Teorema di Weierstrass

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$

$$\Downarrow$$

$f(x)$ è dotata di minimo e massimo assoluti in $[a, b]$, cioè

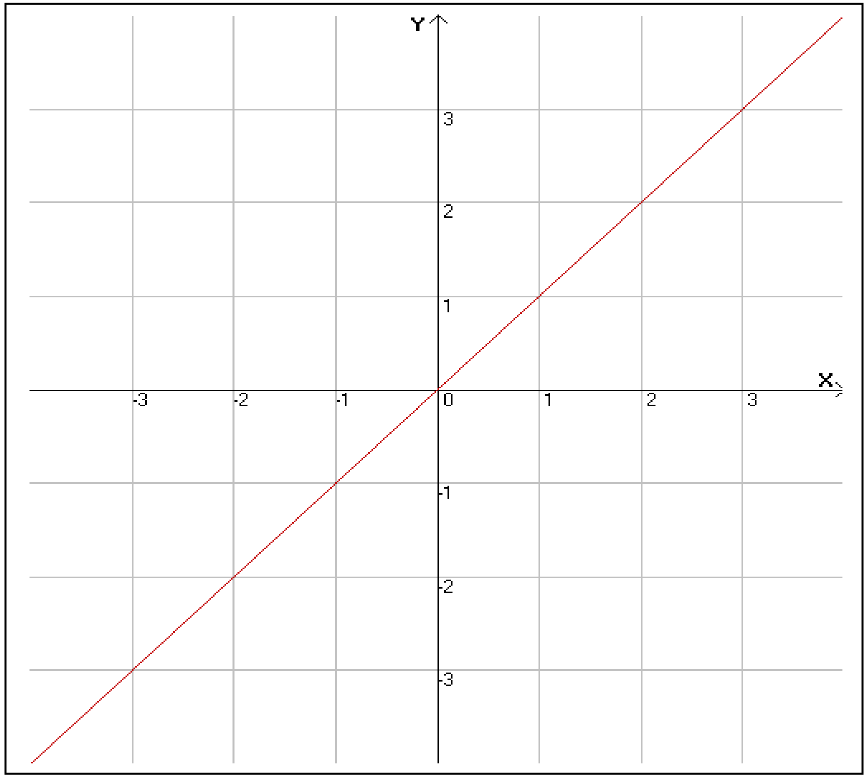
$$\exists x_1 e\ x_2 \in [a, b]: f(x_1) = m\ e\ f(x_2) = M$$

e quindi

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M\ \forall x \in [a, b].$$

N.B. L'ipotesi che l'intervallo $[a, b]$ sia chiuso e limitato è necessaria.

