

Perché il logaritmo è così importante?

Esempio 1.

(concentrazione di ioni di idrogeno in una soluzione, il **pH**)

Un sistema solido o liquido, costituito da due o più componenti, (sale disciolto nell'acqua), si chiama soluzione; la sostanza disciolta (sale) si chiama soluto, quella in cui il soluto è sciolto (acqua) si chiama solvente. La quantità del soluto contenuta nel solvente si chiama concentrazione, e in molti casi è misurata in grammo-molecole per litro.

Acidi e sali in soluzioni acquose formano ioni di idrogeno. La concentrazione di questi ioni nella soluzione, permette di quantificarne il grado di acidità o alcalinità.

Il punto di riferimento è l'acqua pura a 25° C, nella quale si hanno $10^{-7} \text{ mol l}^{-1}$ di ioni mentre

- concentrazione compresa tra 10^{-2} e 10^{-7} : soluzioni acide
- concentrazione minore di 10^{-7} : soluzioni basiche o alcaline
- concentrazione uguale a 10^{-7} : soluzioni neutre

Vista la grande variabilità delle concentrazioni, è conveniente analizzare come misura l'esponente della concentrazione stessa. Quindi

Definizione: il pH, o "indice di ioni idrogeno", è il numero

$$pH = -\text{Log}[H^+]$$

dove $[H^+]$ è la concentrazione di ioni di idrogeno.

Soluzioni acide	$pH < 7$
Soluzioni neutre	$pH = 7$
Soluzioni basiche	$pH > 7$

N.B. pH (pioggia) = 6,5 pH (sangue) = 7,4

Differiscono di poco meno di una unità, ma se consideriamo la definizione scopriamo che si ha

$$[H^+] \text{ (pioggia)} = 10^{-6,5} \quad [H^+] \text{ (sangue)} = 10^{-7,4}$$

e il rapporto delle concentrazioni è

$$\frac{[H^+] \text{ (pioggia)}}{[H^+] \text{ (sangue)}} = 10^{0,9} \approx 8$$

ossia la concentrazione di ioni di idrogeno della pioggia è circa 8 volte quella del sangue.

Esempio 2.

La crescita veloce dei fenomeni esponenziali può rendere difficile una loro efficace rappresentazione grafica.

Crescita di batteri che triplicano il loro numero ogni giorno.

