

29. Funzioni discontinue. Classificazione dei punti di discontinuità.



Punti di discontinuità

- se f è definita in un intervallo $[a,b]$ escluso al più un punto x_0

oppure

- se f non è continua in un punto x_0

si dice che il punto x_0 è un

punto singolare oppure **punto di discontinuità**



Punti di discontinuità

I punti di discontinuità si dividono in tre specie:

I, II e III specie. I punti di III specie si chiamano anche punti di discontinuità eliminabile



Punti di discontinuità di I specie

Si dice che nel punto x_0 una funzione f ha una discontinuità di I specie se in tale punto esistono finiti il limite destro ed il limite sinistro di f ma sono diversi tra loro.

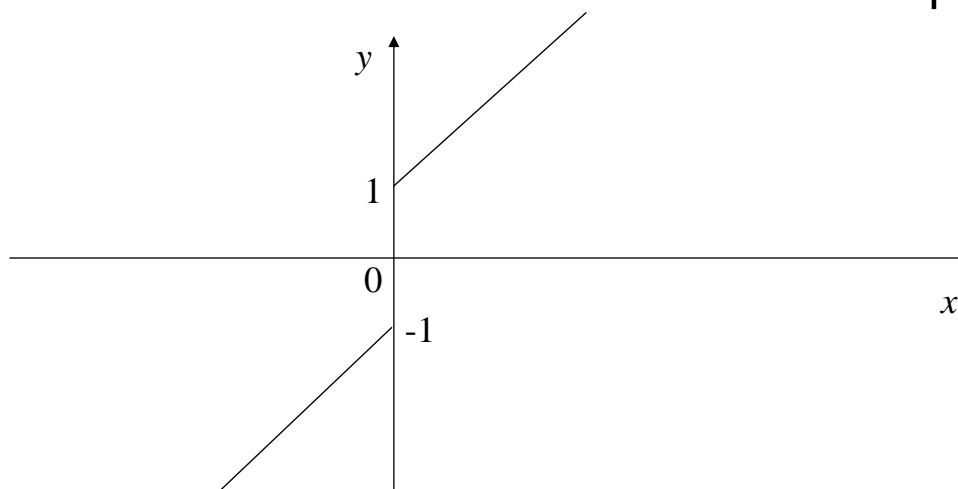
Cioè

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2$$



Punti di discontinuità di I specie

Esempio. La funzione $f(x) = x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x+1, & \text{se } x > 0 \\ x-1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ presenta in $x = 0$ una discontinuità di I specie.



Infatti: $1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$



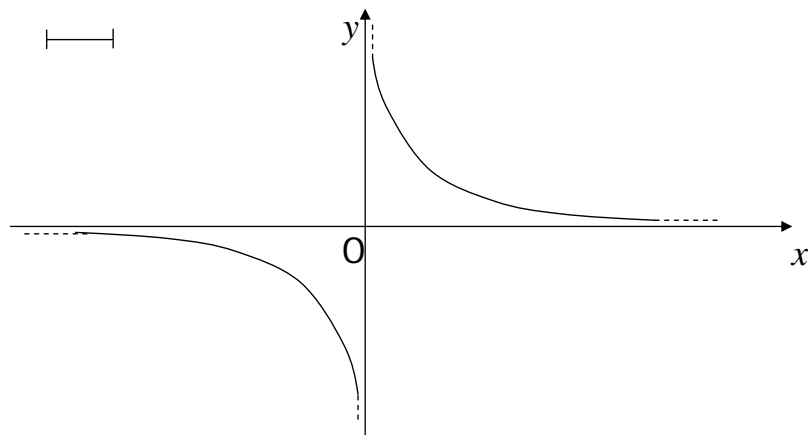
Punti di discontinuità di II specie

Si dice che nel punto x_0 una funzione f ha una discontinuità di II specie se in tale punto almeno uno dei due limiti destro o sinistro di f è infinito oppure non esiste.



Punti di discontinuità di II specie

Esempio. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ presenta in $x = 0$ una discontinuità di II specie.



Infatti: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



Punti di discontinuità di II specie

Esempio. La funzione $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ presenta in $x = 0$ una discontinuità di II specie.

Infatti: $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0$



Punti di discontinuità di II specie: osservazione

In definitiva, la presenza di asintoti verticali è rappresentativa di discontinuità di II specie



Punti di discontinuità eliminabile (III specie)

Si dice che nel punto x_0 una funzione f ha una discontinuità eliminabile se in tale punto esiste finito il limite di f ma f in tale punto:
non è definita

oppure

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$



Punti di discontinuità eliminabile (III specie)

Esempio. La funzione $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

presenta nel punto $x = 0$ una
discontinuità eliminabile

Infatti:

- f non è definita in $x = 0 \Rightarrow \nexists f(0)$
- però esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