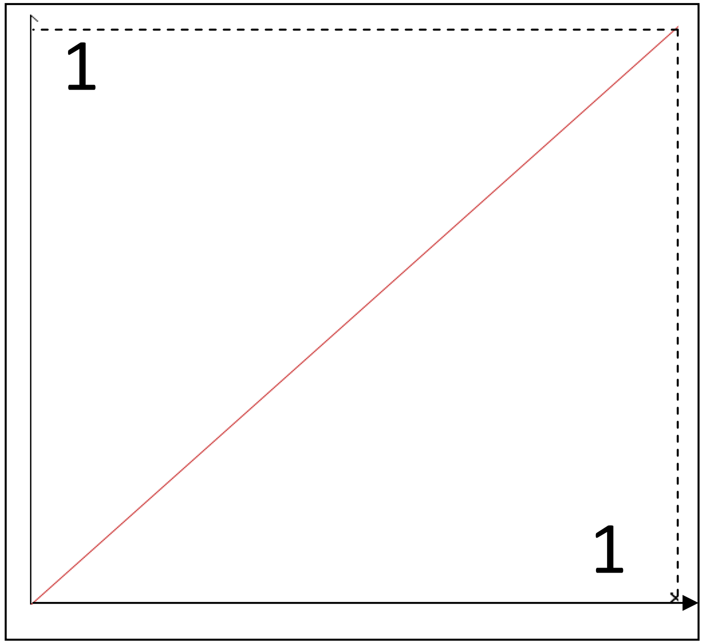
Esempio



$f(x) = x$ in R

non ammette né massimo né minimo

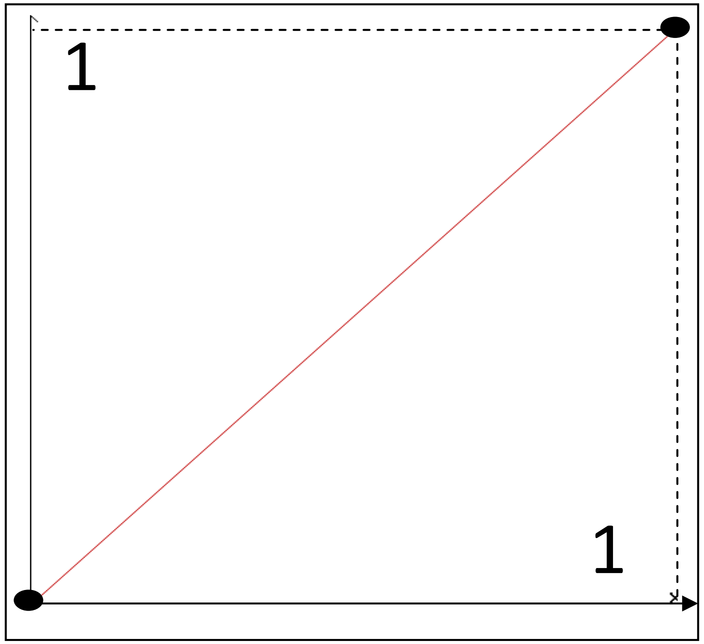
Esempio



$$f(x) = x \text{ in } (0,1)$$

non ammette né massimo né minimo perché $\{0,1\} \not\subset (0,1)$

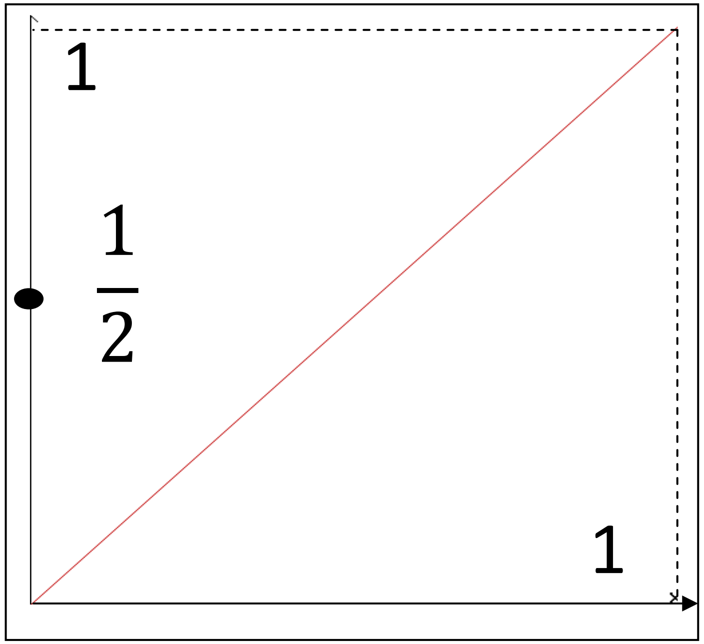
Esempio



$f(x) = x$ in $[0,1]$

ammette massimo e minimo

Esempio

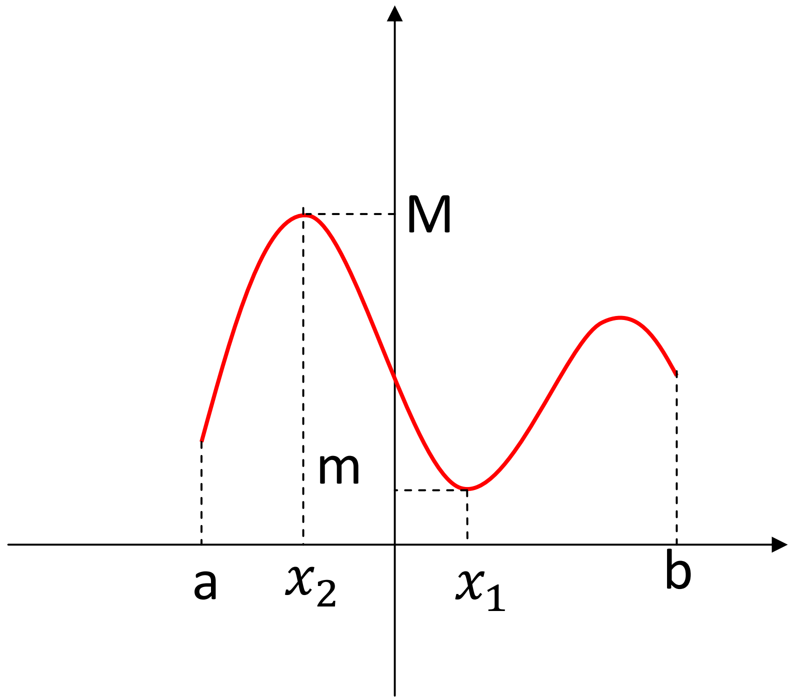


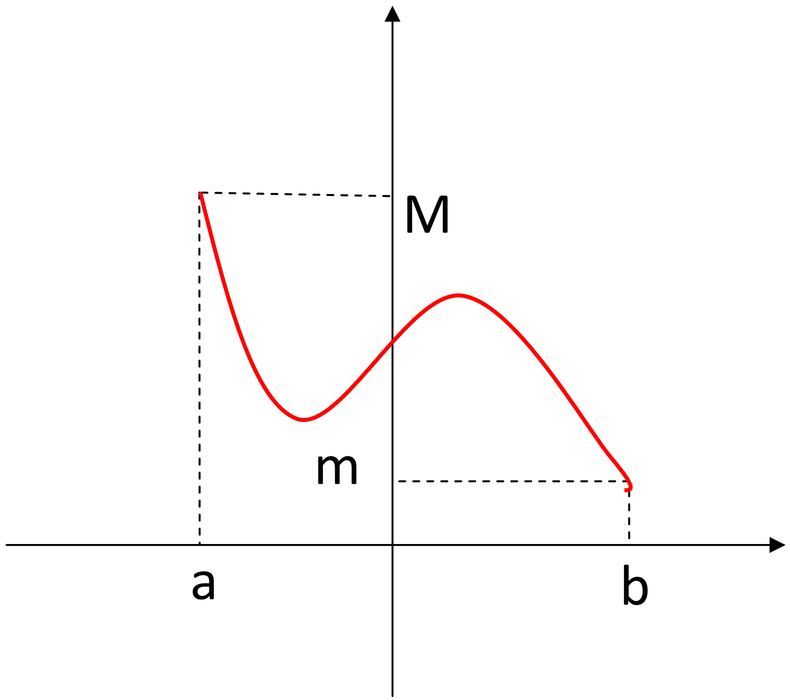
$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1) \\ \frac{1}{2} & x = 0, x = 1 \end{cases}$$

non ammette né massimo né minimo

Il suo estremo superiore , 1 e il suo estremo inferiore, 0 non sono valori assunti dalla funzione!

N.B. Il minimo ed il massimo assoluto di una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato possono essere assunti sia in punti interni all'intervallo $[a,b]$ sia agli estremi dell'intervallo $[a,b]$.