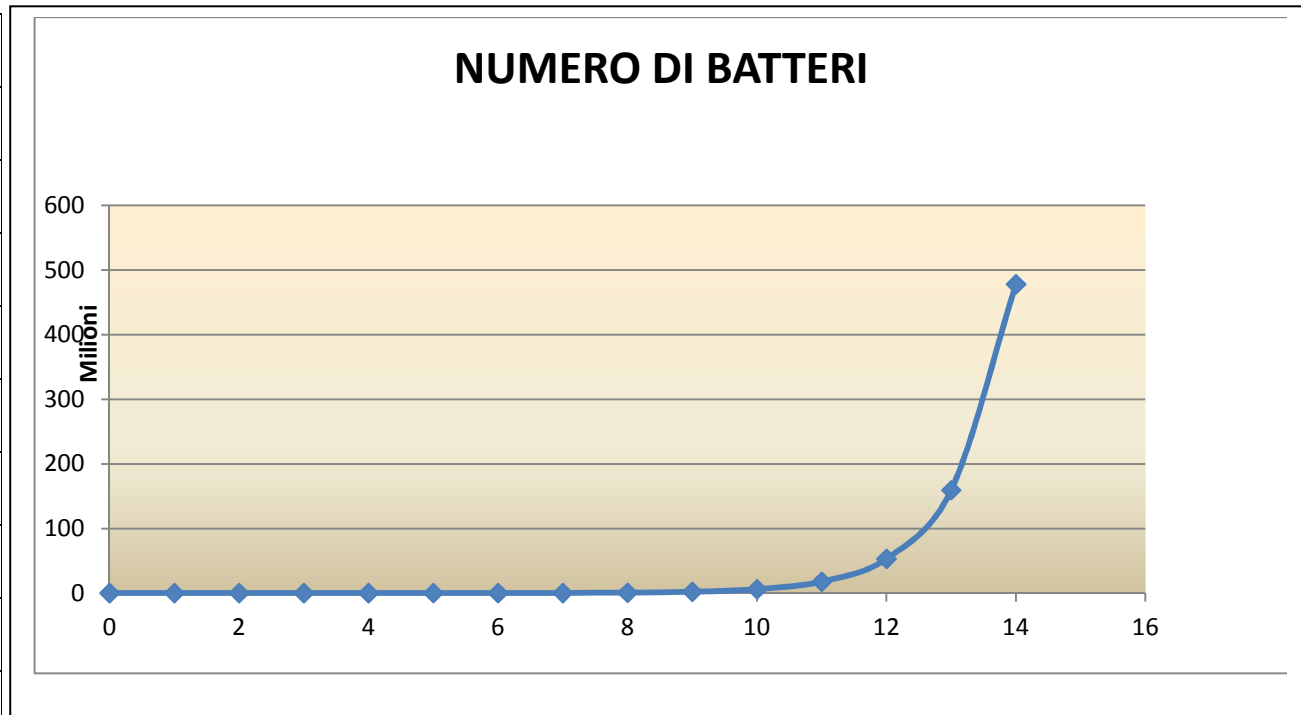


$$N(t) = 3^t N_0$$

Se l'unità delle ascisse è pari a quella delle ordinate, è praticamente impossibile visualizzare l'intero grafico della funzione perché i valori di $N(t)$ diventano troppo grandi

Una possibile soluzione è quella di adottare due scale diverse:
ad una unità sull'asse x corrispondono 100 unità sull'asse y.

GIORNO	NUMERO DI BATTERI
0	100
1	300
2	900
3	2700
4	8100
5	24300
6	72900
7	218700
8	656100
9	1968300
10	5904900
11	17714700
12	53144100
13	159432300
14	478296900



Abbiamo una rappresentazione significativa dei valori grandi di $N(t)$ ma perdiamo i dettagli della regione in cui $N(t)$ è piccolo (ad es. non si vede più il dato iniziale)

Sia che si scelga la prima opzione, sia che si scelga la seconda, **un fenomeno esponenziale non è complessivamente ben rappresentabile** in un grafico in tutti i suoi aspetti.

Un modo per superare questa difficoltà è quello di rappresentare il logaritmo della funzione ossia utilizzare un grafico in

