

FUNZIONE LOGARITMO

$$f(x) = \log_a x, a \in R \text{ fissato}, a > 0, a \neq 1$$

$$f: x \in (0, +\infty) \rightarrow \log_a x \in R$$

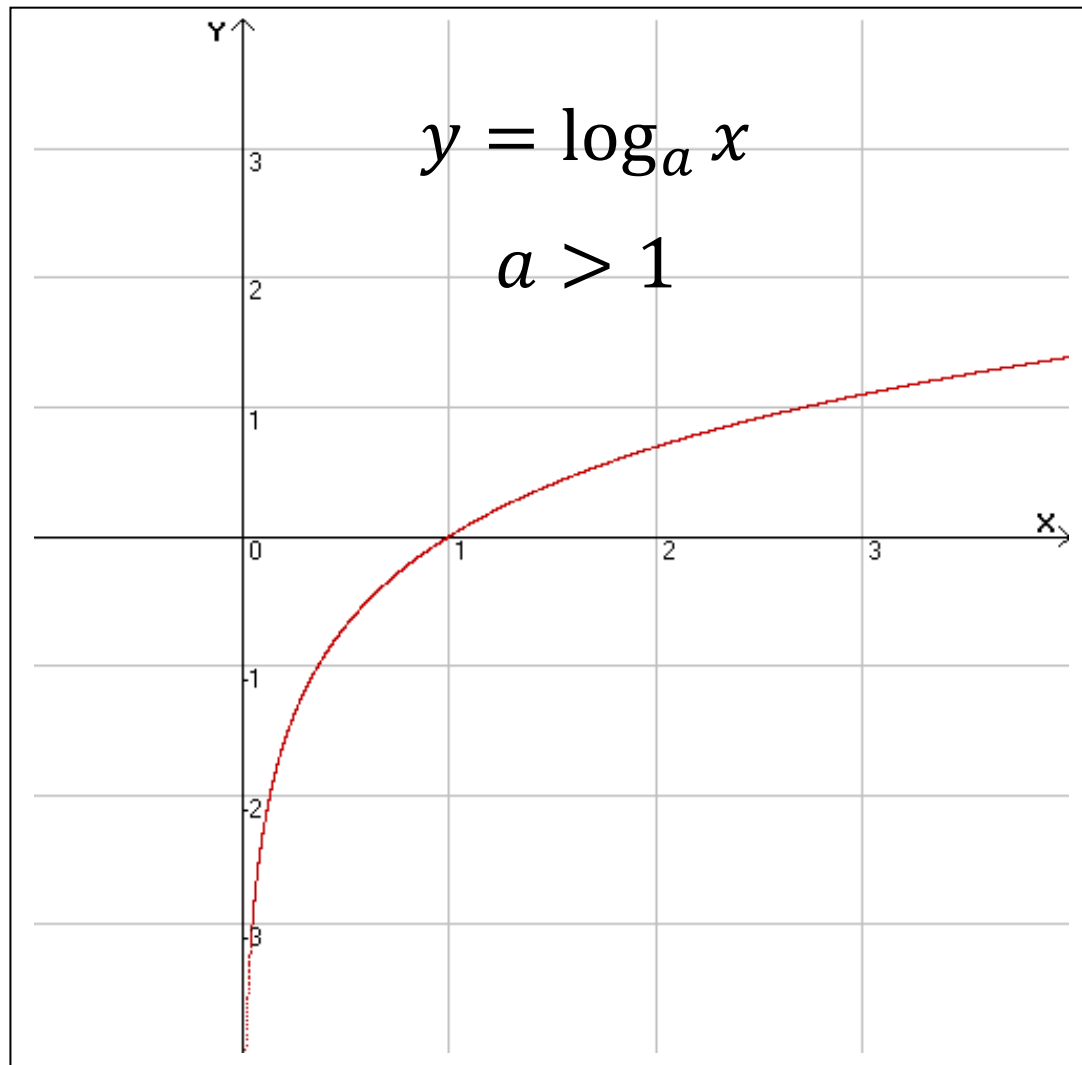
a è la **base** della funzione logaritmo ed è una costante positiva fissata e diversa da 1

