Relazioni fondamentali fra le diverse funzioni trigonometriche di uno stesso arco orientato:

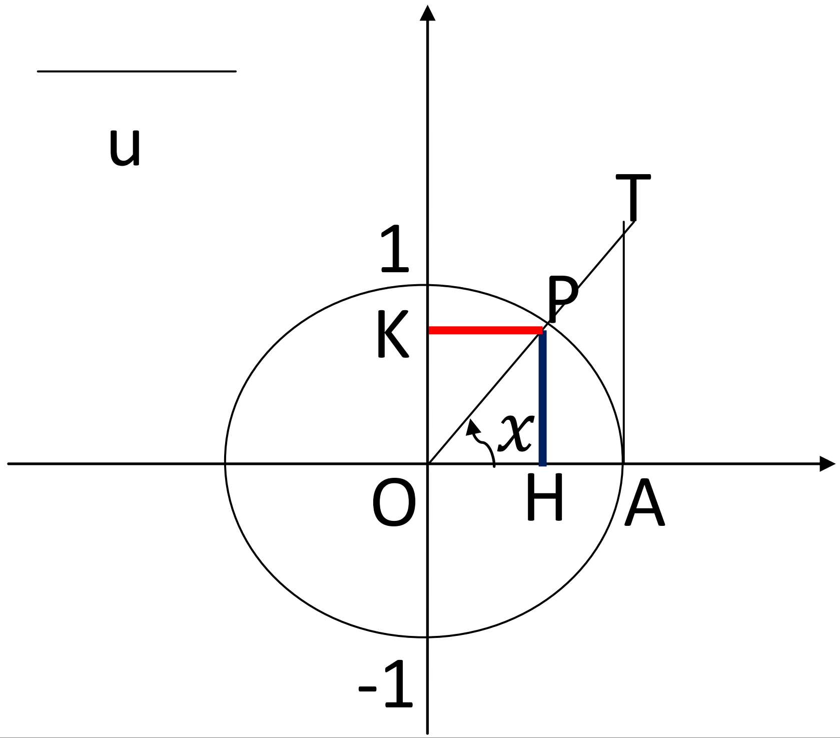
Tra le funzioni trigonometriche viste intercorrono le seguenti relazioni:

u

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

(teorema di Pitagora)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0$$



Si può inoltre dimostrare che $\tan x$ è l' ordinata del punto T di intersezione tra la tangente geometrica alla circonferenza nel punto A e la semiretta OT.

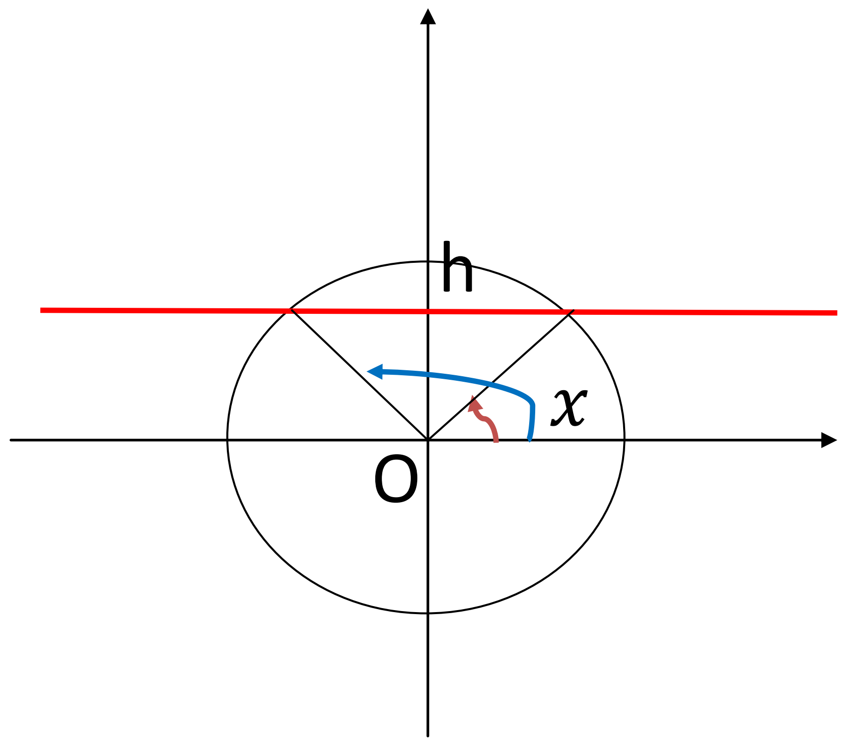
RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

PRIMO GRADO

- $\sin x = h$

Ricordando la definizione della funzione $\sin x$, questa equazione si risolve intersecando la circonferenza goniometrica con la retta di equazione

$$y = h, -1 \leq h \leq 1.$$



ESEMPIO 1.