SCALA LOGARITMICA

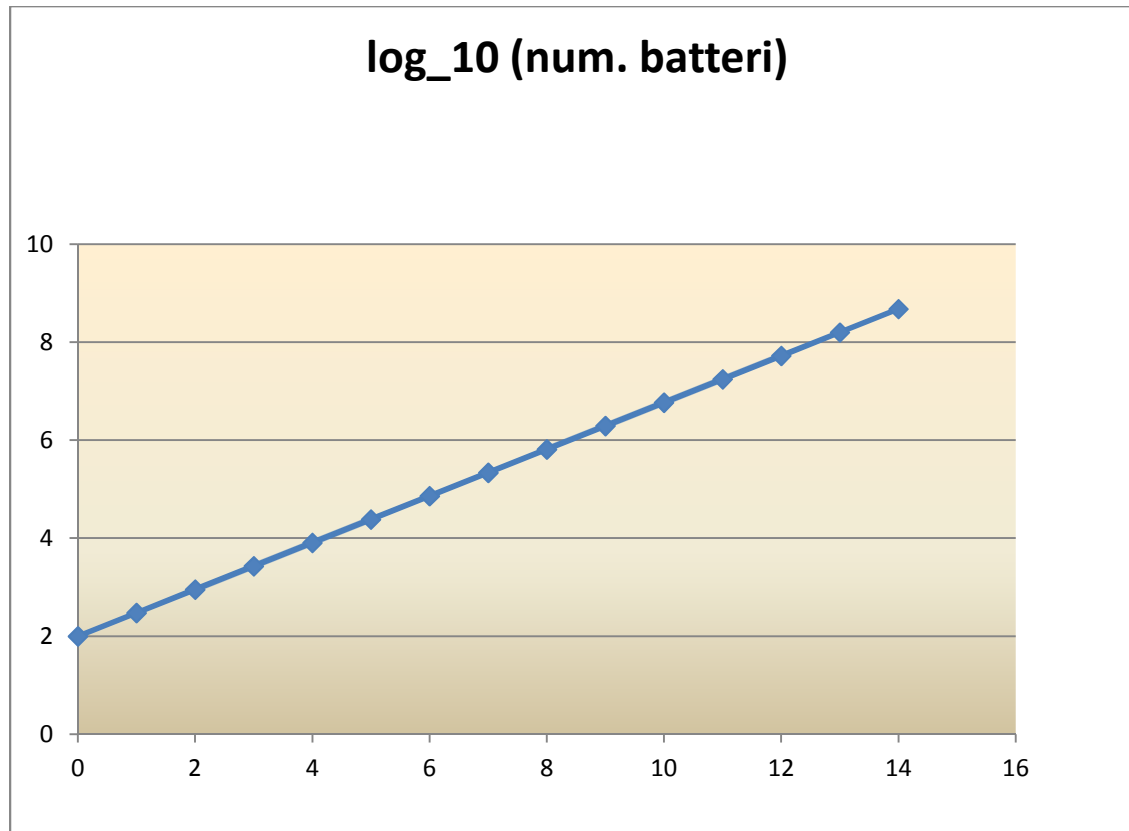
nel quale i dati vengono sostituiti dai loro logaritmi.

(il grafico fornisce un'idea dell'ordine di grandezza dei dati).

Nel caso di $N(t) = 3^t N_0$, calcolando il logaritmo in base 10 di entrambi i membri si ottiene

$$\log_{10} N(t) = t \log_{10} 3 + \log_{10} N_0$$

Se scegliamo $\log_{10} N$ come variabile dipendente il grafico diventa una linea retta di coefficiente angolare $\log_{10} 3$ e intercetta $\log_{10} N_0$.