x è l'**argomento** della funzione logaritmo e varia nel dominio

Funzione logaritmo con $a \in R, a > 1$

$$f: x \in (0, +\infty) \rightarrow \log_a x \in R$$

funzione inversa della funzione di $\log_a x$



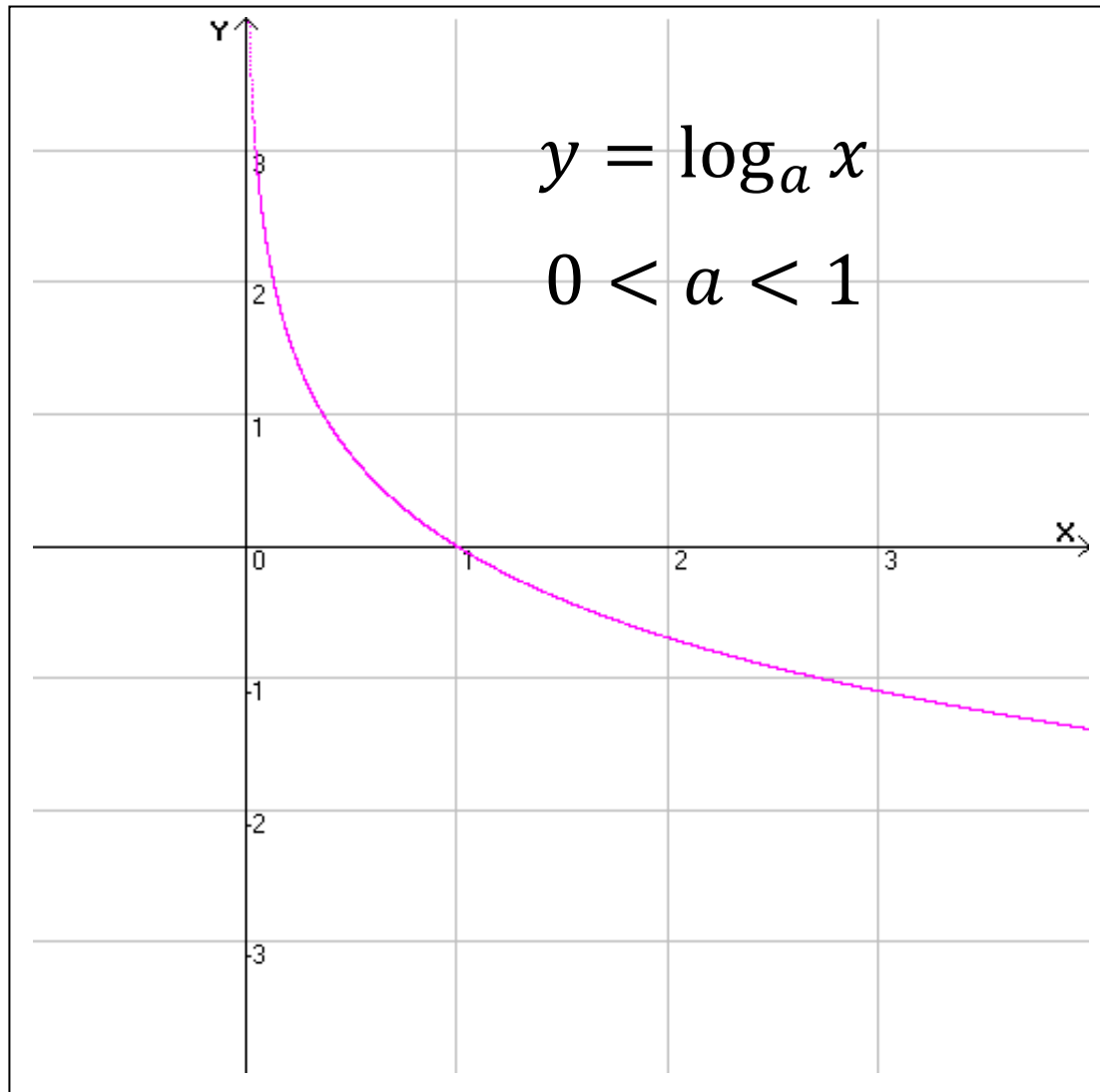
f strett. cresc. in $(0, +\infty)$

$$\sup \log_a x = +\infty; \inf \log_a x = -\infty$$