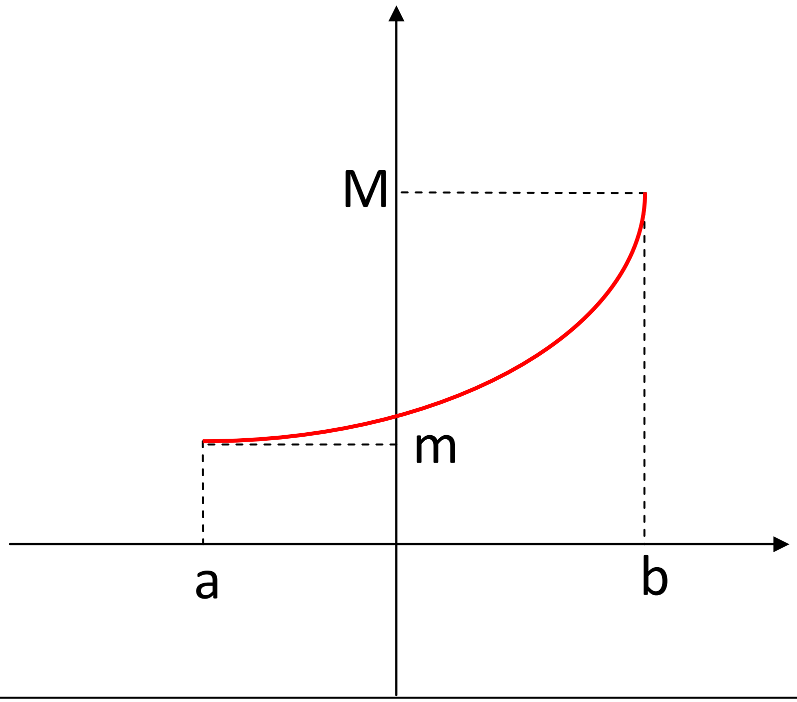


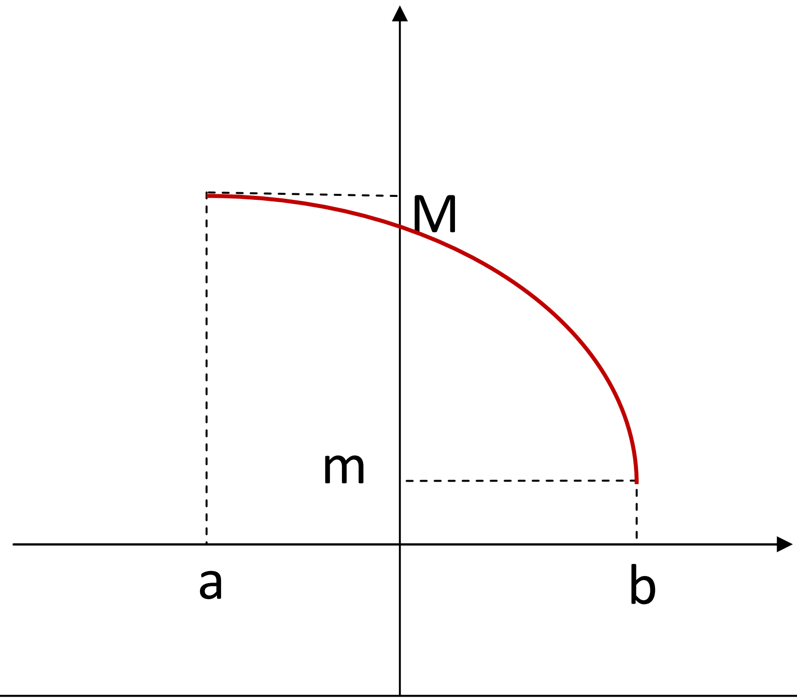
massimo e minimo assoluti vengono assunti in punti interni

massimo e minimo assoluti vengono assunti agli estremi

N.B.3 In particolare, se una funzione $f\ (x)$ è continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato ed in tale intervallo è anche:

- strettamente crescente $\Longrightarrow M = f(b) ed\ m = f(a)$
- strettamente decrescente $\Longrightarrow M = f(a) ed\ m = f(b)$





la funzione è strett. cresc. e massimo e minimo assoluti vengono assunti agli estremi

la funzione è strett. decresc. e massimo e minimo assoluti vengono assunti agli estremi

Teorema dei valori intermedi

Se *f* (*x*) è una funzione continua in un intervallo [*a*,*b*] chiuso e limitato *f* (*x*)