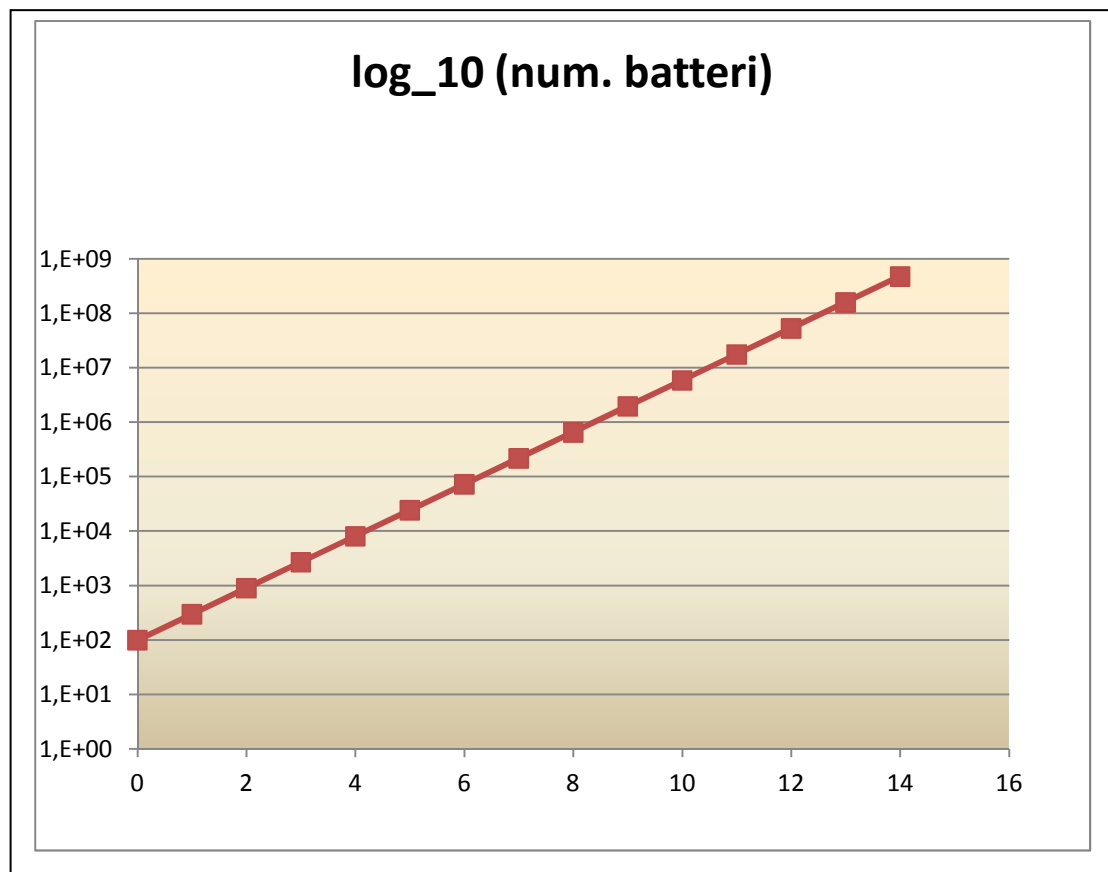


GIORNO	NUM. BATTERI	log ₁₀ (num. batteri)
0	100	2
1	300	2,477121255
2	900	2,954242509
3	2700	3,431363764
4	8100	3,908485019
5	24300	4,385606274
6	72900	4,862727528
7	218700	5,339848783
8	656100	5,816970038
19	1968300	6,294091292
10	5904900	6,771212547
11	17714700	7,248333802
12	53144100	7,725455057
13	159432300	8,202576311
14	478296900	8,679697566

$$8,679697566 = \log_{10} 478296900$$

$$478296900 = 10^{8,679697566}$$

Per rendere ancora più leggibile il grafico possiamo rappresentare in ordinata i valori di N anziché quelli di $\log_{10} N$.