Funzione logaritmo con $a \in R, 0 < a < 1$

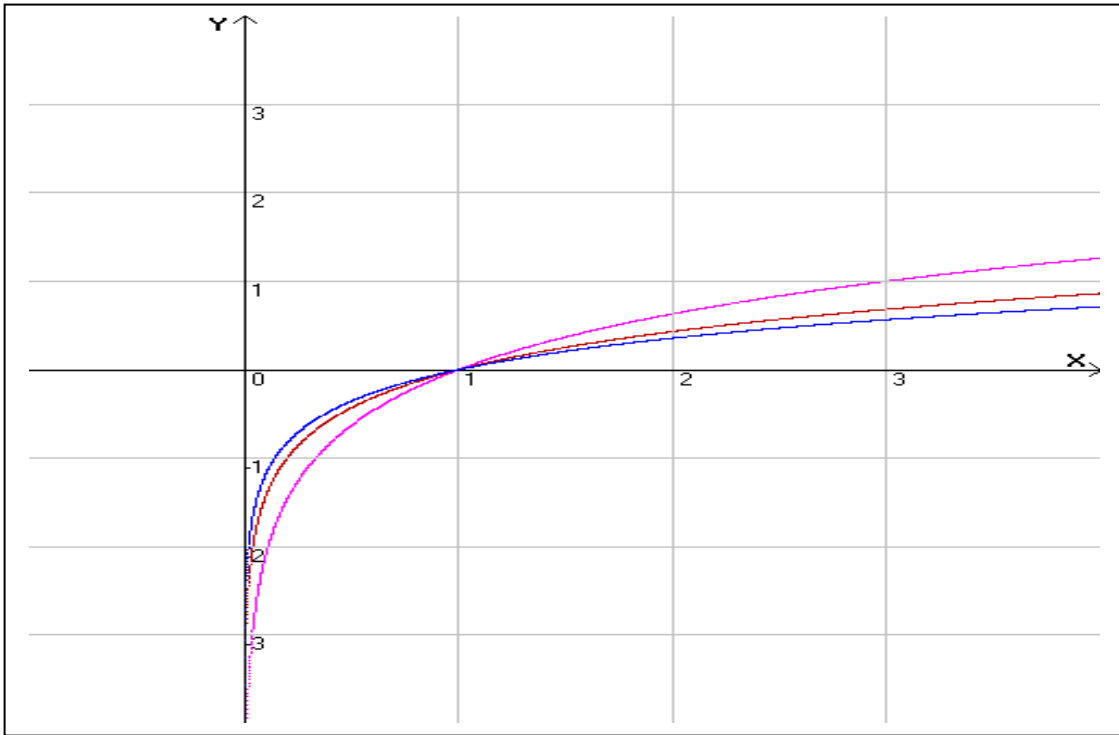
$$f: x \in (0, +\infty) \rightarrow \log_a x \in R$$

funzione inversa della funzione di $\log_a x$



f strett. decresc. in $(0, +\infty)$

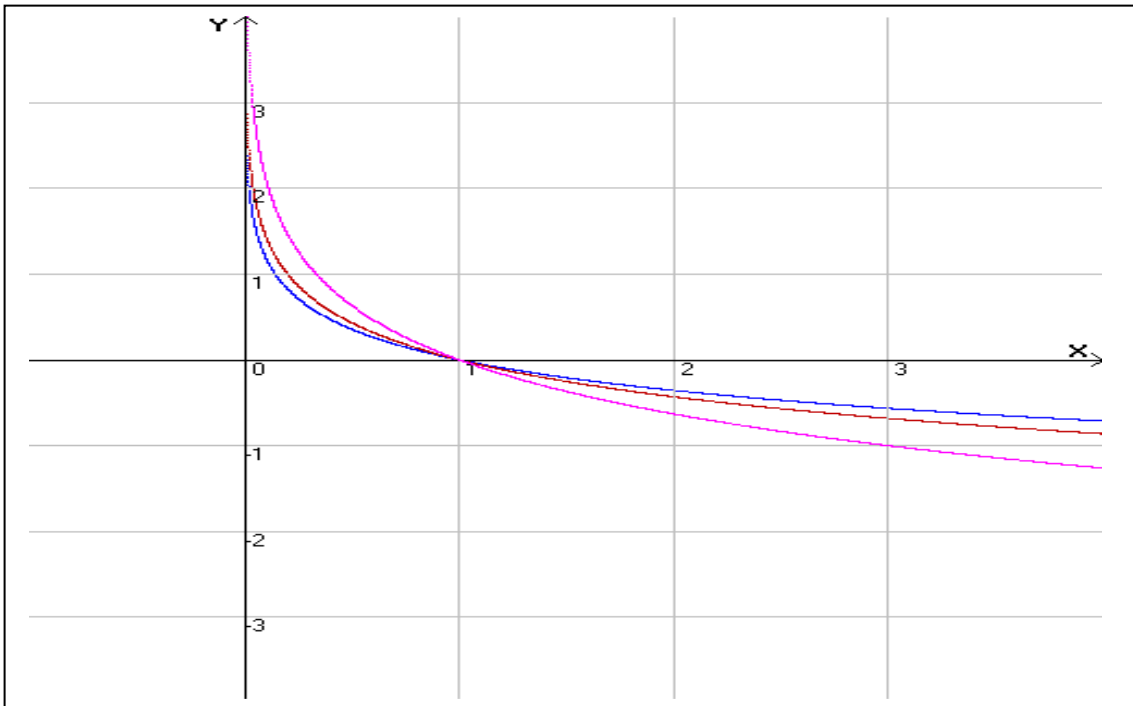
$$\sup \log_a x = +\infty; \inf \log_a x = -\infty$$