Risolvere la seguente equazione: $\sin x = \frac{1}{2}$

Questa equazione può essere risolta intersecando la circonferenza goniometrica con la retta $y = \frac{1}{2}$.

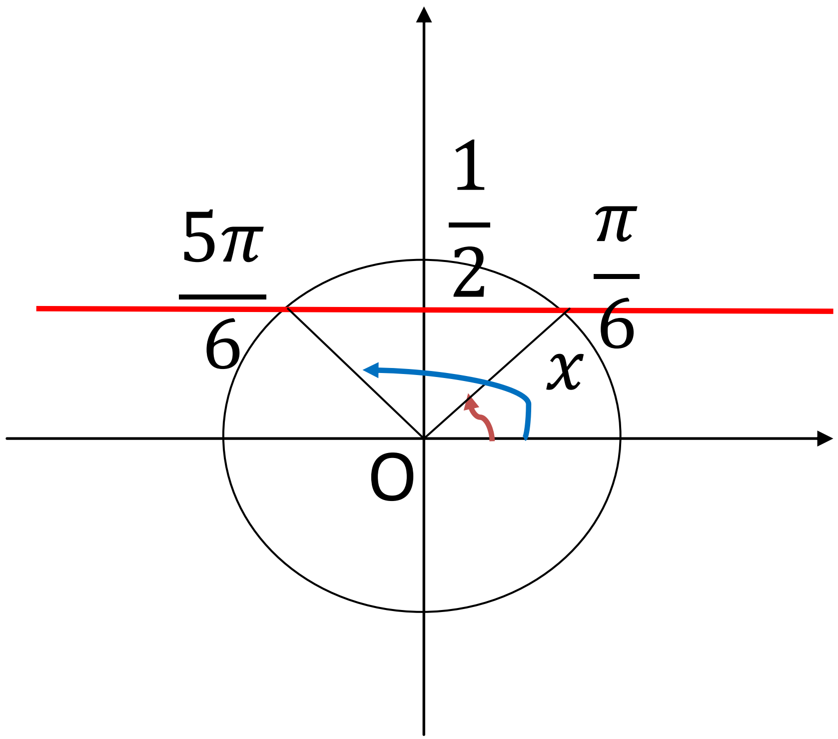
I punti di intersezione sono:

$$x = \frac{\pi}{6}, x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Ricordando che la funzione seno è periodica di periodo 2π :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$$



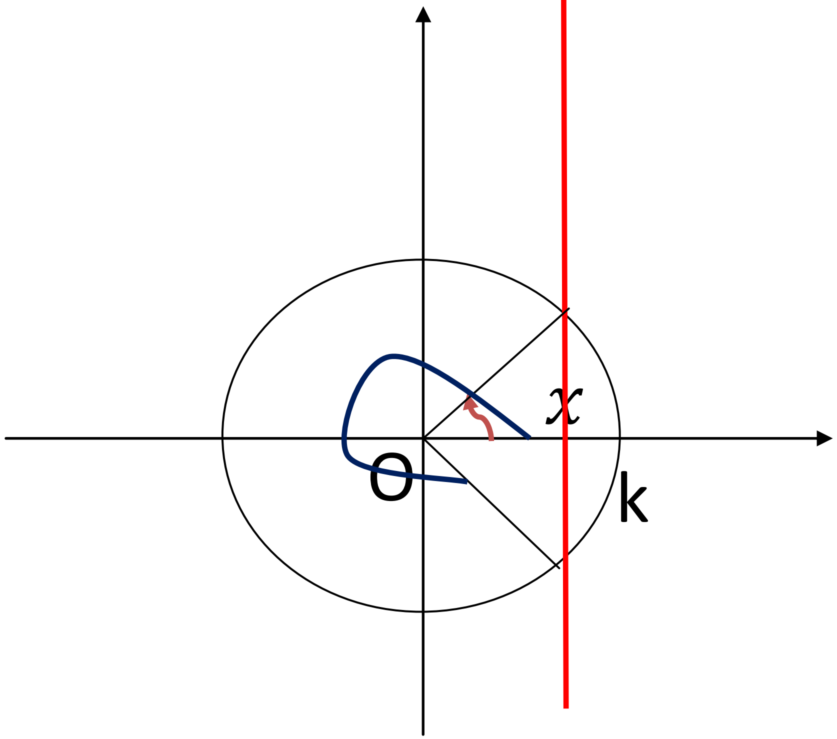
RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