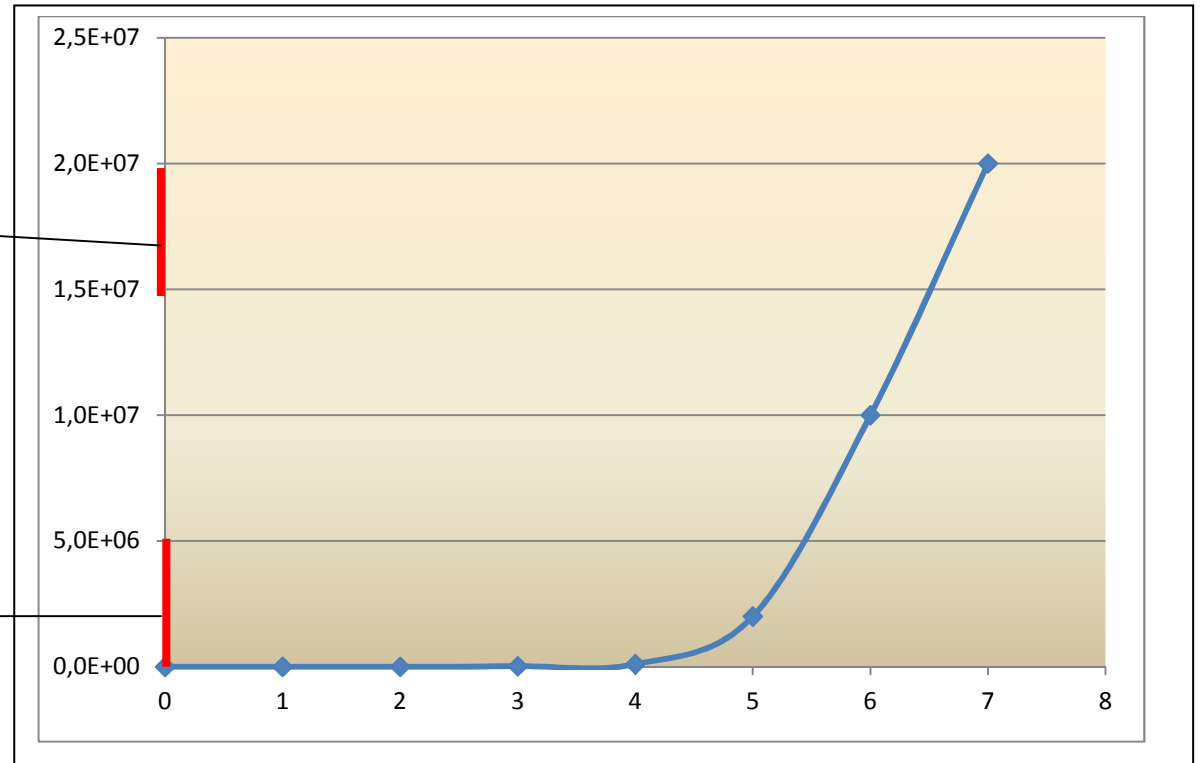


Il grafico è lo stesso ma ora sull'asse delle ordinate troviamo gli ordini di grandezza di $N(t)$ e non più i suoi valori.

N:B: L'utilizzo di una scala logaritmica può essere estremamente utile, anche se la lettura dei dati espressi in una scala logaritmica richiede una certa attenzione!

ampiezza: $5 * 10^6$

ampiezza: $5 * 10^6$



Scala lineare sull'asse delle ordinate: (a segmenti uguali sull'asse delle y corrispondono intervalli di uguale ampiezza)

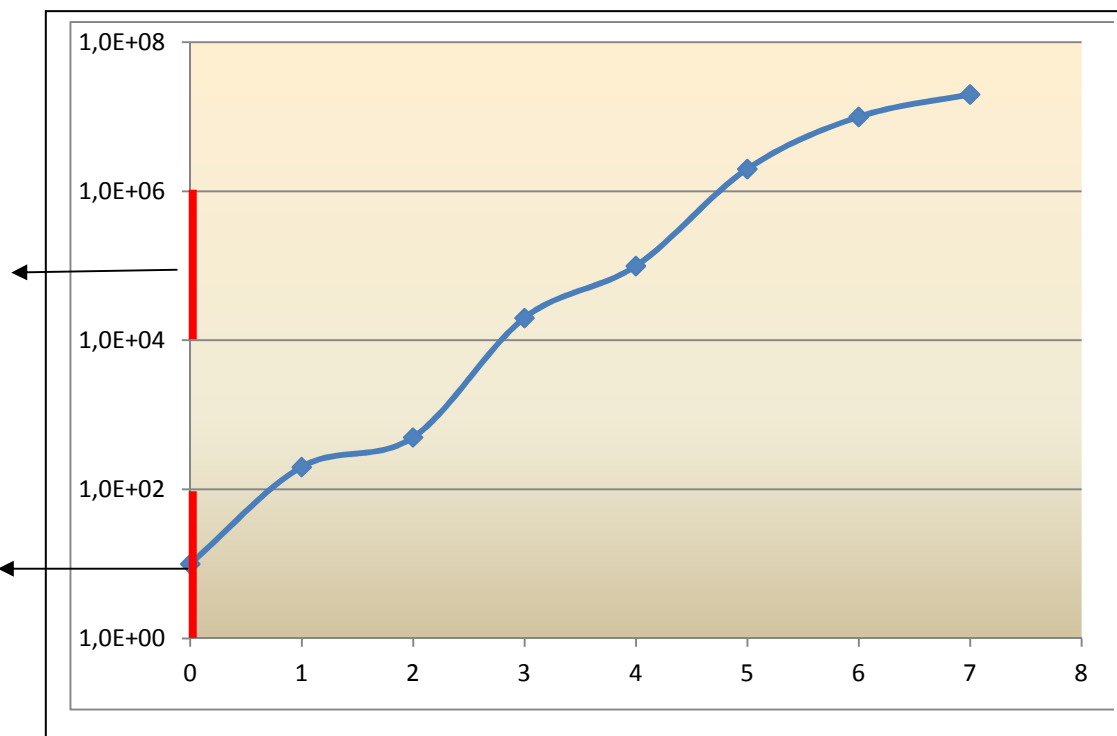
0	10
1	200
2	500
3	20000
4	100000
5	2000000
6	10000000
7	20000000

