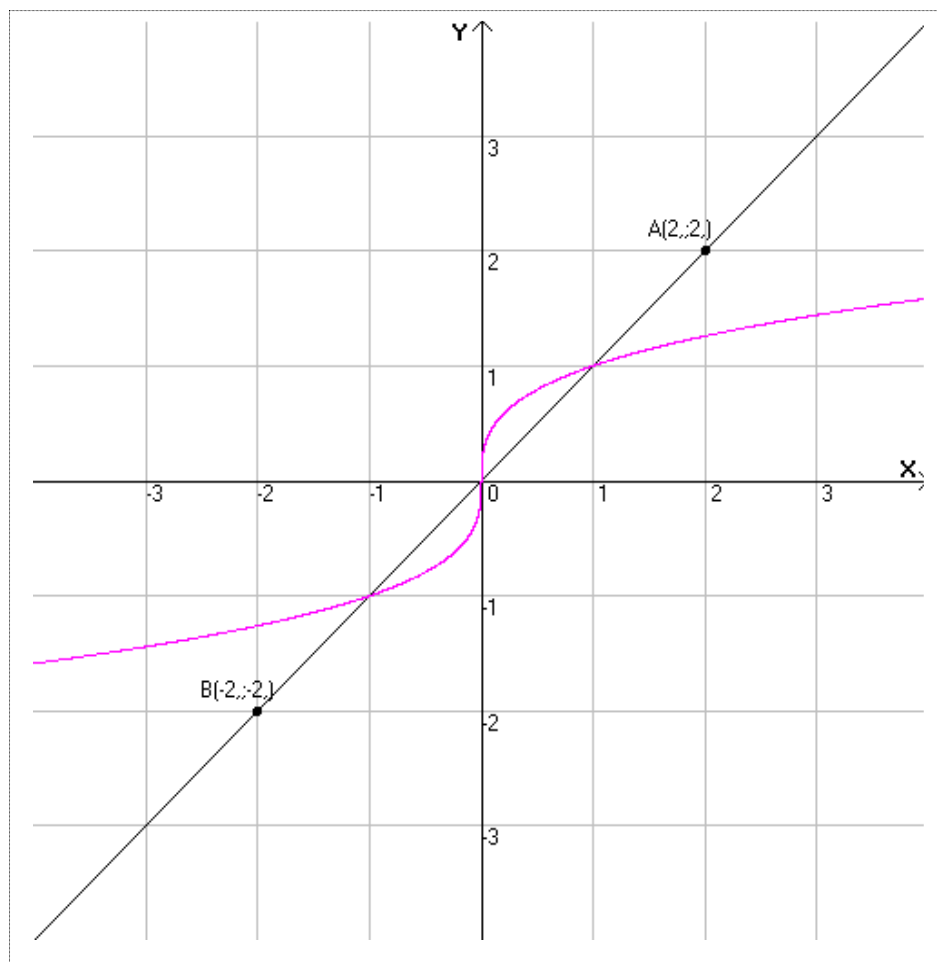
f strett.cresc.in $[0, +\infty)$

$$\sup \sqrt[n]{x} = +\infty, \min \sqrt[n]{x} = 0$$



$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, n \in N \text{ *dispari* }, n \geq 2$$