$$y = \log_3 x$$

$$y = \log_5 x$$

$$y = \log_7 x$$



$$y = \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$y = \log_{\frac{1}{5}} x$$

$$y = \log_{\frac{1}{7}} x$$

Una funzione logaritmo molto utilizzata è quella che ha per base il numero irrazionale

$$e = 2,7182\dots$$

detto numero di Nepero

$$f(x) = \log_e x = \ln x$$

è strettamente crescente perché

$$e > 1$$

$$x = \frac{1}{\ln T} \cdot \ln \frac{N}{A}$$

Esempio

Dopo quanti anni una popolazione di 100 individui, con un tasso di natalità di 2,5 aumenterà di 10 volte il numero dei propri individui?

$$A=100 \quad N=1000 \quad T=2,5$$

da cui il numero di anni cercato è

$$x = \frac{1}{\ln(2,5)} \ln \left(\frac{1000}{100} \right) = \frac{1}{\ln(2,5)} \ln(10) = 2,512941 \dots \cong 2,5$$

3) Data una popolazione di A individui, sapendo che il numero di individui dopo n anni diventa pari a N , se ne determini il tasso di crescita.

Dati del problema: A , n , N (parametri)

Valore incognito da determinare:

$x =$ tasso di crescita (incognita)

Relazione funzionale fra le grandezze considerate

$$N = A \cdot X^n$$

OSSERVAZIONE: Contrariamente al problema 1), in questo caso il valore dell'incognita non compare esplicitamente nella

relazione. Occorre dunque ricavarlo $\frac{N}{A} = X^n; X = \sqrt[n]{\frac{N}{A}}$

$$X = \sqrt[n]{\frac{N}{A}}$$

Esempio

Sapendo che una popolazione di 100 individui si raddoppia in tre anni, se ne determini il tasso di natalità.

$$A=100 \quad N=200 \quad n=3$$

Il tasso di natalità è dunque

$$X = \sqrt[3]{\frac{200}{100}} = \sqrt[3]{2} = 2,599207587 \dots \cong 2,6$$

4) Se due popolazioni hanno differente tasso di natalità, è possibile stabilire se e quando esse avranno lo stesso numero di individui?

Si supponga che le due popolazioni contino inizialmente A e B individui con tassi di crescita T_A e T_B rispettivamente, allora le curve di crescita per le due popolazioni avranno equazione rispettivamente

$$a = A(T_A)^x \text{ e } b = B(T_B)^x$$

Quindi, le due popolazioni avranno lo stesso numero di individui ad un ipotetico tempo x se e solo se si verificherà la

condizione $A(T_A)^x = B(T_B)^x$ e quindi $x = \frac{\ln \frac{A}{B}}{\ln \frac{T_B}{T_A}}$

Esempio

$$A=100, B=200, T_A=4 \text{ e } T_B=2.$$

Occorre risolvere l'equazione $100 \cdot 4^x = 200 \cdot 2^x$

$$100 \cdot 2^{2x} = 200 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x = 0$$

Posto $2^x = z$ occorre risolvere

$$z^2 - 2z = 0 \quad (z_1 = 0, z_2 = 2)$$

$$z_1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 0 \text{ nessuna soluzione}$$

$$z_2 = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Le due popolazioni avranno lo stesso numero di individui dopo un anno

Esercizio 1

Si supponga che due popolazioni continuo inizialmente lo stesso numero di individui, e che la prima abbia un tasso di crescita pari a 1,5, la seconda un tasso di crescita pari a 2. Dopo quanto tempo la seconda popolazione sarà il doppio della prima?