x	y	log ₁₀ y
0	10	1
1	200	2,30103
2	500	2,69897
3	20000	4,30103
4	100000	5
5	2000000	6,30103
6	10000000	7
7	200000000	7,30103

Scala logaritmica (non lineare) sull'asse delle ordinate: le ordinate vengono sostituite dai rispettivi logaritmi (in base 10 ad es.) (a segmenti uguali sull'asse delle y corrispondono intervalli di differente ampiezza)

ampiezza: $10^6 - 10^4 = 990000$

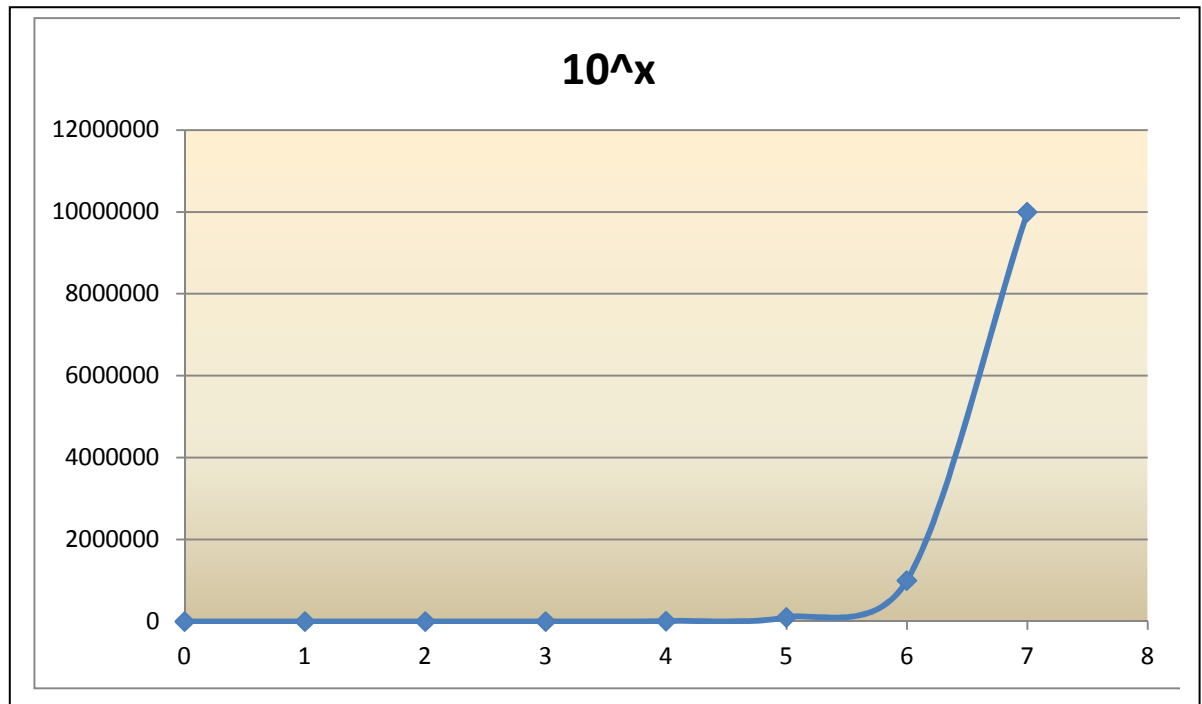
ampiezza: $10^2 - 10^0 = 99$



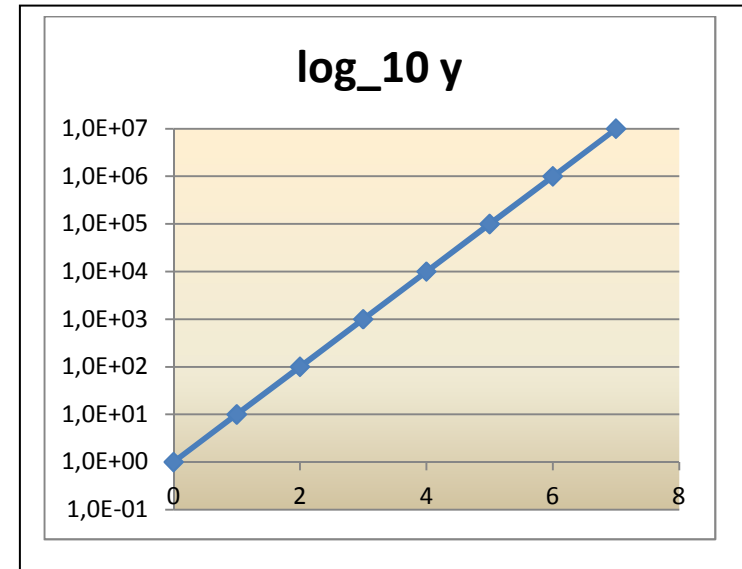
Un fenomeno descritto dalla funzione esponenziale $f(x) = ce^{ax}$, con $c, a > 0$, è rappresentato in scala logaritmica (in base e) dalla retta

$$y = \ln c + ax$$

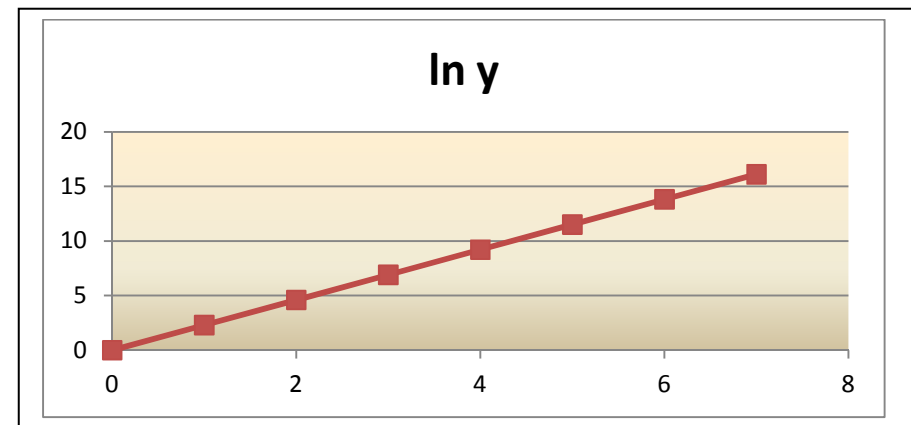
x	10^x
0	1
1	10
2	100
3	1000
4	10000
5	100000
6	1000000
7	10000000



Valori di X	Valori Y	log ₁₀ y
0	1	0
1	10	1
2	100	2
3	1000	3
4	10000	4
5	100000	5
6	1000000	6
7	10000000	7



Valori di X	Valori Y	ln y
0	1	0
1	10	2,302585
2	100	4,60517
3	1000	6,907755
4	10000	9,21034
5	100000	11,51293
6	1000000	13,81551



N.B. l'andamento esponenziale $y = 10^x$ nella scala logaritmica appare lineare (indipendentemente dalla base considerata).

Operazioni sulle funzioni

Date le funzioni f e g , le operazioni di somma, differenza, prodotto e quoziente sono definite da

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

$$(kf)(x) = kf(x)$$

Nota: per le funzioni $f \pm g$, $f \cdot g$ il dominio è l'intersezione dei domini di f e di g , mentre per f/g il dominio è l'intersezione dei domini di f e di g da cui però sono esclusi i punti per cui $g(x)=0$. Per la funzione kf , il dominio è quello di f .