$$f: x \in R \rightarrow \sqrt[n]{x} \in R$$



f strett.cresc.in R

f dispari: $-\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{-x}$

$$\sup \sqrt[n]{x} = +\infty, \inf \sqrt[n]{x} = -\infty$$

FUNZIONE POTENZA AD ESPONENTE REALE

$$f(x) = x^b, b \in R \text{ fissato}$$

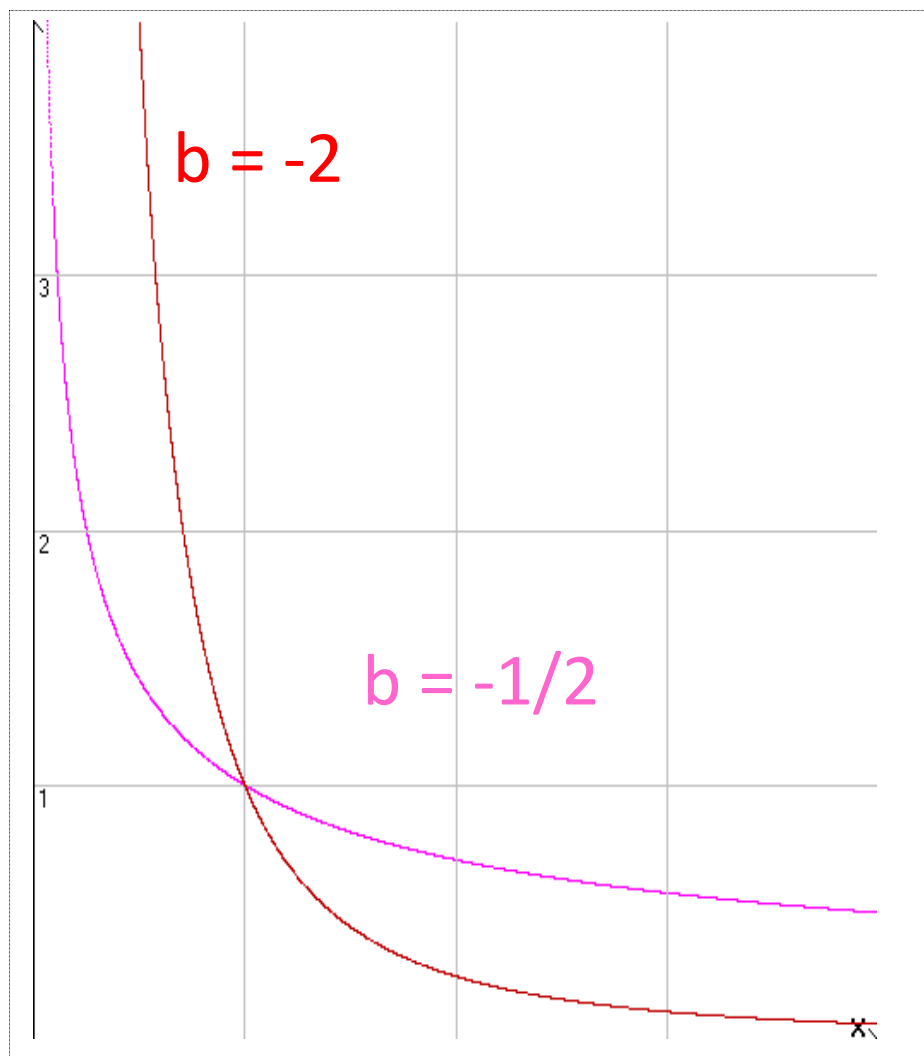
Dominio e Codominio che variano a secondo del segno di b