Esercizio 2

Si supponga che due popolazioni continuo inizialmente 180 e 200 individui, e che la prima abbia un tasso di crescita pari a 1,5, la seconda un tasso di crescita pari a 2. Se e quando le due popolazioni avranno lo stesso numero di individui?

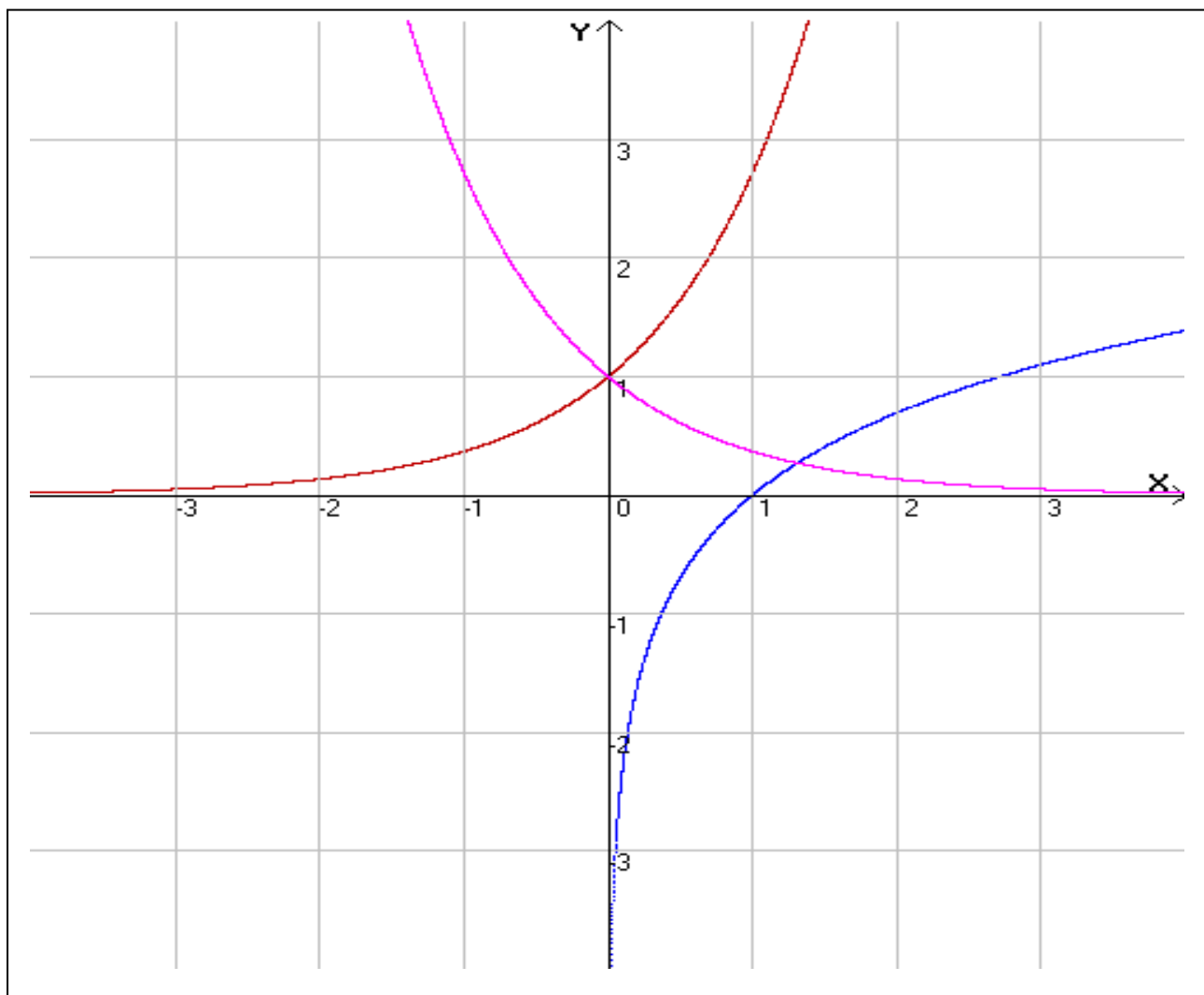
Differenze fra reciproca di una funzione e funzione inversa