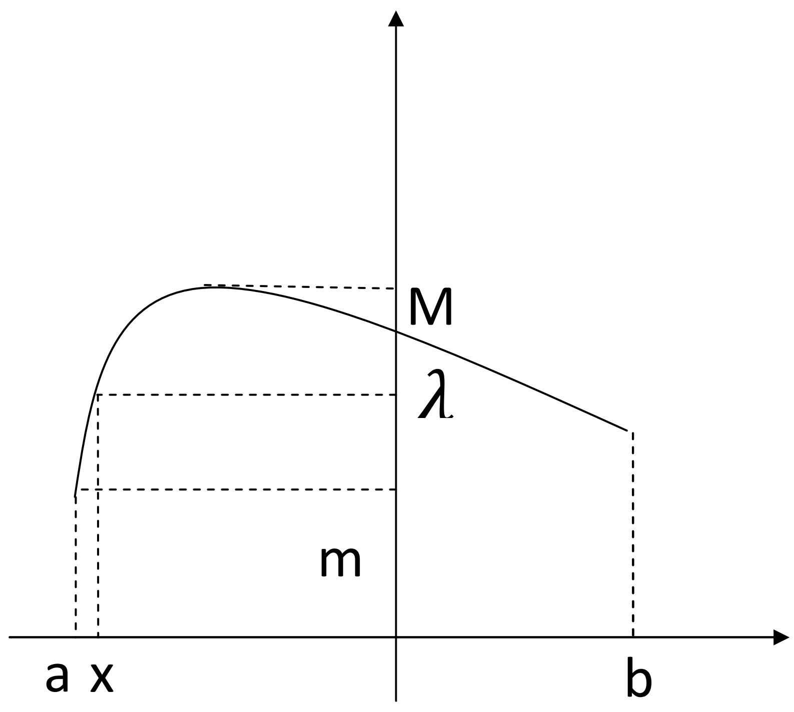
$$\Downarrow$$

assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo (che esistono per il Teorema di Weierstrass)

Cioè

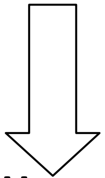
$\forall \lambda: m \leq \lambda \leq M$

$\exists x \in [a, b]: f(x) = \lambda$

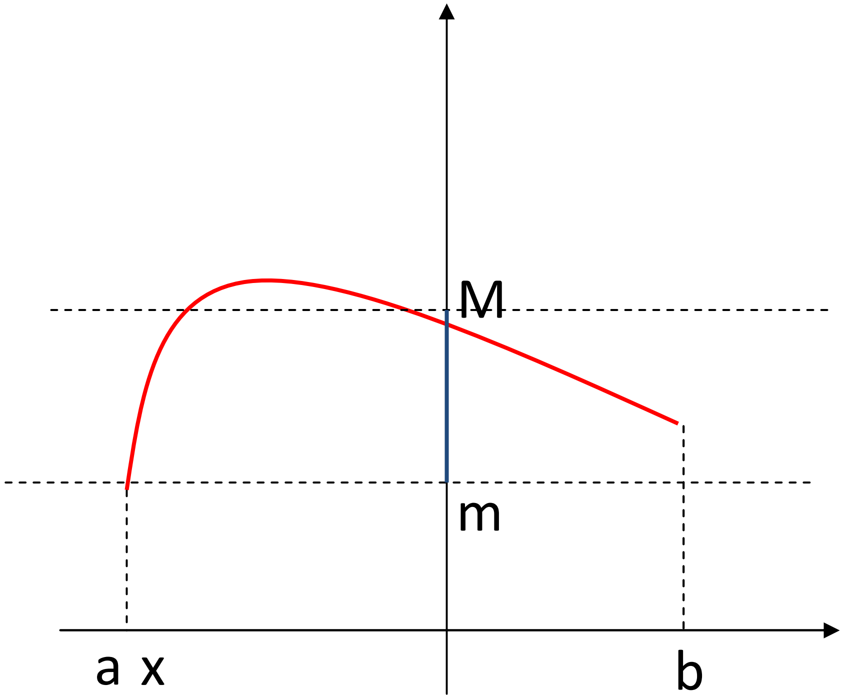


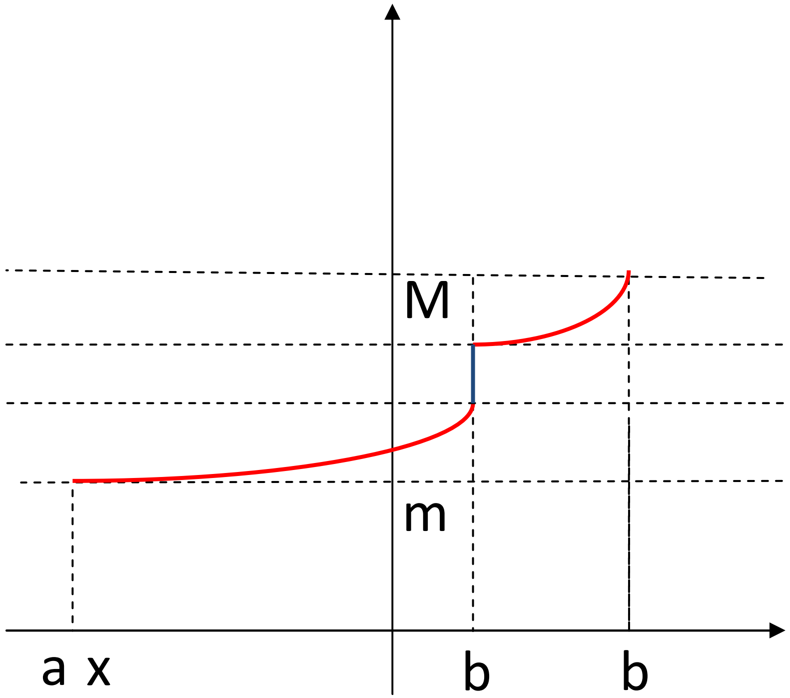
Teorema di Weierstrass + Teorema dei valori intermedi