x è la **base** della funzione potenza e varia nel dominio

b è l'**esponente** della funzione potenza ed è fissato

$$f(x) = x^b, b \in \mathbb{R} \text{ fissato } b < 0$$

$$f: x \in (0, +\infty) \rightarrow x^b \in (0, +\infty)$$



f strett. decresc. in $(0, +\infty)$

$$\sup x^b = +\infty, \inf x^b = 0$$



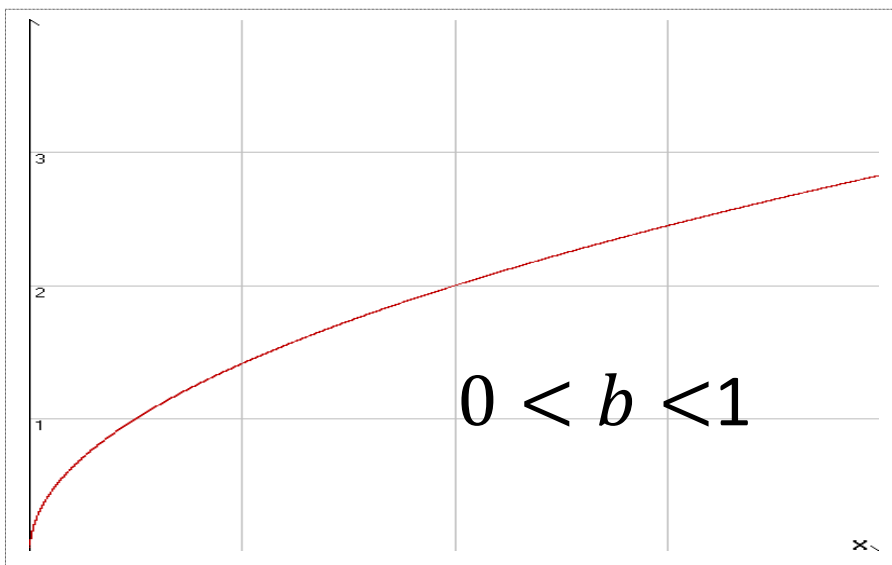
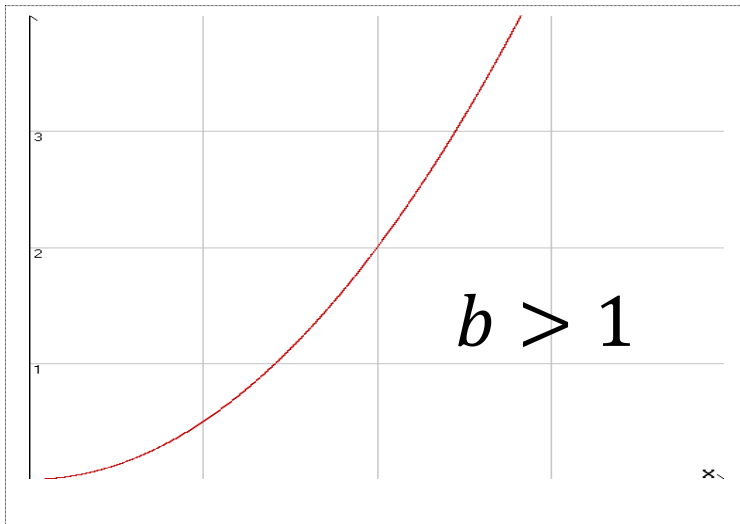
f è invertibile su $(0, +\infty)$

f^{-1} è ancora una funzione
potenza con esponente $\frac{1}{b}$

$$f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

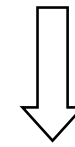
$$f(x) = x^b, b \in \mathbb{R} \text{ fissato } b > 0$$

$$f: x \in [0, +\infty) \rightarrow x^b \in [0, +\infty)$$



f strett. cresc. in $(0, +\infty)$

$$\sup x^b = +\infty, \min x^b = 0$$



f è invertibile su $[0, +\infty)$

f^{-1} è ancora una funzione
potenza con esponente $\frac{1}{b}$

$$f^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

Esempi

$$f(x) = x^2, \forall x \in R$$

$$f(x) = x^\pi, \forall x \in [0, +\infty), \text{ oppure } x \geq 0$$

$$f(x) = x^{-\pi}, \forall x \in (0, +\infty), \text{ oppure } x > 0$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, \forall x \in [0, +\infty), \text{ oppure } x \geq 0$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}, \forall x \in R$$

Proprietà delle potenze

1. $x^0 = 1 \forall x \in (0, +\infty)$ e $1^a = 1 \forall a \in R$
2. $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \forall x \in (0, +\infty)$ e $\forall a, b \in R$
3. $(x^a)^b = x^{a \cdot b} \forall x \in (0, +\infty)$ e $\forall a, b \in R$
4. $x^b > 0 \forall x \in (0, +\infty)$ e $\forall b \in R$
5. se $x > 1, a < b \Rightarrow x^a < x^b, \forall a, b \in R$
6. se $x < 1, a < b \Rightarrow x^a > x^b, \forall a, b \in R$

ESERCIZI

$$x^4 \cdot x^5 = x^9$$

$$x^{\frac{1}{3}} \cdot x^2 = x^{\frac{1}{3}+2} = x^{\frac{7}{3}}$$

$$\frac{1}{x^5} \cdot x^4 = x^{-5} \cdot x^4 = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^6 = x^{\frac{6}{2}} = x^3$$

Modelli funzioni potenza

1. Trasformazioni isoterme

In una trasformazione a temperatura costante di una mole di un gas ideale, pressione e volume sono legati dalla legge

$$p = \frac{RT}{V}$$

Cioè, la pressione è inversamente proporzionale al volume secondo la costante RT , dove $R = 1,986 \text{ cal/K}$ e T è la temperatura assoluta.