Si definisce **reciproca di una funzione** la funzione che moltiplicata con quella di partenza mi dà come risultato 1

data la funzione $y = a^x$ la reciproca della funzione è $y = \frac{1}{a^x}$

Invece la **funzione inversa** di una funzione data è quella che si ottiene scambiando fra loro dominio e codominio (in pratica scambiando la x con la y)

data la funzione $y = a^x$ la funzione inversa è $y = \log_a x$



$$y = e^x$$
$$y = \frac{1}{e^x}$$
$$y = \ln x$$

Abbiamo detto che la funzione logaritmo è l'inversa della funzione esponenziale (e viceversa). Quindi, affermare che $y = \log_a x$ equivale a dire che y è l'esponente da dare alla base a del logaritmo per avere l'argomento x ossia

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Esempi

$$\log_e 1 = \log 1 = \ln 1 = 0$$

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_4 2 = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 \frac{1}{3} = -1$$

$$\log_{10} 0 = \nexists$$

$$a^{\log_a x} = x \quad e \quad \log_a a^x = x$$

Esempi

$$\log_e e^x = x$$

$$\log_2 2^{3x} = 3x$$

$$\log_4 4^{x^2} = x^2$$

$$3^{\log_3 2x} = 2x$$

$$\frac{1}{2}^{\log_{\frac{1}{2}} x} = x$$

Proprietà della funzione logaritmo

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \forall x > 0, y > 0; a > 0 \text{ e } a \neq 1$

2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \forall x > 0, y > 0; a > 0 \text{ e } a \neq 1$

3. $\log_a x^b = b \log_a x \quad \forall x > 0, b \in R; a > 0 \text{ e } a \neq 1$

4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad \forall x > 0; a, b > 0 \text{ e } \neq 1$

(formula per il cambiamento di base)

5. $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x \quad \forall x > 0; a > 0 \text{ e } a \neq 1$

Esercizi

Usando le proprietà dei logaritmi calcolare

$$\log_2 8 =$$

$$\log_{0.5} 2 =$$

$$\log_3 1 =$$

$$\log_4 4 =$$

$$\log_3 \frac{1}{27} =$$

$$\log_a a =$$

$$\log_{10} 0.1 =$$

$$\log_{\frac{5}{2}} 1 =$$

$$\log_5 \sqrt[3]{25} =$$

Trasformare le seguenti espressioni in un solo logaritmo

$$2 \log_3 x - 3 \log_3 y + \frac{1}{3} \log_3 z \text{ con } x, y, z > 0$$

$$3(\log x - 2 \log y + 1) - \log(x + y) \text{ con } x, y > 0$$

Trasformare la seguente espressione in somme algebriche

$$\log \frac{xz^3}{\sqrt[4]{y^5}} \text{ con } x, y, z > 0$$

Disequazioni esponenziali e logaritmiche

1. Risolvere una disequazione del tipo:

$$3^x - 2 > 0 \Leftrightarrow 3^x > 2$$

applicando la funzione logaritmo in base 3 ad ambo i membri (strettamente crescente)

$$\log_3 3^x > \log_3 2 \Leftrightarrow x > \log_3 2$$

2. Risolvere una disequazione del tipo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 5 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > 5$$

applicando la funzione logaritmo in base $\frac{1}{2}$ ad ambo i membri
(strettamente decrescente)

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x < \log_{\frac{1}{2}} 5 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{1}{2}} 5$$

3. Risolvere una disequazione del tipo:

$$\log_3 x - 2 > 0 \Leftrightarrow \log_3 x > 2$$

applicando la funzione esponenziale in base 3 ad ambo i membri (strettamente crescente)

$$3^{\log_3 x} > 3^2 \Leftrightarrow x > 9$$

3. Risolvere una disequazione del tipo:

$$\log_{\frac{1}{3}} x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x \leq 3$$

applicando la funzione esponenziale in base $\frac{1}{3}$ ad ambo i membri (strettamente decrescente)

$$\frac{1}{3}^{\log_{\frac{1}{3}} x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{27}$$