PRIMO GRADO

- $\cos x = k$

Ricordando la definizione della funzione $\cos x$, questa equazione si risolve intersecando la circonferenza goniometrica con la retta di equazione

$$x = k, -1 \leq k \leq 1.$$



ESEMPIO 2.

Risolvere la seguente equazione: $\cos x = -\frac{1}{2}$

Questa equazione può essere risolta intersecando la circonferenza goniometrica con la retta $x = -\frac{1}{2}$.

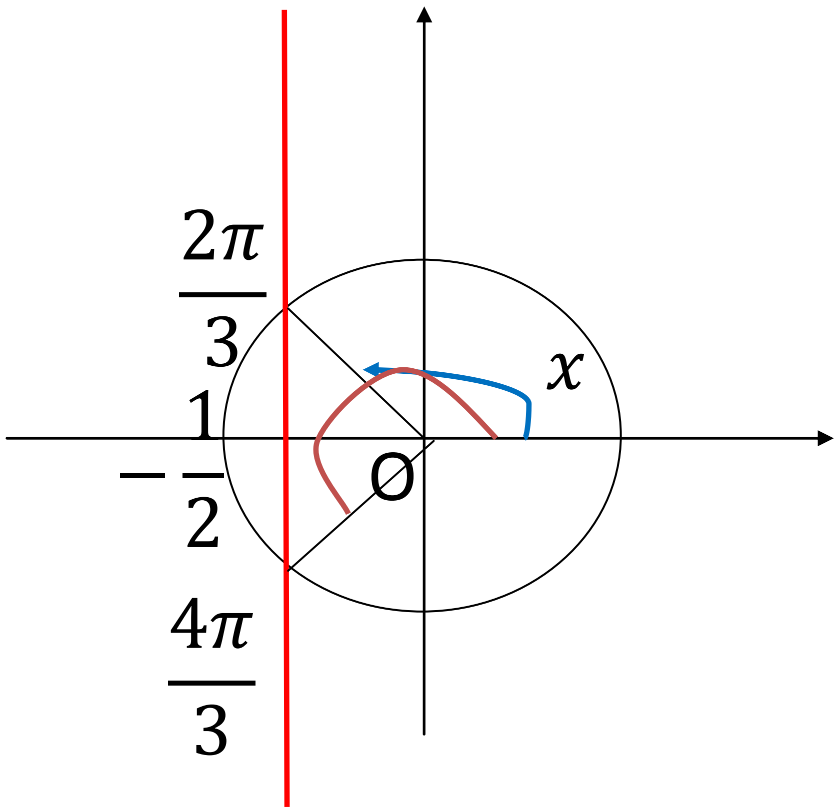
I punti di intersezione sono:

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},\ x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Ricordando che la funzione coseno è periodica di periodo 2π :

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$$

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$$



Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni trigonometriche:

1. $\cos x = 1$

2. $\sin x = 1$

3. $\sin x = -1$

4. $\cos x = -1$

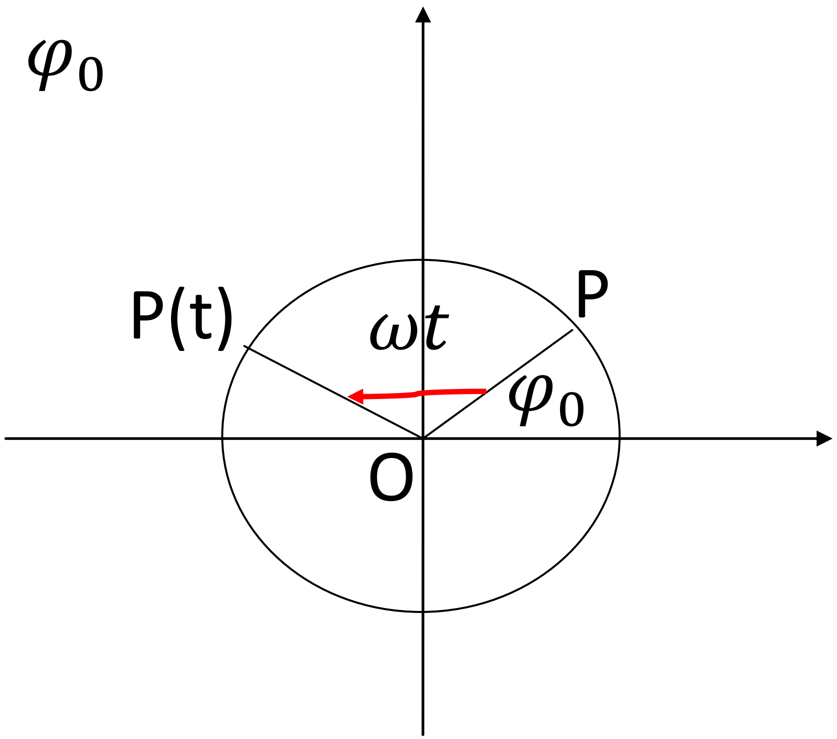
5. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

MODELLI TRIGONOMETRICI
Moto circolare uniforme e moto armonico

Consideriamo un punto P che percorre di moto circolare uniforme una circonferenza di centro O e raggio A con velocità angolare costante ω. Supponiamo inoltre che al tempo t = 0 l'angolo φ che il raggio forma con la direzione positiva dell'asse x valga $\varphi(0) = \varphi_0$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$$



Il tempo T che P impiega per tornare, dopo un giro, al valore di partenza φ_0 è il periodo del moto, quindi:

$$\varphi(T) = \varphi_0 + 2\pi = \varphi_0 + \omega T$$

da cui

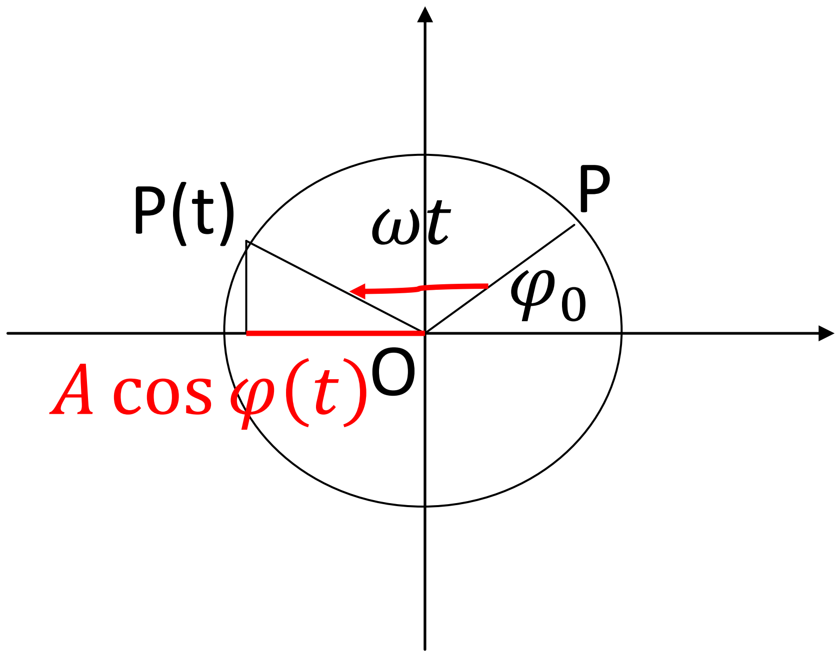
$$2\pi = \omega T \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Moto armonico