2. Potenziale elettrico generato da una carica puntiforme

Sia q una carica elettrica concentrata in un punto Q dello spazio. Se P è un altro punto a distanza r da Q , il potenziale in P prodotto dalla carica q è dato da

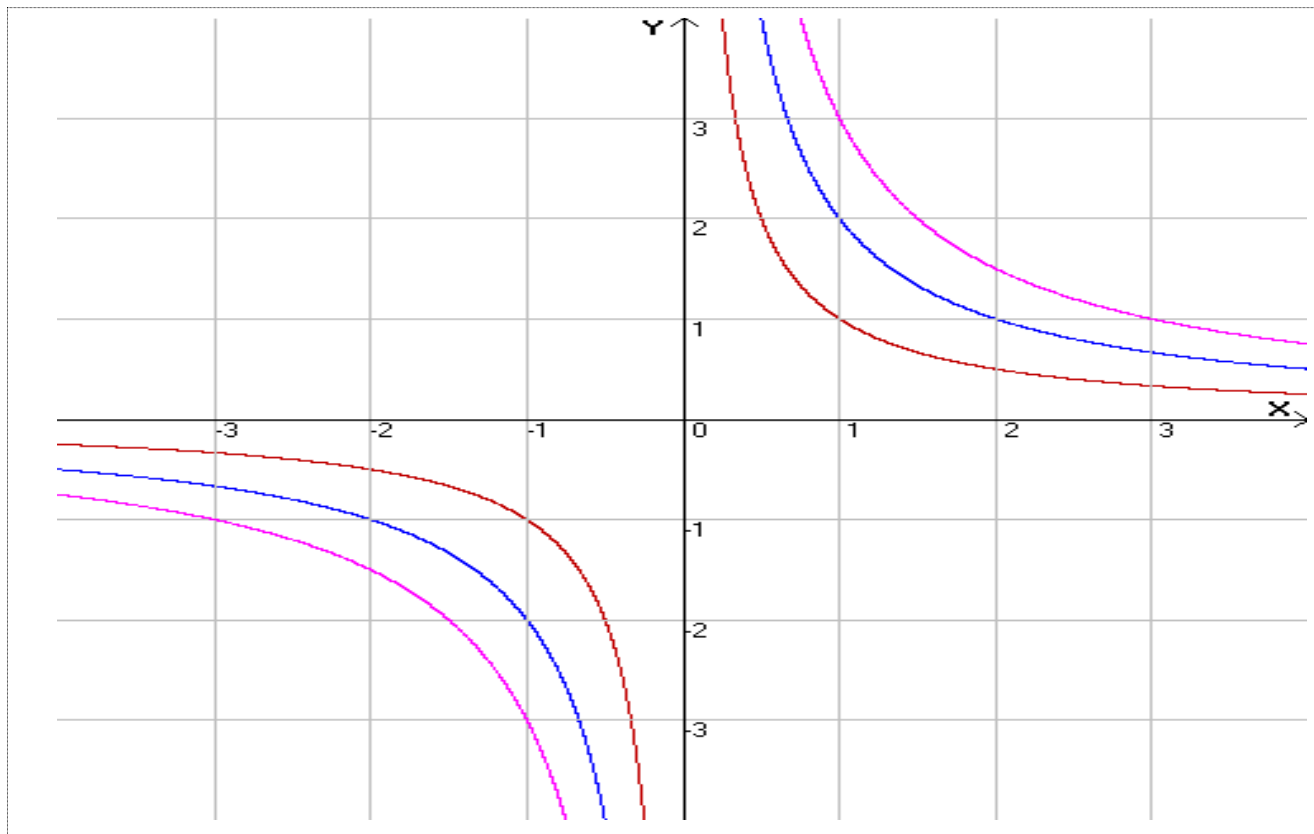
$$V = h \frac{q}{r}$$

dove h è una costante che dipende dalle unità di misura usate. Ancora V è inversamente proporzionale alla distanza tra P e Q .

Legge della proporzionalità inversa

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

Al variare di k (che consideriamo positivo) si ottiene una famiglia di iperboli equilateri



$$y = \frac{k_1}{x}$$

$$y = \frac{k_2}{x}$$

$$y = \frac{k_3}{x}$$

$$k_1 \leq k_2 \leq k_3$$

3. Superficie e volume di una sfera in funzione del raggio

Per una sfera di raggio r , superficie e volume sono assegnati dalle formule seguenti:

$$S = 4\pi r^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

cioè la superficie è proporzionale al quadrato del raggio, mentre il volume è proporzionale al suo cubo.