Se *f* (*x*) è una funzione continua in un intervallo [*a*,*b*] chiuso e limitato *f* (*x*)



la sua immagine è l'intervallo [m,M] dove m ed M sono rispettivamente il minimo e il massimo assoluti di f(x) in [a,b].





Limitatezza di una funzione

- $f(x)$ continua in [a,b] chiuso e limitato
  $f(x)$ è limitata perché ammette ivi massimo e minimo assoluti per il teorema di Weierstrass

- $f(x)$ continua in (a,b) con a e b eventualmente uguali a $+\infty$ e/o $-\infty$ per valutarne la limitatezza occorre studiare il comportamento di $f(x)$ in a e in b.

Immagine di una funzione continua

$f(x)$ funzione continua in X

- $X = [a,b] \Longrightarrow f(X) = [m,M]$
- $X = [a,b] \cup [a_1,b_1] \Longrightarrow f(X) = [m,M] \cup [m_1,M_1]$
- $X = (a,b) \Longrightarrow f(X) = \begin{cases} [\min f, \max f] & [\min f, \sup f) \\ (\inf f, \sup f) & (\inf f, \max f] \end{cases}$

Teorema sul limite delle funzioni monotone (non necessariamente continue)

Sia $f(x)$ monotona in (a,b); allora esistono finiti i limiti

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) \ \forall x_0 \in (a,b)$$

ed esistono, eventualmente infiniti i limiti

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \lim_{x\to b^-} f(x)$$

N.B. Se una funzione è monotona in (a,b), i suoi eventuali punti di discontinuità in (a,b) possono essere solo di prima specie. Agli estremi si possono presentare asintoti verticali.

$f(x)$ funzione continua e crescente in X

- $X = [a,b] \Longrightarrow f(X) = [m,M] = [f(a), f(b)]$

- $X = (a,b) \Longrightarrow f(X) = (\sup f\,, \inf f) = (\lim_{x\to a^+} f(x)\,, \lim_{x\to b^-} f(x))$

- $X = (a,b] \Longrightarrow f(X) = (\inf f\,, M] = (\lim_{x\to a^+} f(x)\,, f(b)]$

- $X = [a,b) \Longrightarrow f(X) = [m, \sup f) = [f(a), \lim_{x\to b^-} f(x))$

N.B.

- $f(x)$ definita in un intervallo $[a, b]$. Allora

  $f(x)$ continua in $[a, b] \Longrightarrow f([a, b])$ è un intervallo

- $f(x)$ monotona in un intervallo $[a, b]$. Allora

  $f(x)$ continua in $[a, b] \Longleftrightarrow f([a, b])$ è un intervallo

Criterio di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo $[a, b]$ è invertibile in tale intervallo.

Teorema di continuità della funzione inversa

Sia f strettamente monotona in $[a, b]$. Se f è continua, anche la funzione inversa f^{-1} è continua.

Teorema degli zeri

Sia $f(x)$ una funzione continua in [a,b] (chiuso e limitato). Allora se

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$: $f(x_0) = 0$.