Esempi

1. $3^x = 9 \Leftrightarrow \log_3 3^x = \log_3 9 \Leftrightarrow x = \log_3 3^2 \Leftrightarrow x = 2$
2. $2^x < 8 \Leftrightarrow \log_2 2^x < \log_2 8 \Leftrightarrow x < \log_2 2^3 \Leftrightarrow x < 3$
3. $5^{x-1} < 1 \Leftrightarrow \log_5 5^{x-1} < \log_5 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$
4. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^x = \log_{\frac{1}{3}} 27 \Leftrightarrow x = -3$
5. $\left(\frac{2}{7}\right)^x \geq 3 \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{7}} \left(\frac{2}{7}\right)^x \leq \log_{\frac{2}{7}} 3 \Leftrightarrow x \leq \log_{\frac{2}{7}} 3$
6. $(0,5)^{x^2-1} \leq 2 \Leftrightarrow \log_{0,5} (0,5)^{x^2-1} \geq \log_{0,5} 2 \Leftrightarrow$
 $x^2 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0 \forall x \in R$
7. $(0,5)^{x+1} \leq 4 \Leftrightarrow \log_{0,5} (0,5)^{x+1} \geq \log_{0,5} 4 = -2 \Leftrightarrow$
 $x + 1 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -3$

$$8. \quad 2^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{-(-x+1)} \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{x-1}$$

$$x + 1 = x - 1 \Leftrightarrow 1 = -1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$9. \quad 3^{x^2+2} = 7 \Leftrightarrow x^2 + 2 = \log_3 7 \Leftrightarrow x^2 = \log_3 7 - 2 < 0$$

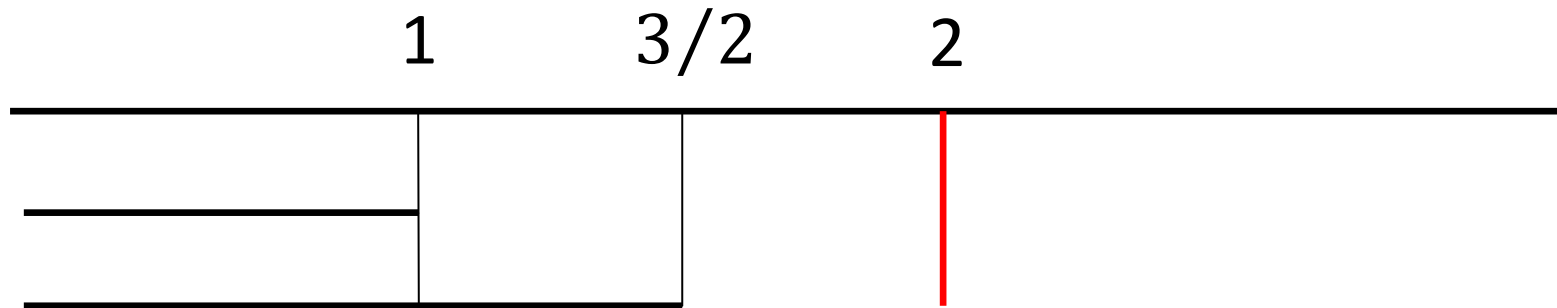
$$x \in \emptyset$$

$$10. \quad 3^{x^2-1} = 7 \Leftrightarrow x^2 - 1 = \log_3 7 \Leftrightarrow x^2 = \log_3 7 + 1 > 0$$

$$x = \pm\sqrt{\log_3 7 + 1}$$

$$11. \log_2(1-x) = \log_2(3-2x) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = 3-2x \\ 1-x > 0 \\ 3-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x < 1 \\ x < 3/2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$



insieme x ammissibili

$$12. \log_4 x = \log_2(x - 1) \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \log_2(x - 1)$$

$$\log_2 x = 2 \log_2(x - 1) \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2(x - 1)^2$$

$$\begin{cases} x = (x - 1)^2 \\ x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 - 3x = 0 \\ x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (3 \pm \sqrt{5})/2 \\ x > 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$0 \quad (3 - \sqrt{5})/2 \quad 1 \quad (3 + \sqrt{5})/2$$



$$x = (3 + \sqrt{5})/2$$

insieme x ammissibili

Si risolvano le equazioni:

$$\log_4 x = \log_2(x - 1)$$

$$\log_2 x = \log_4(x - 1)$$

$$\log_{0,5} x = \log_2(x - 1)$$