4. Indice di massa corporeo

L'indice di massa corporea (IMC) è un indice biometrico usato per determinare se un individuo ha peso vicino a quello considerato normale. Se indichiamo con p il peso in chilogrammi di un individuo e con h la sua altezza misurata in metri, si ha

$$IMC = \frac{p}{h^2}$$

Secondo l' OMS

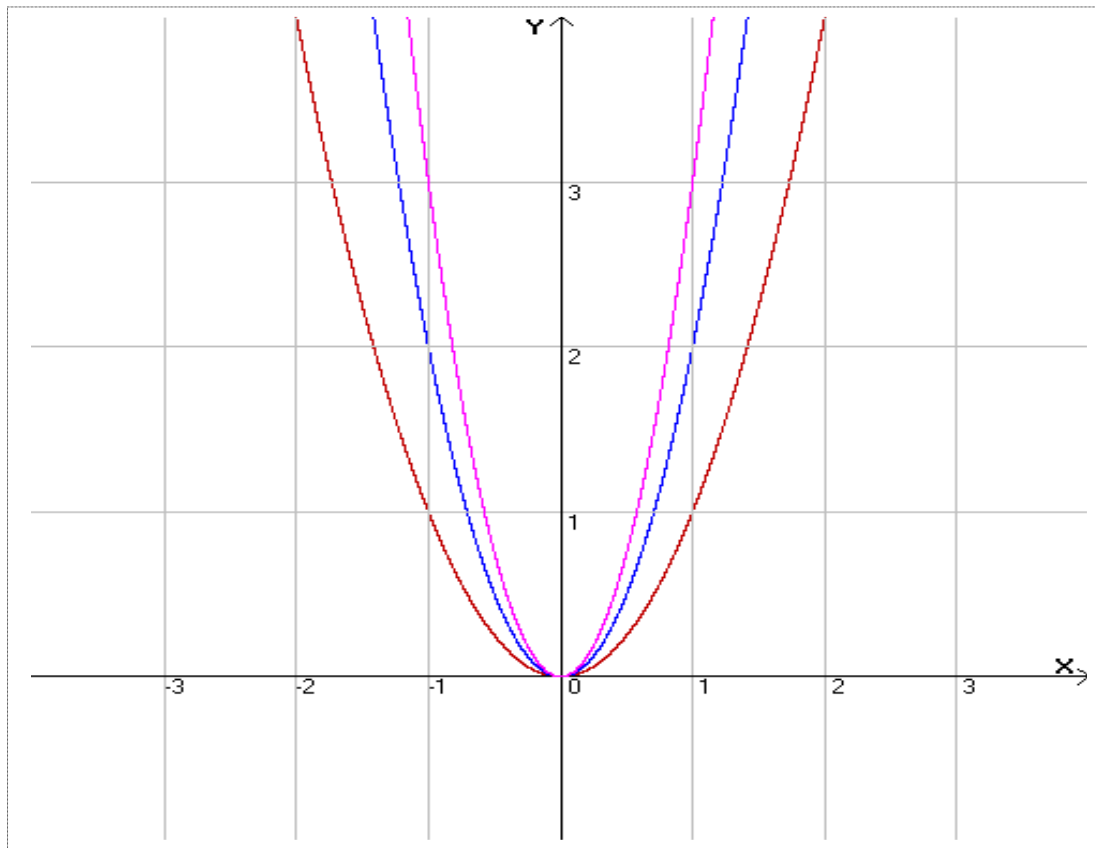
IMC > 30	obeso
IMC < 18.5	sottopeso
IMC < 16	gravemente magri

Calcolare l' IMC di un individuo alto 1.80 m di 95 Kg di peso.
 Quanto vale l' IMC di un individuo più alto del 5% e più pesante del 10%?

Legge della proporzionalità quadratica

$$f(x) = kx^2$$

Al variare di k (che consideriamo positivo) si ottiene una famiglia di parabole con vertice nell'origine.



$$y = k_1 x^2$$

$$y = k_2 x^2$$

$$y = k_3 x^2$$

$$k_1 \leq k_2 \leq k_3$$