Esempio

$$f(x) = \sqrt{5 - x},$$

$$g(x) = \sqrt{x - 3}$$

$$(f \pm g)(x) = \sqrt{5 - x} \pm \sqrt{x - 3}$$

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{5 - x} \cdot \sqrt{x - 3}$$

$$(f/g)(x) = \sqrt{5 - x}/\sqrt{x - 3}$$

$$(3f)(x) = 3\sqrt{5 - x}$$

Operazioni sulle funzioni: composizione di f con g

Assegnate le funzioni

$$f: X \rightarrow Y, g: Z \rightarrow K \text{ con } f(X) \subseteq Z$$

si definisce funzione composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$g \circ f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} K$$

$$g \circ f: x \in X \rightarrow g(f(x)) \in K$$

Nota: il dominio di $g \circ f$ consiste di tutti gli x del dominio di f per cui $f(x)$ è contenuto nel dominio di g .

Esempio

$$f(x) = x + 1 \quad f: (-\infty, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$$

$$g(y) = y^2 \quad g: (-\infty, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x + 1)^2$$

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y^2 + 1$$

N.B. $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(y)$

Funzioni composte e monotonia

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ crescente} \\ g(x) \text{ crescente} \end{array} \right\} \Rightarrow (g \circ f)(x) \text{ crescente}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ crescente} \\ g(x) \text{ decrescente} \end{array} \right\} \Rightarrow (g \circ f)(x) \text{ decrescente}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ decrescente} \\ g(x) \text{ decrescente} \end{array} \right\} \Rightarrow (g \circ f)(x) \text{ crescente}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ decrescente} \\ g(x) \text{ crescente} \end{array} \right\} \Rightarrow (g \circ f)(x) \text{ decrescente}$$

Esempi

$$h(x) = (x + 1)^3$$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow x + 1 (= y) \\ y \rightarrow y^3 \end{array} \right\} \Rightarrow h(x) \quad \text{crescente}$$

$$h(x) = -(x + 1)^3$$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow x + 1 (= y) \\ y \rightarrow y^3 (= z) \\ z \rightarrow -z \end{array} \right\} \Rightarrow h(x) \quad \text{decescente}$$

$$h(x) = x^2 + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow x^2 (= y) \\ y \rightarrow y + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{cresc. in } [0, +\infty) \\ \text{decresc. in } (-\infty, 0) \\ \text{cresc.} \end{array} h(x) \begin{array}{l} \text{cresc. in } [0, +\infty) \\ \text{decresc. in } (-\infty, 0) \end{array}$$

$$h(x) = \log(x^2 + 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow x^2 (= y) \\ y \rightarrow y + 1 = (z) \\ z \rightarrow \log z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{cresc. in } [0, +\infty) \\ \text{decresc. in } (-\infty, 0) \\ \text{cresc.} \\ \text{cresc.} \end{array} h(x) \begin{array}{l} \text{cresc. in } [0, +\infty) \\ \text{decresc. in } (-\infty, 0) \end{array}$$

$$h(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow x^2 (= y) \quad \begin{array}{l} \text{cresc. in } [0, +\infty) \\ \text{decresc. in } (-\infty, 0) \end{array} \\ y \rightarrow y + 1 = (z) \quad \text{cresc.} \\ z \rightarrow \log_{\frac{1}{3}} z \quad \text{decresc.} \end{array} \right\} h(x) \quad \begin{array}{l} \text{decresc. in } [0, +\infty) \\ \text{cresc. in } (-\infty, 0) \end{array}$$

$$h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x^{-2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow x^{-2} (= y) \quad \text{decresc.} \\ y \rightarrow \log_{\frac{1}{3}} y \quad \text{decresc.} \end{array} \right\} \Rightarrow h(x) \text{ crescente.}$$