TEOREMI FONDAMENTALI SUI LIMITI

I teoremi e le proprietà che seguono sono relativi a funzioni che ammettono limite (sia finito che infinito) per *x* che tende ad un numero finito x_0 oppure per *x* che tende ad infinito. Per semplicità, li enunceremo e li dimostreremo nel caso in cui la funzione f (*x*) considerata ammetta limite finito per *x* che tende ad un numero finito x_0.

Teorema di unicità del limite

Sia $f\,(x)$ definita in un intervallo I (limitato o non limitato) fatta eccezione al più per un punto $x_0 \in I$. Se esiste il limite di $f\,(x)$ per $x \to x_0$

$$\Downarrow$$

tale limite è unico.

DIM.

Supponiamo per assurdo che la funzione ammetta due limiti diversi per $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \text{ e } \lim_{x\to x_0} f(x) = m \qquad \text{con } l \neq m.$$

Per fissare le idee supponiamo $l < m$. Dalla definizione di limite si ha

- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1), con\ x \neq x_0$
  $\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

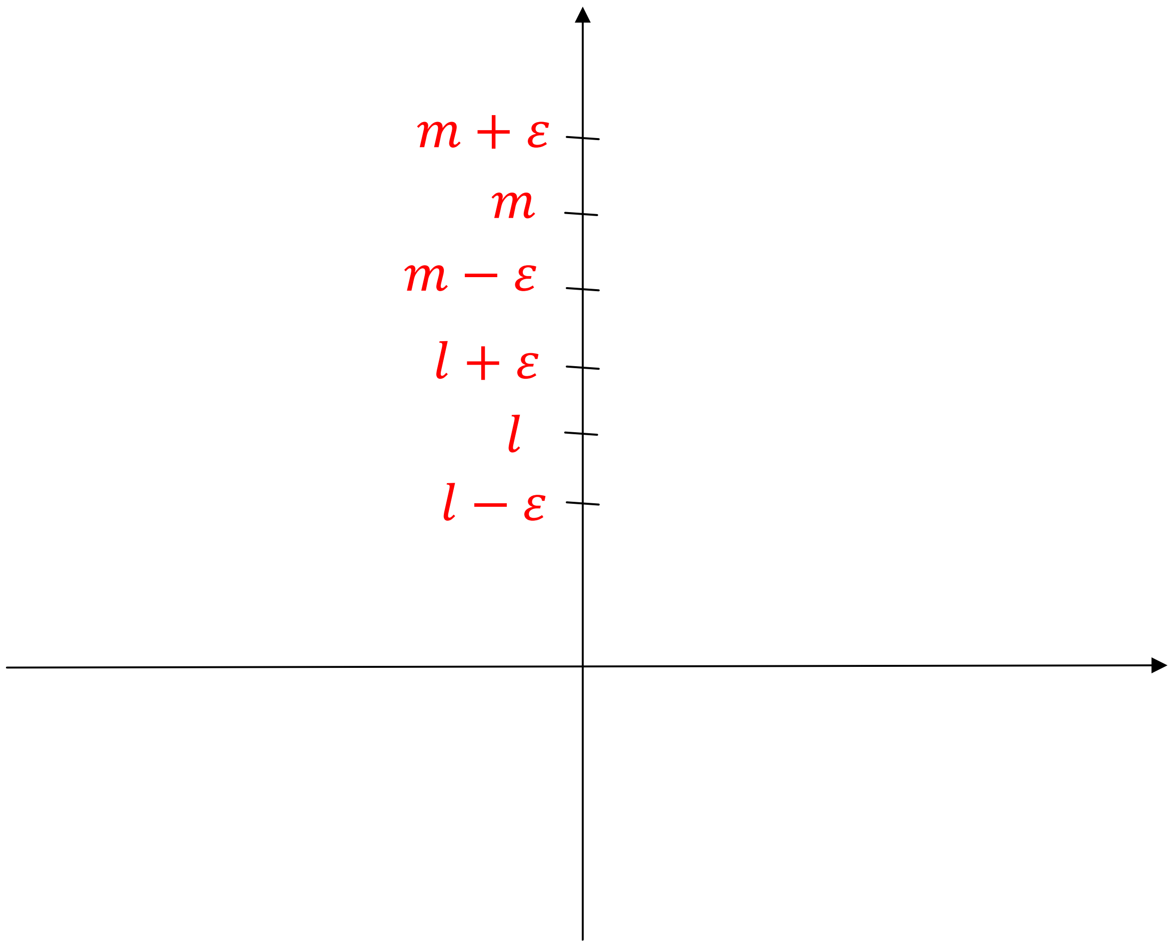
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2), con\ x \neq x_0$
  $\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon$

(ε è un valore scelto arbitrariamente piccolo)

$$\Downarrow$$

ε può essere scelto in modo che

$$(l - \varepsilon, l + \varepsilon) \cap (m - \varepsilon, m + \varepsilon) = \emptyset$$



se $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) \cap (m-\varepsilon, m+\varepsilon) = \emptyset$ allora

$$l+\varepsilon < m-\varepsilon$$

$$l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon < m-\varepsilon < f(x) < m+\varepsilon$$

assurdo

L'assurdo deriva dall'aver supposto che

$$m \neq l$$

quindi deve essere

$$m = l$$

Teorema della permanenza del segno

Sia $f\,(x)$ definita in un intervallo I (limitato o non limitato) fatta eccezione al più per un punto x_0.

Se per $x \to x_0$ la funzione ammette limite finito $l \neq 0$

$$\Downarrow$$

esiste un intorno I_{x_0} del punto x_0 tale che :

$$\forall x \in I_{x_0}, x \neq x_0$$

i corrispondenti valori $f\,(x)$ hanno lo stesso segno di l

Dim. Per ipotesi sappiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0$$

Per definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), con\ x \neq x_0$$
$$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

in particolare poiché ε è scelto arbitrariamente possiamo porre

$$\varepsilon = |l| > 0$$

e quindi la definizione di limite diventa

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), con\ x \neq x_0$$
$$\Rightarrow l - |l| < f(x) < l + |l|$$

- se $l > 0 \Rightarrow |l| = l$ e quindi

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), con\ x \neq x_0$$
$$\Rightarrow 0 < f(x) < 2l \Rightarrow f(x) > 0$$

- se $l < 0 \Rightarrow |l| = -l$ e quindi

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), con\ x \neq x_0$$
$$\Rightarrow -2l < f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

CVD

Teorema del confronto I

Siano $f(x)$, g(x), h(x) tre funzioni definite in un intervallo I (limitato o non limitato) fatta eccezione al più per un punto x_0.

Se risulta

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \;\; \forall x \in I, x \neq x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \neq \pm\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

Dim. Per ipotesi sappiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \neq \pm\infty$$

Dalla definizione di limite si ha

- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1), con\ x \neq x_0$
  $\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2), con\ x \neq x_0$
  $\Rightarrow |h(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$

$$\forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$$

valgono entrambe le condizioni

$$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

Teorema del confronto II

Analogamente per $l = \pm\infty$. Se

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \leq g(x)\ \forall x \in I, x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \leq g(x)\ \forall x \in I, x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Infinitesimi e infiniti

Def. Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo I (limitato o illimitato) fatta eccezione al più per un punto x_0 (con x_0 punto al finito o all'infinito).

- si dice che f è infinitesima per $x \to x_0$ oppure $x \to \pm\infty$ se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \text{ oppure } \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

- si dice che f è infinita per $x \to x_0$ oppure $x \to \pm\infty$ se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \text{ oppure } \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$