L'ascissa del punto P in funzione del tempo è descritta dalla seguente funzione

$$x(t) = A\cos\varphi(t) = A\cos(\varphi_0 + \omega t)$$

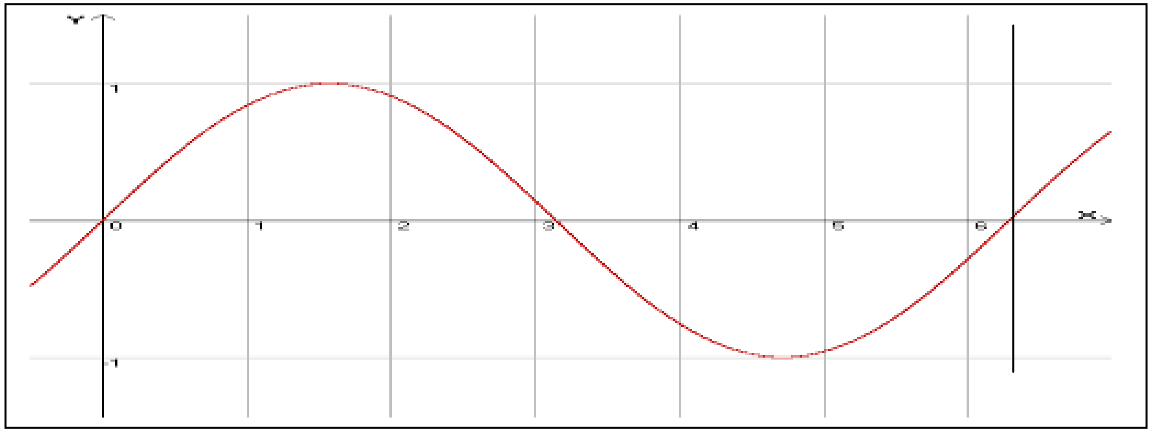
Il moto armonico descrive le oscillazioni periodiche di periodo T dell'ascissa del punto P intorno al valore $x = 0$.



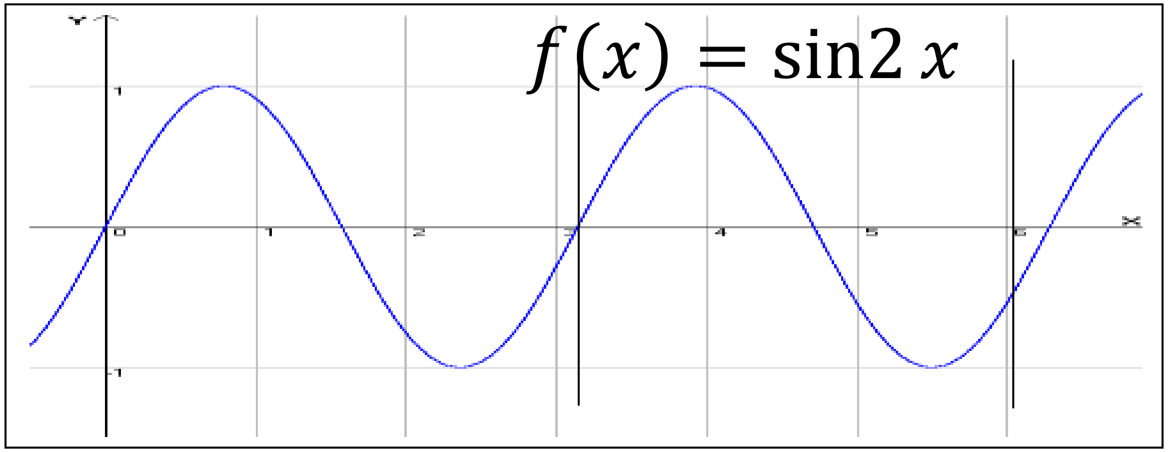
Questa legge oraria descrive:

- la posizione $x(t)$ di un punto materiale di massa m richiamato nell'origine da una molla di costante elastica k (con pulsazione $\omega = \sqrt{k/m}$)
- le oscillazioni, sufficientemente piccole, di un pendolo intorno alla verticale (con pulsazione $\omega = \sqrt{g/l}$)

$$\varphi(t) \text{ fase dell'oscillazione}$$
$$\omega \text{ frequenza angolare o pulsazione}$$
$$A \text{ ampiezza dell'oscillazione}$$