Osservazione

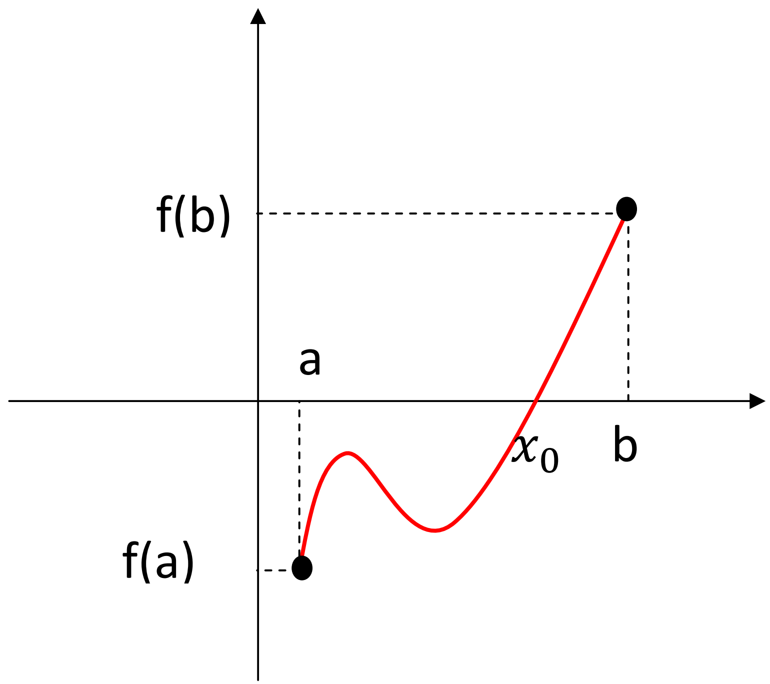
- Il punto x_0 è uno zero della funzione f
- geometricamente x_0 è l'ascissa del punto di intersezione del grafico della funzione f con l'asse delle ascisse.

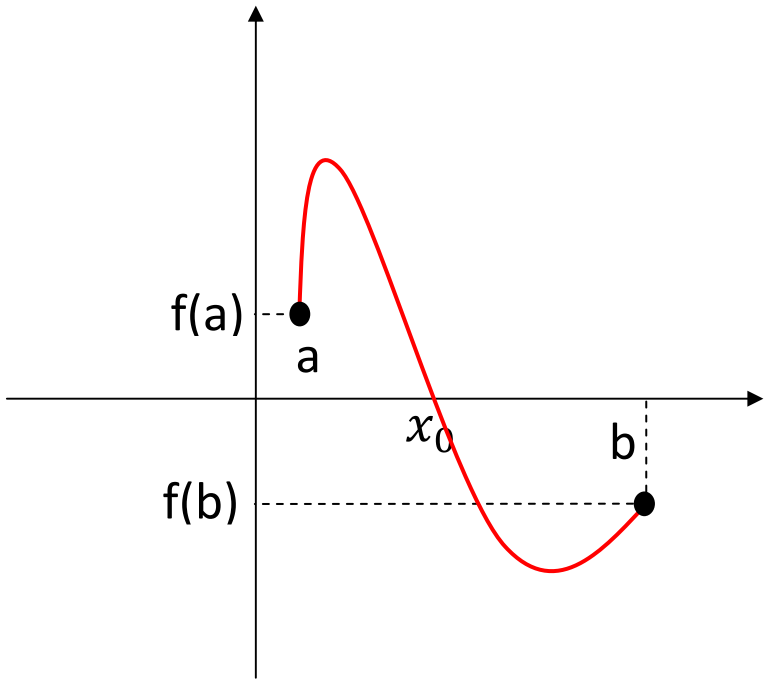
N.B. Se in particolare $f(x)$ è strettamente monotona, tale zero è unico.

Se $f(a)$ ed $f(b)$ hanno segno opposto e se $f(x)$ è una funzione continua, detti

$$P_1(a, f(a)) \text{ e } P_1(b, f(b))$$

il grafico di f deve necessariamente collegare P_1e P_2 con una linea continua e quindi deve necessariamente attraversare l'asse delle x almeno una volta





Esercizio

La funzione

$$f(x) = \log x + 2x - 3$$

presenta zeri? Se sì, quanti?

Sol. $D(f) =]0, +\infty]$

$$\lim_{x \to 0^+} (\log x + 2x - 3) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\log x + 2x - 3) = +\infty$$

Consideriamo l'intervallo $[1, e]$

$$f(1) = \log 1 + 2 - 3 = -1 < 0$$

$$f(e) = \log e + 2e - 3 = 2e - 2 > 0$$

in particolare

$$\left.\begin{array}{ll} f_1(x) = \log x & crescente \\ f_2(x) = 2x - 3 & crescente \end{array}\right\} \Longrightarrow crescente$$

quindi la funzione $f(x)$ ammette un unico zero in $[1, e]$