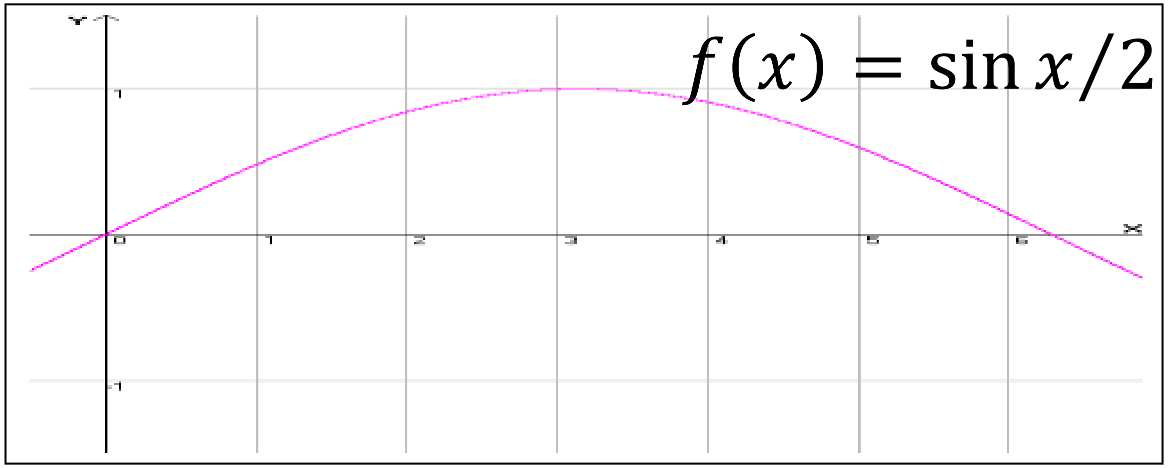


$T = 2\pi$



$f(x) = \sin 2x$

$T = \pi$



$f(x) = \sin x/2$

$T = 4\pi$

Esercizi

Determiniamo il periodo T, l'ampiezza delle oscillazioni, l'intersezione del grafico con gli assi, le coordinate dei punti di massimo e di minimo delle seguenti funzioni periodiche:

a) $f(x) = \sin 2x$

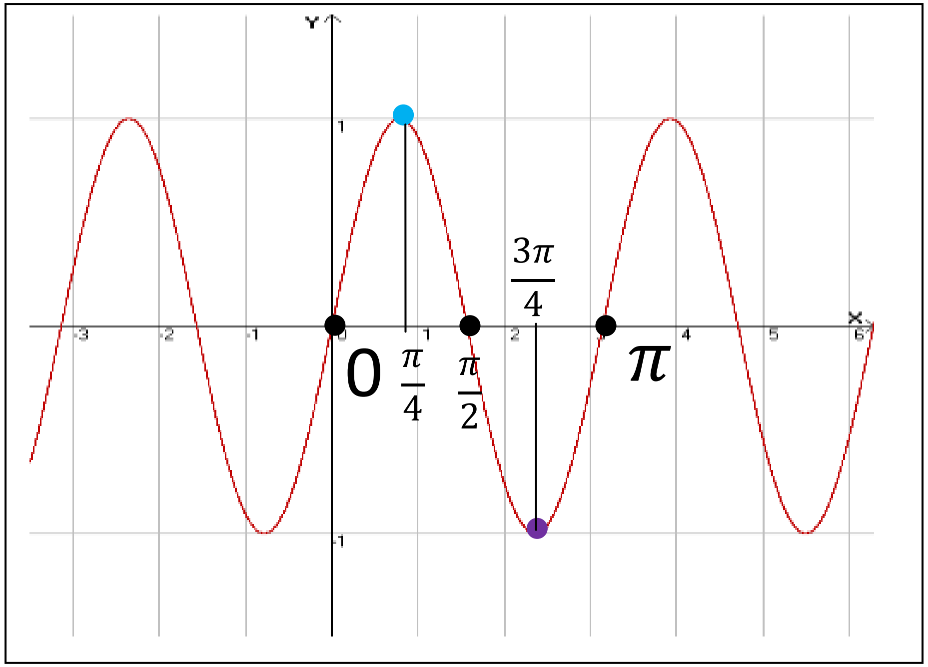
$$A = 1, T = \pi$$

$$O = (0,0)\ e\ P(\pi/2\,,0)$$

$$x = k\pi\ e\ x = \pi/2 + k\pi, k \in Z$$

$$\max f = 1\ e\ \min f = -1$$

$$x = \frac{\pi}{4}\ e\ x = \frac{3}{4}\pi$$



b) $f(x) = 3\cos(x/2 - \pi/4)$

$$A = 3, \omega = 1/2$$

$$\varphi_0 = -\pi/4 \; T = 4\pi$$

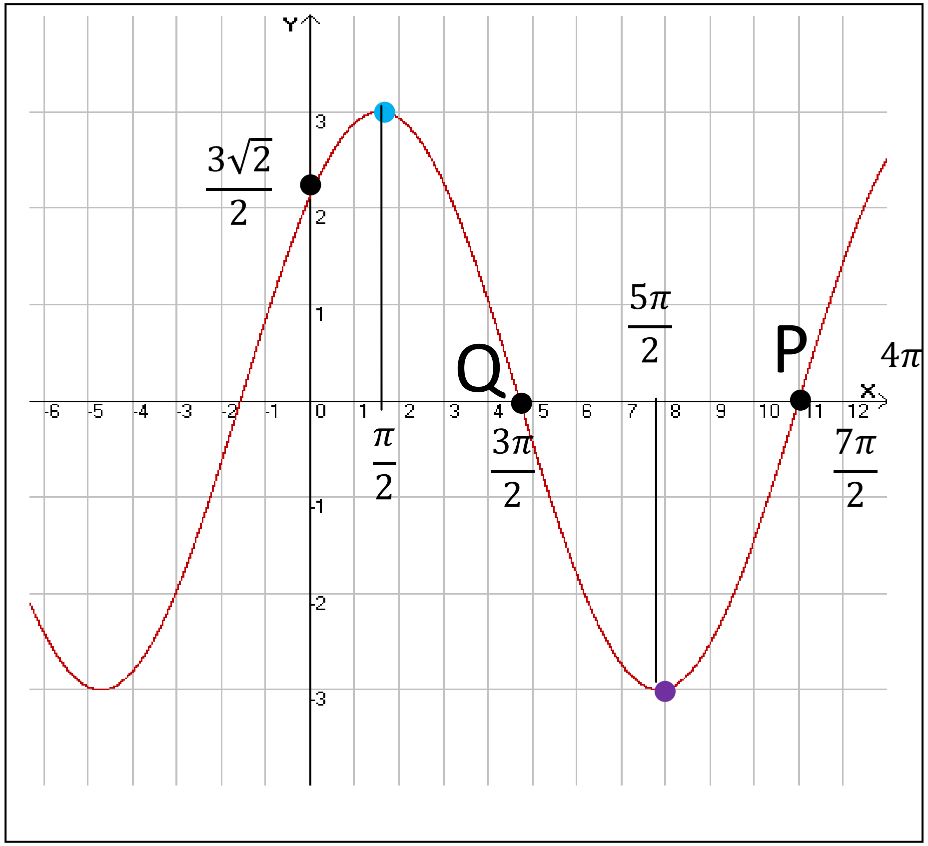
$$Q = (0, 3\pi/2), P(7\pi/2, 0)$$

$$x = 3\pi/2 + 4k\pi \; e$$

$$x = 7\pi/2 + 4k\pi, k \in Z$$

$$\max f = 3 \; e \; \min f = -3$$

$$x = \frac{\pi}{2} \; e \; x = \frac{5}{2}\pi$$



Altre funzioni periodiche

Analizziamo la periodicità delle seguenti funzioni

a) $f(x) = 3\sin x + 2\cos\frac{x}{4} \Longrightarrow T = 8\pi$

(${\sin x}$ è periodica di periodo 2π, $\cos\frac{x}{4}$ è periodica di periodo 8π)

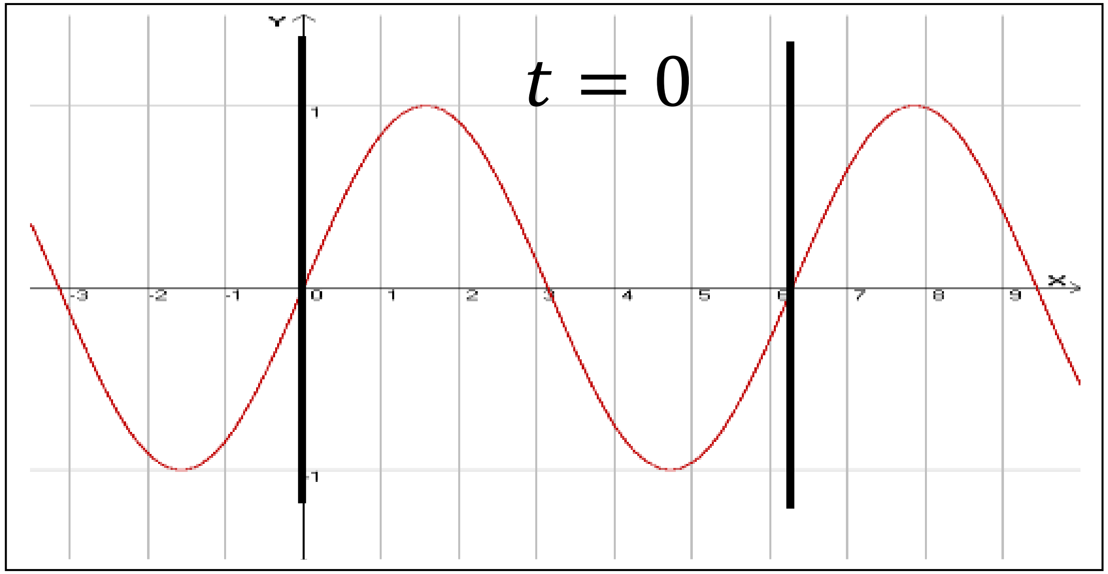
b) $f(x) = (\sin x + 4)(10 + \cos x) \Longrightarrow T = 2\pi$

c) $f(x) = 3 + 2\sqrt{4 - \sin x} \Longrightarrow T = 2\pi$

d) $f(x) = 3x + \sin x \Longrightarrow \nexists T$

La propagazione delle onde

In uno stesso fenomeno possono essere presenti periodicità spaziali e temporali contemporaneamente.
Un' onda sonora o un' onda del mare sono perturbazioni rispetto allo stato di quiete del mezzo in cui l' onda si propaga.
Se consideriamo un istante di tempo fissato, queste perturbazioni hanno, in genere, una precisa periodicità spaziale.



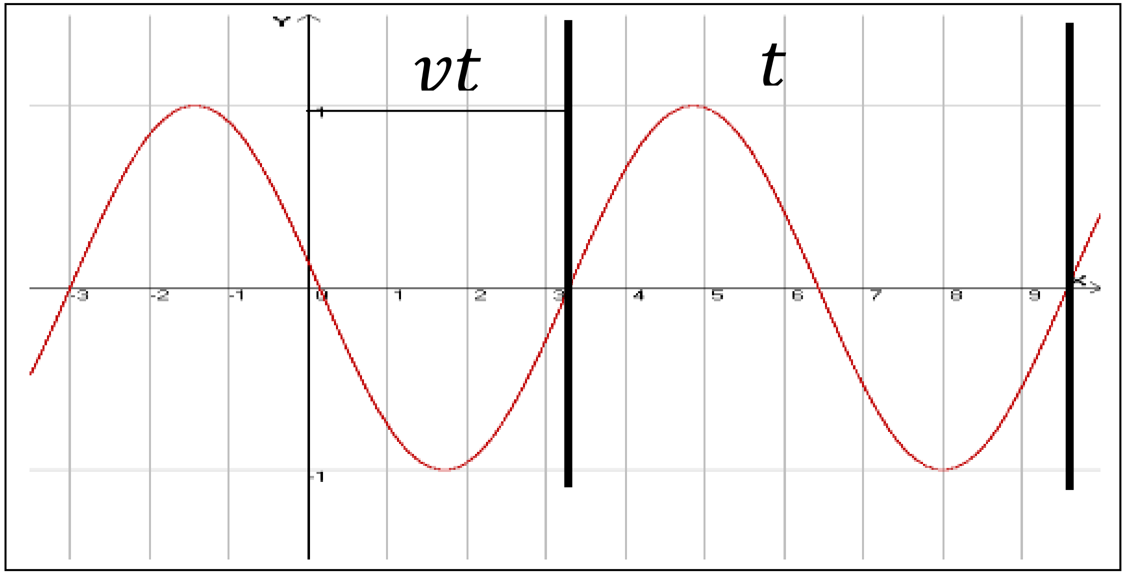
$$P(x) = A\sin(kx), k \in R$$

periodica spazialmente

$$\lambda = 2\pi/k$$

λ *lunghezza d'onda*

k *numero d'onda*



$$P(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

$$\omega = kv$$

periodica temp. e spaz.

$$T = 2\pi/\omega, \lambda = 2\pi/k$$

$$v = \lambda/T$$